İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SONLU TİPTEN ALT MANİFOLDLAR VE GAUSS TASVİRLERİ

DOKTORA TEZİ

Burcu BEKTAŞ

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Programı

TEMMUZ 2017

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SONLU TİPTEN ALT MANİFOLDLAR VE GAUSS TASVİRLERİ

DOKTORA TEZİ

Burcu BEKTAŞ
(509122051)

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Elif ÖZKARA CANFES
Eş Danışman: Prof. Dr. Uğur DURSUN

TEMMUZ 2017

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 509122051 numaralı Doktora Öğrencisi Burcu BEKTAŞ, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı "SONLU TİPTEN ALT MANİFOLDLAR VE GAUSS TASVİRLERİ" başlıklı tezini aşağıdaki imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı :	**Doç. Dr. Elif ÖZKARA CANFES** İstanbul Teknik Üniversitesi	....
Eş Danışman :	**Prof. Dr. Uğur DURSUN** Işık Üniversitesi	....
Jüri Üyeleri :	**Prof. Dr. Saniye Aynur UYSAL** Doğuş Üniversitesi	....
	Prof. Dr. Salim YÜCE Yıldız Teknik Üniversitesi	....
	Prof. Dr. Füsun ÖZEN ZENGİN İstanbul Teknik Üniversitesi	....
	Doç. Dr. Güler GÜRPINAR ARSAN İstanbul Teknik Üniversitesi	....
	Doç. Dr. Hakan Mete TAŞTAN İstanbul Üniversitesi	....

Teslim Tarihi : **12 Haziran 2017**
Savunma Tarihi : **27 Temmuz 2017**

Annem'e,

ÖNSÖZ

Doktora çalışmamın her aşamasında beni her konuda destekleyen, akademik olarak gelişebilmem için her türlü fedakarlığı gösteren ve kıymetli bilgilerini sonuna kadar benimle paylaşan çok değerli hocalarım Prof. Dr. Uğur Dursun ve Doç. Dr. Elif Özkara Canfes'e tüm özverileri için en içten teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışması boyunca her dönem kıymetli vakitlerini ayırarak beni dinleyen tez izleme komitesi üyeleri hocalarım Prof. Dr. Saniye Aynur Uysal, Doç. Dr. Güler Gürpınar Arsan ve Doç. Dr. Hakan Mete Taştan'a ilgilerinden dolayı teşekkür ederim.

Hayatımın her döneminde bana hep güvenen, destek veren ve varlıkları ile güç bulduğum merhume anneannem Nahide Çınar ve annem Zeynep Çınar'a minnetlerimi sunuyorum. Akademik hayata ilk başladığım günden beri aynı ofisi paylaşmak ile kalmayıp bütün üzüntü ve sevinçlerimizi birlikte yaşadığımız Araş. Gör. Sinem Güler ve Araş. Gör. Tuğba Yıldırım'a teşekkür ediyorum. Son olarak, uzun zamandır tanıdığım ve beni akademik hayatta hep destekleyen ama şu an da benim için yüklendiği anlamla hayatımın farklı bir yerine yerleşen Öğr. Gör. Dr. Ali Demirci'ye çok teşekkür ediyorum.

Bu tez çalışması "Lisansüstü Tezleri Destekleme Projesi" kapsamında İstanbul Teknik Üniversitesi ve "Tübitak 2211-A Genel Yurt içi Doktora Burs Programı" kapsamında Tübitak tarafından desteklenmiştir. İstanbul Teknik Üniversitesi ve Tübitak'a desteklerinden dolayı teşekkür ederim. Ayrıca, altı ay boyunca beni Belçika'daki University of Leuven'de çok iyi bir şekilde ağırlayan Geometri bölümününe ve özellikle verimli bir süreç geçirmeme yardımcı olduklarından dolayı Prof. Dr. Joeri Van der Veken ve Prof. Dr. Luc Vrancken'e ve "Tübitak 2214-A Doktora Sırası Yurt dışı Araştırma Burs Programı" kapsamında beni desteklediği için Tübitak'a teşekkür ederim.

I also would like to express my deep gratitude to Prof. Dr. Joeri Van der Veken, Prof. Dr. Luc Vrancken and Geometry Section of University of Leuven for their warm hospitality during my visit to Leuven, Belgium in 2015.

Bilimsel araştırma yapmak uzun ve meşakkatli bir yol. Bu çalışmada benim bilim serüveninde attığım ilk adım. Umarım daim olur. Ad astra per aspera.

Temmuz 2017

Burcu BEKTAŞ
(Yüksek Matematik Mühendisi)

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOLLER

$B|_W$: B'nin W üzerine kısıtlanışı
$T_p(M)$: M manifoldunun p noktasındaki teğet uzayı
$\mathbf{C^\infty(M)}$: M manifoldundan $\mathbb{R}$'ye tanımlı C^∞ sınıfından fonksiyonların uzayı
$\mathbf{S}_s^{\mathbf{m-1}}(\boldsymbol{c})$: Merkezi orjinde olan $(m-1)$–boyutlu, s indeksli, c eğrilikli yarı–küre
$\mathbf{H}_s^{\mathbf{m-1}}(\boldsymbol{-c})$: Merkezi orjinde olan $(m-1)$–boyutlu, s indeksli, $-c$ eğrilikli yarı–hiperbolik uzay
$\mathscr{LC}$: Köşesi orjinde olan ışık konisi
$\chi(\mathbf{M})$: M manifoldu üzerindeki düzgün vektör alanlarının uzayı
$\tilde{\boldsymbol{g}}$: Çevreleyen uzayın metrik tensörü
$\boldsymbol{g}$: Alt manifoldun metrik tensörü
$\widetilde{\nabla}$: Çevreleyen uzayın Levi–Civita konneksiyonu
∇ : Alt manifoldun Levi–Civita konneksiyonu
$\widetilde{\mathbf{R}}$: Çevreleyen uzayın eğrilik tensörü
$\mathbf{R}$: Alt uzayın uzayın eğrilik tensörü
$\mathbf{D}$: M alt manifoldu üzerine indirgenen normal konneksiyon
$\mathbf{R}^D$: Alt uzayın normal eğrilik tensörü
h : İkinci esas form
S : Skaler eğrilik
A : Şekil operatörü veya Weingarten tasviri
Im h : Birinci normal uzay
div : Diverjans
grad : Gradiyent
$\boldsymbol{\Delta}$: Laplace operatörü
$\mathbf{G(n,m)}$: Grassmaniyen manifoldu
$\boldsymbol{\nu}$: Klasik Gauss Tasviri
$\tilde{\boldsymbol{\nu}}$: Yarı–küresel Gauss Tasviri
$\mathbb{GL}(\boldsymbol{m},\mathbb{R})$: $m \times m$ tersi olan matrislerin grubu
$\boldsymbol{O(m)}$: $\mathbb{E}^m$ Euclid uzayının ortogonal grubu
$\boldsymbol{SO(m)}$: $\mathbb{E}^m$ Euclid uzayının özel ortogonal grubu

SONLU TİPTEN ALT MANİFOLDLAR VE GAUSS TASVİRLERİ

ÖZET

Euclid uzayında sonlu tipten alt manifold tanımı ilk kez 1970'li yılların sonlarına doğru B.-Y. Chen tarafından ortaya atılmıştır. Başlangıçta, Euclid uzayında kompakt manifoldların toplam ortalama eğrilikleri için en iyi tahmini yapabilmek ve Euclid uzayının alt manifoldlarına ait derece kavramını tanımlayabilmek için ortaya atılan bu kavram zaman içinde aktif bir araştırma alanı haline gelmiştir. Daha sonra sonlu tipten kavramı, Euclid veya yarı–Euclid uzayının alt manifoldları üzerinde tanımlı diferansiyellenebilir tasvirlere genişletilmiştir.

Euclid veya yarı–Euclid uzayının kompakt bir Riemann manifoldunun üzerinde tanımlı bir düzgün tasvir, Laplace operatörünün özvektörlerinin sonlu toplamı şeklinde yazılabiliyorsa, bu tasvire sonlu tipten tasvir denir. Bu spektral açılımdaki özvektörlere karşılık ayrık, sıfırdan farklı k tane özdeğer var ise, bu tasvire k–tipindendir denir.

Bu tanımda kompaktlık önemli bir koşuldur. Sonlu tipten manifold ve tasvir tanımı daha sonra benzer şekilde kompakt olmayan manifoldlar için de verilmiştir. Bu durumda, spektral açılımında özvektörlere karşılık gelen özdeğerlerden biri sıfır ise, bu tasvire sıfırlı k–tipinden denir.

Sonlu tipten tasvir çalışmaları özellikle, manifoldlar üzerinde önemli bir diferansiyellenebilir tasvir olan Gauss tasviri üzerinde yoğunlaşmıştır. Gauss tasvirinin tanımı aşağıdaki şekilde verilir:

$\mathbf{x} : M \longrightarrow \mathbb{E}^m$, yönlendirilmiş n–boyutlu bir M Riemann manifoldundan $\mathbb{E}^m$ Euclid uzayına izometrik bir daldırma ve $G(n,m)$, $\mathbb{E}^m$ uzayının orijininden geçen n–boyutlu yönlendirilmiş düzlemleri içeren Grasmaniyen manifoldu olsun. Bu durumda, klasik Gauss tasviri $\nu : M \longrightarrow G(n,m)$, M manifoldu üzerindeki bir p noktasını manifoldun o noktadaki teğet uzayının $\mathbb{E}^m$ uzayının orijinine taşınması ile elde edilen n–boyutlu düzlemlere götüren tasvirdir. Klasik Gauss tasviri manifoldun normal uzayı yardımı ile de tanımlanabilir. Ayrıca, $G(n,m)$ Grasmaniyen manifoldu $N = \binom{m}{n}$ olmak üzere, bir $\mathbb{E}^N$ Euclid uzayına daldırılabileceğinden, sonlu tipten tasvir kavramı klasik Gauss tasviri için de verilebilir. Klasik Gauss tasviri yarı–Euclid uzayının yarı–Riemann alt manifoldları için de benzer şekilde tanımlanır.

Bir Riemann manifoldunun küre içine olan izometrik daldırması, Euclid uzayının bir izometrik daldırması gibi düşünülebilir. Dolayısıyla, bu daldırmaya karşılık gelen Gauss tasviri klasik anlamda tanımlanabilir. Ancak, bu tanımlanan Gauss tasviri kürenin değil, Euclid uzayının özelliklerini yansıtmaktadır. Bu nedenle, M. Obata tarafından Gauss tasvirinin tanımı aşağıdaki şekilde değiştirilmiştir:

$\mathbf{x} : M \longrightarrow \widetilde{M}$, n–boyutlu bir M manifoldundan m–boyutlu basit bağlantılı, tam belirsiz bir $\widetilde{M}$ uzay formuna izometrik bir daldırma olmak üzere, Obata anlamında Gauss tasviri, M manifoldunun bir p noktasını, $\mathbf{x}(p)$ noktasında $\mathbf{x}(M)$'ye teğet olan $\widetilde{M}$

manifoldunun bir n–boyutlu tümden jeodeziklerine götüren bir tasvirdir. $\widetilde{M} = \mathbb{S}^m$ olması durumunda, küresel Gauss tasviri olarak adlandırılan bu tasvir, M manifoldu üzerindeki bir p noktasını $\mathbb{S}^m$ küresinin $\mathbb{E}^{m+1}$ Euclid uzayının $(n+1)$–boyutlu lineer alt uzayları ile $\mathbb{S}^m$ küresinin kesişimi ile elde edilen n–boyutlu tümden jeodeziklerine götürür.

Euclid veya yarı–Euclid uzayının izometrik bir daldırmasına karşılık gelen Gauss tasviri, sıfırdan farklı λ sabiti ve C sabit vektörü için $\Delta\nu = \lambda(\nu + C)$ sağlıyorsa, ν Gauss tasviri 1–tipindendir. Ancak, zaman içinde helikoid, 3–boyutlu Minkowski uzayında B–scroll yüzeyi, genelleştirilmiş katenoid gibi bazı alt manifoldların Gauss tasvirlerinin yukarıda bahsedilen eşitliği bir f düzgün fonksiyonu için sağladığı gözlemlenmiştir. f düzgün bir tasvir ve C sabit vektör olmak üzere, ν Gauss tasviri $\Delta\nu = f(\nu + C)$ denklemini sağlıyorsa, ν tasvirine noktasal 1–tipinden Gauss tasviri denir. $C = 0$ ise, birinci çeşit noktasal 1–tipinden, aksi takdirde ikinci çeşit noktasal 1–tipinden Gauss tasviri şeklinde isimlendirilir.

Bu tez çalışması boyunca, yarı–Euclid uzayında bazı dönme matrisleri altında değişmez kalan dönel yüzeylerden Gauss tasviri noktasal 1–tipinden olanların ve yarı–küresel Gauss tasviri sonlu tipten olan yarı–kürenin yarı–Riemann alt manifoldlarının sınıflandırması ve karakterizasyonu yapılacaktır. Bu tezin içeriği ve elde edilen sonuçlar kısaca aşağıdaki şekilde verilebilir:

Birinci bölümde, tez çalışmasının konusu üzerine bir giriş yapılmış ve sonlu tipten teorisi ve noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip alt manifoldlar ile ilgili literatürde yer alan çalışmalardan bahsedilmiştir.

İkinci bölümde, tez çalışmasına temel oluşturacak kavramlardan ve teoremlerden bahsedilmiştir. Konu ile ilgili alt yapı bu bölümde yer almaktadır.

Üçüncü bölümde ise, yarı–Euclid uzayının bazı dönel yüzeylerinden bahsedilmiştir. Bu yüzey ailelerinden noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip olanlarla ilgili sınıflandırma ve karakterizasyon teoremleri elde edilmiştir. Bu bölüm üç alt bölümden oluşmaktadır. İlk olarak, $\mathbb{E}^4_1$ Minkowski uzayında profil eğrisi 2–boyutlu zamansal düzlem içinde kalan zamansal dönel yüzeyler üzerine çalışılmıştır. Bu dönel yüzeyler çift dönmeli dönel yüzey olarak isimlendirilmiştir. Çift dönmeli zamansal dönel yüzeylerden birinci çeşit veya ikinci çeşit noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip olanlar sınıflandırılmıştır. İkinci kısımda, $\mathbb{E}^4_1$ Minkowski uzayında iki boyutlu dönme eksenine sahip bazı özel dönmeler üzerinde çalışılmıştır. Eliptik, hiperbolik ve parabolik olmak üzere üç çeşit dönel yüzey incelenmiştir. Bu bölümde elde edilen sonuçlar yüzeyin uzaysal veya zamansal olmasına göre ayrılmıştır. Eliptik ve hiperbolik tipten düz uzaysal dönel yüzeylerden noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip olanlar sınıflandırılmıştır. Daha sonra, parabolik tipten düz uzaysal dönel yüzeylerden harmonik Gauss tasvirine sahip olanlar belirlenmiştir ve $\mathbb{E}^4_1$ Minkowski uzayında ikinci çeşit noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip, parabolik tipten düz uzaysal bir dönel yüzey olmadığı gösterilmiştir. Benzer şekilde, sınıflandırma ve karakterizasyon teoremleri eliptik, hiperbolik ve parabolik tipten düz zamansal dönel yüzeyler için elde edilmiştir. Ancak, $\mathbb{E}^4_1$ Minkowski uzayında parabolik tipten düz zamansal bir dönel yüzeyin noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip olamayacağı sonucu bulunmuştur.

Son olarak, profil eğrisi 2–boyutlu düzlem içinde kalan ve $\mathbb{E}^4_2$ yarı–Euclid uzayının bazı dönmeleri altında değişmez kalan dönel yüzeyler incelenmiştir. Bu dönel yüzeylerden sıfır ortalama eğriliğe sahip olanlar sınıflandırılıktan sonra, Gauss tasviri noktasal 1–tipinden olanlar üzerine çalışılmıştır. $\mathbb{E}^4_2$ uzayının bu şekilde tanımlanan dönel yüzeylerinden yarı–ombilik olanlar belirlenmiştir. Bu dönel yüzeylerden noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip olanlar sınıflandırılmıştır.

Dördüncü bölümde, yarı–kürenin sonlu tipten yarı–küresel Gauss tasvirine sahip yarı–Riemann alt manifoldları incelenmiştir. Bu bölüm üç alt bölümden oluşmaktadır.

İlk olarak, harmonik yarı–küresel Gauss tasvirine sahip yarı–kürenin yarı–Riemann alt manifoldları için karakterizasyon teoremi elde edilmiştir. Özel olarak, yarı–kürenin uzaysal ve Lorentziyen yüzeyleri için sınıflandırma yapılmıştır.

Daha sonra, yarı–kürenin 1–tipinden yarı–küresel Gauss tasvirine sahip yarı–Riemann alt manifoldları için sınıflandırma yapılmıştır. Bu sınıflandırma yarı–küresel Gauss tasvirinin spektral açılımının sıfırdan farklı sabit terimi içerip içermemesine göre incelenmiştir. $\mathbb{S}^{m-1}_s$ yarı–küresinin bir yarı–Riemann alt manifoldunun spektral açılımında sabit terimi sıfır olan 1–tipinden yarı–küresel Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul, bu yarı–Riemann alt manifoldunun skaler eğriliğinin sabit, normal konneksiyonun düz ve $\mathbb{S}^{m-1}_s$ yarı–küresi içinde ortalama eğrilik vektörünün sıfır olması gerektiği sonucuna ulaşılmıştır. Yarı–kürenin herhangi boyutlu ve indeksli bir yarı–Riemann alt manifoldu için yukarıda verilen karakterizasyon teoreminden sonra özel olarak, yarı–kürenin uzaysal ve Lorentziyen yüzeylerinden yarı–küresel Gauss tasviri 1–tipinden olanlar sınıflandırılmıştır. Spektral açılımında sıfırdan farklı sabit terim içeren 1–tipinden yarı–küresel Gauss tasvirine sahip yarı–Riemann alt manifoldları üzerine çalışılmıştır ve bu sınıflandırma yarı–Riemann alt manifoldunun ortalama eğrilik vektörünün karakterine göre iki ayrı teoremde ifade edilmiştir. Ayrıca, $\mathbb{S}^{n+1}_s$ yarı–küresinin tümden ombilik düz bir hiperyüzeyinin, yani, yarı–horohiperkürenin, biharmonik yarı–küresel Gauss tasvirine sahip olduğu gösterilmiştir.

Son kısımda, yarı–kürenin 2–tipinden yarı–küresel Gauss tasvirine sahip olan yarı–Riemann alt manifoldları incelenmiştir. İlk olarak, $\mathbb{S}^4_s$ yarı–küresi içinde ortalama eğrilik vektörü sıfır olan bir yüzey için yarı–küresel Gauss tasvirinin ikinci Laplasiyen ifadesi hesaplanmıştır. $\mathbb{S}^4_2$ yarı–küresi içinde sıfır ortalama eğrilik vektörüne sahip, yönlendirilmiş Lorentziyen bir yüzeyin 2–tipinden yarı–küresel Gauss tasvirine sahip olabilmesi için gerek ve yeter koşulun bu yüzeyin Gauss eğriliğinin $K = \frac{1}{3}$ ve normal eğriliğinin $|K^D| = \frac{2}{3}$ olması gerektiği ispatlanmıştır. Bu ifadeye örnek olarak, Lorentziyen Veronese yüzeyi verilmiştir. $\mathbb{S}^4$ küresi içinde 2–tipinden küresel Gauss tasvirine sahip yegane yüzey Veronese yüzeyi iken, $\mathbb{S}^4_2$ yarı–küresi içinde Lorentziyen Veronese yüzeyinden başka 2–tipinden yarı–küresel Gauss tasvirine sahip yüzey ailelerinin var olduğu sonucu elde edilmiştir. Daha sonra yarı–Riemann manifoldlarının yarı–Riemann hiperyüzeyleri üzerine çalışılmıştır. Köşegenleştirilebilen şekil operatörüne sahip, yani, has yarı–Riemann hipeyüzeylerin 2–tipinden yarı–küresel Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul elde edilmiştir. $\mathbb{S}^3_1$ de Sitter uzayının has yüzeylerinden 2–tipinden yarı–küresel Gauss tasvirine sahip olanlar sınıflandırılmıştır. Lorentziyen yüzeylerin şekil operatörlerinin köşegenleşmek zorunda olmaması, Riemann'da karşılığı olmayan, örneğin B–scroll ve kompleks çemberler gibi, bazı yüzey ailelerinin ortaya çıkmasına yol açmıştır. Bu çalışmada ise, $\mathbb{S}^3_1$ de Sitter uzayı içindeki B–scroll yüzeyinin yarı–küresel Gauss tasviri sıfırlı 2–tipinden olduğu gösterilmiştir.

FINITE TYPE SUBMANIFOLDS AND GAUSS MAPS

SUMMARY

In the late 1970's, the theory of finite type submanifolds in Euclidean space was initiated by B.-Y. Chen. Later, the notion of finite type was extended to differentiable maps on Riemannian manifolds, especially, to Gauss maps of Euclidean submanifolds. Since then, many geometers have obtained substantial results about characterizing or classifying the submanifolds of Euclidean space or pseudo–Euclidean space in terms of finite type. The generalization to more general maps attracted the interest of people working in analysis to finite type theory, and it is now considered an active research field with several open problems.

A smooth map from a Riemannian manifold into a Euclidean space is said to be *of finite type* if it is a finite sum of k vector valued eigenfunctions of the Laplacian operator. Otherwise, it is *of infinite type*. If all of the corresponding k eigenvalues are mutually distinct, then it is said to be *of k–type*.

Let $\mathbf{x} : M \longrightarrow \mathbb{E}^m$ be an isometric immersion of an oriented n–dimensional Riemannian manifold M into a Euclidean space $\mathbb{E}^m$. Let $G(n,m)$ denote the Grassmannian manifold consisting of all oriented n–planes through the origin of $\mathbb{E}^m$. The classical Gauss map $\nu : M \longrightarrow G(n,m)$ is a smooth map which carries each point $p \in M$ to the oriented n–plane in $\mathbb{E}^m$ obtained by parallel translation of the tangent space to $\mathbf{x}(M)$ at $\mathbf{x}(p)$ in $\mathbb{E}^m$ to the origin. Note that since $G(n,m)$ is canonically embedded into a Euclidean space $\mathbb{E}^N$, where $N = \binom{m}{n}$, the notion of finite type map can be defined for the classical Gauss map. The classical Gauss map associated with a pseudo–Riemannian submanifold of a pseudo–Euclidean space can be given in a similar way.

An isometric immersion of a Riemannian manifold into a sphere can be also viewed as an isometric immersion into a Euclidean space, and thus the Gauss map associated with such an immersion can be given in the classical sense. However, for the Gauss map to reflect the properties of the immersion into a sphere, instead of the Euclidean space, M. Obata modified the definition of Gauss map appropriately as follows:

Let $\mathbf{x} : M \longrightarrow \widetilde{M}$ be an isometric immersion from an n–dimensional manifold M into an m–dimensional simply connected complete space $\widetilde{M}$ of constant curvature. The generalized Gauss map in Obata's sense carries each $p \in M$ into the totally geodesic n–space tangent to $\mathbf{x}(M)$ at $\mathbf{x}(p)$. In the case $\widetilde{M} = \mathbb{S}^m$, the map, called *spherical Gauss map*, assigns to each $p \in M$ a totally geodesic n–sphere of $\mathbb{S}^m$ which is uniquely determined by the intersection of a linear $(n+1)$–dimensional subspace of $\mathbb{E}^{m+1}$ and $\mathbb{S}^m$.

The Gauss map ν of a submanifold of Euclidean space or pseudo–Euclidean space is said to be of (global) 1–type if it satisfies $\Delta\nu = \lambda(\nu + C)$ for a non–zero constant λ and a constant vector C, where Δ denotes the Laplace operator. In time, it has

been observed that there are some geometrically important submanifolds, such as helicoids, B–scrolls in a 3-dimensional Minkowski space $\mathbb{E}^3_1$, generalized catenoids, spherical n–cones and Enneper's hypersurfaces in $\mathbb{E}^{n+1}$ whose Gauss map ν satisfies $\Delta\nu = f(\nu + C)$ for some smooth functions f on the submanifold and some constant vectors C. A submanifold of a Euclidean space or a pseudo Euclidean space is said to have pointwise 1–type Gauss map if its Gauss map satisfies that equation for some smooth function f on the submanifold and for some constant vector C. In particular, if C is zero, it is said to be the first kind. Otherwise, it is said to be of the second kind.

In this thesis, there are two main problems which are studied. One of them is related to different types of rotational surfaces in the pseudo–Euclidan space with pointwise 1–type Gauss map and the other one is pseudo–spherical submanifolds with finite type pseudo–spherical Gauss map. A short overview of the results obtained in this thesis is given as follows.

In the first chapter, main topics of thesis are discussed briefly and a review of literature about finite type theory and submanifolds with pointwise 1–type Gauss map is mentioned.

In the second chapter, a short survey of all the theory that will be needed in the following chapters is given.

The aim of the third chapter is to obtain some classification and characterization theorems of some special classes of rotational surfaces in the pseudo–Euclidean space with pointwise 1–type Gauss map of the first kind and the second kind. The scheme of problems in the third chapter is as following:

First, timelike rotational surface in the Minkowski 4–space with profile curve lying in 2–dimensional timelike plane, which is called double rotational surface, is studied. All such surfaces with pointwise 1–type Gauss map of the first kind are classified and then timelike double rotational surfaces with pointwise 1–type Gauss map of the second kind are focused. Then, it is proved that there exists no non–planar timelike rotational surface with flat normal bundle and pointwise 1–type Gauss map of the second kind.

Secondly, a different class of rotational surfaces in Minkowski space $\mathbb{E}^4_1$ with 2–dimensional axis is considered. There are three types of rotational surfaces with 2–dimensional axis, called rotational surfaces of elliptic, hyperbolic or parabolic type which are invariant under spacelike rotation, hyperbolic rotation and screw rotation, respectively. All flat spacelike rotational surfaces of elliptic and hyperbolic types with pointwise 1–type Gauss map of the first and second kind are determined. Then, flat spacelike rotational surfaces of parabolic type with harmonic Gauss map are characterized. Also, it is shown that there exists no flat spacelike rotational surface of parabolic type in $\mathbb{E}^4_1$ with pointwise 1–type Gauss map of the second kind. Similarly, the classification and characterization of flat timelike rotational surfaces of elliptic, hyperbolic and parabolic types in Minkowski space with 2–dimensional axis and having pointwise 1–type Gauss map are done. Also, it is shown that there exists no flat timelike rotational surface of parabolic type in $\mathbb{E}^4_1$ with pointwise 1-type Gauss map.

Finally, some special classes of non–planar rotational surfaces in the pseudo–Euclidean space $\mathbb{E}^4_2$ with profile curves lying in 2–planes are considered. The differential equation that characterizes such rotational surfaces in $\mathbb{E}^4_2$ with zero mean curvature is solved and examples of maximal surfaces and Lorentz surfaces with zero mean curvature in $\mathbb{E}^4_2$ are given. Then, such rotational surfaces in the pseudo–Euclidean space $\mathbb{E}^4_2$ with zero mean curvature vector and having pointwise 1–type Gauss map of the second kind are obtained. Furthermore, all such pseudo–umbilical rotational surfaces in the pseudo–Euclidean $\mathbb{E}^4_2$ are determined, and they are examined in terms of having pointwise 1–type Gauss map.

In the fourth chapter, pseudo–spherical submanifolds with finite type pseudo–spherical Gauss map which is obtained from Obata's map for pseudo–spherical immersions are studied. The scheme of problems in the fourth chapter is as following:

First of all, the pseudo–Riemannian submanifolds in the pseudo–sphere with harmonic pseudo–spherical Gauss map are considered. Then, Riemannian and Lorentzian surfaces of arbitrary codimension in a pseudo–sphere whose pseudo–spherical Gauss map is harmonic are completely classified. In some cases, a global classification is obtained, while in the other cases the surfaces are described by an explicit system of partial differential equations.

Secondly, the characterization of pseudo–Riemannian submanifolds in the pseudo–sphere $\mathbb{S}^{m-1}_s \subset \mathbb{E}^m_s$ with 1–type pseudo–spherical Gauss map is obtained. This is divided into two cases depending on whether the spectral decomposition of the pseudo–spherical Gauss map contains a non–zero constant component or not. It is proven that a pseudo–Riemannian submanifold of $\mathbb{S}^{m-1}_s \subset \mathbb{E}^m_s$ has 1–type pseudo–spherical Gauss map with zero constant component in its spectral decomposition if and only if it has zero mean curvature vector in $\mathbb{S}^{m-1}_s \subset \mathbb{E}^m_s$, constant scalar curvature and flat normal connection. Also, a complete classification for spacelike surfaces and Lorentzian surfaces in the pseudo–sphere $\mathbb{S}^{m-1}_s \subset \mathbb{E}^m_s$ is determined. Then, the pseudo–Riemannian submanifolds of a pseudo–sphere with 1–type pseudo–spherical Gauss map having a non–zero constant component in its spectral decomposition are considered. According to the casual character of the mean curvature, two different classification theorems are obtained. Moreover, it is showed that an n–dimensional pseudo horosphere in $\mathbb{S}^{n+1}_s \subset \mathbb{E}^{n+2}_s$, that is, a flat and totally umbilical hypersphere of $\mathbb{S}^{n+1}_s$, has biharmonic pseudo–spherical Gauss map.

Finally, pseudo–Riemannian submanifolds in a pseudo–sphere with 2–type pseudo–spherical Gauss map are considered. It is shown that a Lorentzian surface in a pseudo–sphere $\mathbb{S}^4_2 \subset \mathbb{E}^5_2$ with zero mean curvature vector in $\mathbb{S}^4_2$ has 2–type pseudo–spherical Gauss map if and only if it has Gaussian curvature $K = \frac{1}{3}$ and normal curvature K^D with $|K^D| = \frac{2}{3}$. As an example for above statement, Lorentzian Veronese surface is mentioned and the geometric quantities of this surface are given. It is known that Veronese surface in $\mathbb{S}^4$ is the only minimal surface with 2–type spherical Gauss map. However, there are surfaces in $\mathbb{S}^4_2 \subset \mathbb{E}^5_2$ with 2–type pseudo–spherical Gauss map apart from Lorentzian Veronese surface. Moreover, pseudo–Riemann hypersurfaces in a pseudo–sphere are studied. The necessary and sufficient condition having 2–type pseudo–spherical Gauss map for pseudo–Riemannian hypersurfaces with a diagonalizable shape operator, which is called proper hypersurfaces, is obtained. That is, a non–totally umbilical proper hypersurface in a pseudo–sphere $\mathbb{S}^{n+1}_s \subset \mathbb{E}^{n+2}_s$ with non–zero constant mean curvature has 2–type pseudo–spherical Gauss map if and only if it has constant scalar curvature. In particular, a classification of proper surfaces in the de Sitter space $\mathbb{S}^3_1 \subset \mathbb{E}^4_1$ with 2–type pseudo–spherical Gauss map is given. It is well–known that the shape operator of a pseudo–Riemannian surface does not need to be diagonalizable. Because of this fact, there are significant differences between Riemannian and pseudo–Riemannian cases. There are some families of surfaces in the pseudo–Riemannian manifolds which have no Riemannian counterparts such as the B–scrolls and the complex circles. Then, Lorentzian surfaces in the de Sitter space $\mathbb{S}^3_1 \subset \mathbb{E}^4_1$ with non–diagonalizable shape operator are examined. It is given that the B–scroll over a null curve in $\mathbb{S}^3_1 \subset \mathbb{E}^4_1$ has null 2–type pseudo–spherical Gauss map. As a consequence, it is proved that a Lorentzian surface in $\mathbb{S}^3_1$ with non–zero constant mean curvature and a non–diagonalizable shape operator at any point has null 2–type pseudo–spherical Gauss map if and only if it is an open part of a non–flat B–scroll over a null curve.

1. GİRİŞ

Euclid uzayında sonlu tipten alt manifold kavramı 1970'li yılların sonlarına doğru B.-Y. Chen tarafından ortaya atılmıştır. Bu kavramın tanımlanma amacı ilk olarak, Euclid uzayının kompakt alt manifoldlarının toplam ortalama eğriliklerine olabilecek en iyi tahmini yapabilmek ve Euclid uzaylarının alt manifoldları için derece kavramını tanımlayabilmek olsa da zamanla farklı amaçlar için aktif olarak çalışılan bir konu haline gelmiştir. Literatürde bu konu ile ilgili yapılmış birçok çalışma ve halen cevap bulamamış sorular bulunmaktadır. Ayrıca, sonlu tipten kavramı alt manifoldlar teorisinin araçlarının spektral geometride kullanılması fırsatı sunması açısından da önemli bir çalışma alanıdır. [1] numara ile verilen B.-Y. Chen'nin 1984 yılında basılmış bu konu ile ilgili temel kavramları ve teoremleri içeren bir kitabı bulunmaktadır ve bu kitabın [2] numara ile verilen genişletilmiş ikinci baskısı 2015 yılında yayınlanmıştır. Bunun dışında, konunun gelişimini ve son durumunu anlayabilmek için faydalı olacak B.-Y. Chen tarafından derlenmiş, sonlu tipten kavramı üzerine [3, 4] numaraları ile verilen başka çalışmalar da bulunmaktadır.

1986 yılında ise, sonlu tipten manifoldlar kavramı B.-Y. Chen, J. M. Morvan ve T. Nore tarafından Euclid uzayının alt manifoldları üzerinde tanımlı düzgün tasvirlere genişletilmiştir ve [5] numara ile verilen bu çalışmada, sonlu tipten Gauss tasvirine sahip alt manifoldlar için bazı topolojik sonuçlar elde edilmiştir.

Euclid uzayındaki sonlu tipten manifold ve tasvir tanımı aşağıdaki şekilde verilir: $\phi : M \longrightarrow \mathbb{E}^m$ kompakt bir M Riemann manifoldundan $\mathbb{E}^m$ Euclid uzayına düzgün bir tasvir olmak üzere, ϕ tasviri Laplace operatörünün özvektörlerinin sonlu toplamı şeklinde yazılabiliyorsa, ϕ düzgün tasvirine *sonlu tipten tasvir* denir. Yani, ϕ tasviri

$$\phi = \phi_0 + \phi_1 + \cdots + \phi_k, \quad \Delta\phi_i = \lambda_i\phi_i, \; i = 1, \ldots, k$$

sonlu spektral açılımına sahiptir. Burada, ϕ_0, $\mathbb{E}^m$ Euclid uzayında sabit bir vektör ve ϕ_i'ler $\mathbb{E}^m$–değerli sabit olmayan tasvirlerdir. ϕ_i özvektörlerine karşılık gelen λ_i'ler ayrık ve k tane ise ϕ tasvirine *k–tipinden tasvir* denir. Ayrıca, ϕ tasviri izometrik bir daldırma ise, M manifolduna $\mathbb{E}^m$ Euclid uzayının *sonlu tipten alt manifoldu* denir.

Bu tanım kompakt Riemann manifoldlar için verilmiştir ve kompaktlık önemli bir koşuldur. Çünkü, kompakt olmayan bir manifold üzerinde Laplasiyeni sıfır olan tasvirler her zaman sabit bir tasvir olmak zorunda değildir. Bu nedenle, [3] numaralı çalışmada, B.-Y. Chen sonlu tipten kavramını kompakt olmayan manifoldlar için de benzer şekilde tanımlamıştır.

Sonlu tipten alt manifold ve tasvir tanımı, yarı–Riemann alt manifoldları içinde [6, 7] numaralı çalışmalarda benzer şekilde tanımlanmış ve sonuçlar elde edilmiştir.

Sonlu tipten kavramı diferansiyellenebilir tasvirler için verildikten sonra, en çok alt manifoldlar üzerinde önemli bir tasvir olan Gauss tasviri üzerine çalışılmıştır. Sonlu tipten Gauss tasvirine sahip alt manifoldlarla ilgili birçok çalışma yapılmıştır ve sonuçlar elde edilmiştir. Bunlardan bazıları [8–11] ile verilmiştir.

Euclid uzayının izometrik bir daldırmasına karşılık gelen Gauss tasvirinin tanımı aşağıdaki şekilde verilir:

$\mathbf{x} : M \longrightarrow \mathbb{E}^m$, yönlendirilmiş bir M Riemann manifoldundan $\mathbb{E}^m$ Euclid uzayına izometrik bir daldırma olsun. Bu durumda, bu izometrik daldırmaya karşılık gelen *klasik Gauss tasviri*, M manifoldunun her p noktasını, manifoldun o noktadaki teğet uzayının $\mathbb{E}^m$ Euclid uzayının orijinine taşınmasıyla elde edilen n–boyutlu düzleme götüren tasvirdir. Klasik Gauss tasviri, manifoldun teğet uzayı yardımıyla tanımlanabileceği gibi, normal uzayı yardımı ile de tanımlanabilir. [12] numara ile verilen çalışmada, Y. H. Kim ve D. W. Yoon tarafından, klasik Gauss tasviri $\mathbb{E}^m_s$ yarı–Euclid uzayının izometrik daldırmaları için de verilmiştir.

Küre içinde daldırılmış bir Riemann manifoldu aynı zamanda Euclid uzayının bir izometrik daldırması gibi düşünülebilir. Bu durumda, bu küresel daldırmaya karşılık gelen klasik Gauss tasviri yukarıda tanımlanan klasik Gauss tasvirinden farklı değildir. Ancak, bu tasvir kürenin özelliklerini yansıtmak yerine, Euclid uzayının özelliklerini yansıtmaktadır. Bundan dolayı, [13] numaralı çalışmada, M. Obata, Gauss tasvirinin tanımını aşağıdaki şekilde değiştirmiştir.

$\mathbf{x} : M \longrightarrow \widetilde{M}$, yönlendirilmiş bir M Riemann manifoldundan bir $\widetilde{M}$ sabit eğrilikli, basit bağlantılı ve tam uzayına izometrik bir daldırma olmak üzere, *Obata tasviri* M manifoldunun her p noktasını, $\mathbf{x}(p)$ noktasında, $\mathbf{x}(M)$ manifolduna teğet olan $\widetilde{M}$ uzayının tümden jeodezik alt uzayına götüren bir tasvirdir. $\widetilde{M} = \mathbb{S}^m$ veya $\widetilde{M} = \mathbb{H}^m$

olması durumunda, Obata tasviri, sırasıyla, *küresel Gauss tasviri* veya *hiperbolik Gauss tasviri* olarak isimlendirilir.

[14] numaralı çalışmada C. S. Houh ve [15] numaralı çalışmada ise T. Ishihara, yarı–Riemann manifoldlarının yarı–Riemann alt manifoldlarının Gauss tasviri üzerine çalışmışlardır. Obata tasviri ile bu çalışmalarda verilen tasvirler birbiriyle uyuşmaktadır.

Klasik Gauss tasviri ile küresel Gauss tasvirinin geometrik davranışları birbirinden farklıdır. Örneğin, Euclid uzayının kompakt alt manifoldlarının klasik Gauss tasvirleri her zaman kütlesel simetrik iken, kürenin kompakt alt manifoldlarının küresel Gauss tasvirleri her zaman kütlesel simetrik olmak zorunda değildir.

Kütlesel simetrik bir tasvirin tanımı ise aşağıdaki şekilde verilir:

$\phi : M \longrightarrow \mathbb{S}^{m-1} \subset \mathbb{E}^m$ düzgün tasvirinin spektral açılımındaki sabit terimi, $\mathbb{S}^{m-1}$ küresinin $\mathbb{E}^m$ Euclid uzayındaki merkezi ile çakışıyorsa, ϕ tasvirine *kütlesel simetrik tasvir* denir.

[11] numaralı çalışmada, B.-Y. Chen ve P. Piccinni 1–tipinden klasik Gauss tasvirine sahip alt manifoldlar ile ilgili sınıflandırma ve karakterizyon teoremleri vermişlerdir ve $\mathbb{S}^{m-1}$ küresi içinde, kütlesel simetrik 2–tipinden küresel Gauss tasvirine sahip yegane yüzeyin Veronese yüzeyi olduğunu göstermişlerdir. Daha sonra, [16] numaralı çalışmada, B.-Y. Chen ve H.S. Lue tarafından sonlu tipten küresel Gauss tasvirine sahip alt manifoldları çalışılmışlardır. Bunların dışında, B. Bektaş ve U. Dursun, $\mathbb{S}^{m-1}$ küresi içinde kütlesel simetrik olmayan 1–tipinden küresel Gauss tasvirine sahip alt manifoldlarla ilgili sınıflandırma yapmışlardır ve $\mathbb{S}^{m-1}$ küresinin hiperyüzeylerinden küresel Gauss tasviri 2–tipinden olanları çalışmışlardır. Bunun ile ilgili çalışma [17] ile verilmiştir.

Euclid uzayının kompakt bir M alt manifoldu üzerinde, ν klasik Gauss tasvirinin 1–tipinden olması için gerek ve yeter koşul, ν tasvirinin $\Delta\nu = \lambda(\nu + C)$ denklemini sıfırdan farklı bir λ sabiti ve C sabit vektörü için sağlamasıdır. Zaman içinde yapılan çalışmalarla bazı manifoldların Gauss tasvirlerinin bu eşitliği bir λ sabiti için değil, bir düzgün f fonksiyonu için sağladığı gözlemlenmiştir. Örnek olarak, $\mathbb{E}^3$ Euclid uzayındaki Enneper yüzeyinin eşleniği, B–scrollar veya $\mathbb{E}^{n+1}_1$ Minkowski uzayının bazı hiperyüzeyleri verilebilir. Bu durumda, noktasal 1–tipinden Gauss tasviri denilen kavramın ortaya çıkmasına neden olmuştur.

$\mathbb{E}^m$ Euclid uzayının bir M alt manifoldunun ν klasik Gauss tasviri, bir f düzgün fonksiyonu ve C sabit vektörü için $\Delta\nu = f(\nu + C)$ denklemini sağlıyorsa, bu tasvire *noktasal 1–tipinden Gauss tasviri* denir. $C = 0$ ise, ν tasviri *birinci çeşit noktasal 1–tipinden* aksi durumda ise, *ikinci çeşit noktasal 1–tipinden* olarak isimlendirilir. Bu tanım, yarı–Euclid uzayının alt manifoldları üzerinde tanımlanan klasik Gauss tasviri için de geçerlidir.

Noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip alt manifoldlarla ilgili birçok çalışma bulunmaktadır. Bunlardan bazıları [18–20] ile verilmiştir. [21–25] numaralı çalışmalarda Euclid ve yarı–Euclid uzayında noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip dönel yüzeyler ve hiperyüzeylerle ilgili sonuçlar bulunmaktadır.

Bu tez çalışmasında, temel olarak iki problem üzerine çalışılmış ve sonuçlar elde edilmiştir. Bunlardan birincisi, yarı–Euclid uzayında noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip olan dönel yüzeylerin sınıflandırılması ve karakterizasyonunun yapılması ile ilgilidir. İkinci problem ise, yarı–kürenin yarı–Riemann alt manifoldlarından sonlu tipten yarı–küresel Gauss tasvirine sahip olanların incelenmesidir. Tez çalışması, beş bölümden oluşmaktadır ve bölümlerin içerikleri aşağıdaki şekilde planlanmıştır.

Birinci bölümde, tez çalışmasında ele alınan konularla ilgili kısa bir literatür taraması verilmiştir.

İkinci bölümde, bu çalışma boyunca kullanılacak olan alt manifoldlar teorisi ile ilgili temel tanımlar ve denklemlerden bahsedilmiştir. Ayrıca, sonlu tipten kavramı, klasik Gauss tasviri ve küresel Gauss tasviri ile ilgili detaylar verilmiştir. Obata tasviri kullanılarak, yarı–küresel daldırmaya karşılık gelen yarı–küresel Gauss tasvirinden bahsedilmiştir.

Üçüncü bölümde, yarı–Euclid uzayındaki dönel yüzeylerden noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip olanlar üzerine çalışılmıştır. Bu bölüm üç alt bölümden oluşmaktadır.

İlk olarak, $\mathbb{E}^4_1$ Minkowski uzayında profil eğrisi iki boyutlu zamansal düzlem içinde kalan, çift dönmeli zamansal dönel yüzeylerden birinci çeşit veya ikinci çeşit noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip olanlar sınıflandırılmıştır.

Daha sonra, $\mathbb{E}_1^4$ uzayında eliptik, hiperbolik ve parabolik tipten dönel yüzeylerin tanımı verilmiş ve eliptik, hiperbolik ve parabolik tipten düz dönel yüzeylerden noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip olanlar belirlenmiştir. Bu bölümdeki elde edilen sonuçlar dönel yüzeyin uzaysal veya zamansal olmasına göre ayrılmıştır.

En son olarak, $\mathbb{E}_2^4$ yarı–Euclid uzayında belirli dönme grupları ele alınmış ve profil eğrisi iki boyutlu düzlem içinde kalan bu dönme matrisleri altında değişmez kalan dönel yüzey ailesi üzerine çalışılmıştır. İlk olarak, bu dönel yüzeylerden sıfır ortalama eğrilikli olanlar, daha sonra yarı–ombilik olanlar sınıflandırılmıştır. Ayrıca, bu dönel yüzeylerden Gauss tasviri birinci çeşit veya ikinci çeşit noktasal 1–tipinden olanlar incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, sonlu tipten yarı–küresel Gauss tasvirine sahip yarı–küre içindeki yarı–Riemann alt manifoldları incelenmiştir. Bu bölüm üç alt bölümden oluşmaktadır.

İlk olarak, yarı–küresel Gauss tasviri harmonik olan yarı–kürenin yarı–Riemann alt manifoldları için karakterizasyon teoremi elde edilmiştir. İkinci olarak, yarı–küresel Gauss tasvirinin spektral açılımda sabit terimin sıfır veya sıfırdan farklı olup olmamasına göre 1–tipinden yarı–küresel Gauss tasvirine sahip yarı–kürenin yarı–Riemann alt manifoldları ile ilgili sınıflandırma ve karakterizasyon teoremleri elde edilmiştir. Son olarak, yarı–küresel Gauss tasviri 2–tipinden olan yarı–Riemann alt manifoldları incelenmiştir. Bu problem kapsamında ise, indeksi 1 ve 2 olan 4–boyutlu yarı küre içindeki uzaysal ve Lorentziyen yüzeylerden 2–tipinden yarı–küresel Gauss tasvirine sahip olanlar için karakterizasyon ve sınıflandırma teoremleri elde edilmiştir. Ayrıca, karşıt boyutun 1 olması, yani, hiperyüzey durumu üzerine de çalışılmıştır. Yarı–Riemann hiperyüzeyleri için elde edilen sonuçlar şekil operatörünün köşegenleşip köşegenleşmemesine göre ayrı ayrı incelenmiştir.

Son bölüm ise, bu tez çalışmasında ele alınan problemlerle ilgili sonuç ve öneriler kısmına ayrılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tez çalışması boyunca kullanılacak olan temel kavramlardan ve teoremlerden bahsedilecektir. Bu bölüm oluşturulurken [26], [27] ve [28] numaraları ile verilen kitaplardan yararlanılmıştır.

2.1 Yarı–Riemann Manifoldu

Yarı–Riemann manifoldunun tanımı verilmeden önce diferansiyellenebilir bir manifoldun tanımı verilecektir.

Tanım 2.1. *M bir Hausdorf uzayı olmak üzere, M üzerindeki $(U_i,\phi_i)_{i\in\Lambda}$ açık haritalar topluluğu aşağıdaki şartları sağlıyorsa, bu haritalar topluluğuna M üzerinde n–boyutlu bir diferansiyellenebilir yapı denir:*

i. Örtü aksiyomu: $M = \cup_{i\in\Lambda} U_i$,

ii. Haritaların uyumluluk aksiyomu:
Her $i,j \in \Lambda$ için $\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$ tasviri diferansiyellenebilirdir,

iii. $(U_i,\phi_i)_{i\in\Lambda}$ topluluğu i. ve ii. şartlarını sağlayan açık haritaların en büyüğüdür.

Burada, $\phi_i(U_i)$, $\mathbb{R}^n$'nin açık bir alt kümesidir.

$(U_i,\phi_i)_{i\in\Lambda}$ açık haritalar topluluğu yukarıdaki tanımda verilen i. ve ii. şartlarını sağlıyorsa $(U_i,\phi_i)_{i\in\Lambda}$'ye M uzayının bir *atlası* denir

Bu durumda, n–boyutlu diferansiyellenebilir bir yapıya sahip M Hausdorf uzayına *n–boyutlu diferansiyellenebilir manifold veya C^∞–manifold* denir.

Tanım 2.2. *V reel vektör uzayı üzerinde simetrik bir $\mathbb{R}$–lineer B formuna simetrik bilineer form denir. Yani, $\forall a,b \in \mathbb{R}$ ve $\forall u,v,w \in V$ için*

$$B : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü

i. $B(u,v) = B(v,u)$,

ii. $B(au+bv,w) = aB(u,w)+bB(v,w)$,
$B(u,av+bw) = aB(u,v)+bB(u,w)$

özelliklerine sahiptir.

Tanım 2.3. *V reel vektör uzayı üzerinde B simetrik bilineer formuna*

i. $\forall v \in V$ *ve* $v \neq 0$ *için* $B(v,v) > 0$ *ise pozitif tanımlı,*

ii. $\forall v \in V$ *ve* $v \neq 0$ *için* $B(v,v) < 0$ *ise negatif tanımlı,*

iii. $\forall v \in V$ *ve* $v \neq 0$ *için* $B(v,v) \geq 0$ *ise pozitif yarı tanımlı,*

iv. $\forall v \in V$ *ve* $v \neq 0$ *için* $B(v,v) \leq 0$ *ise negatif yarı tanımlı,*

v. $\forall w \in V$ *için* $B(v,w) = 0$ *iken* $v = 0$ *ise dejenere olmayan, aksi durumda dejenere bilineer form denir.*

Tanım 2.4. *B, V reel vektör uzayı üzerinde simetrik bilineer bir form olsun. $B|_W$ negatif tanımlı olduğu en geniş $W \subset V$ alt uzayının boyutuna B simetrik bilineer formunun V vektör uzayı üzerindeki indeksi denir.*

Tanım 2.5. *V reel bir vektör uzayı olmak üzere, V üzerinde tanımlı dejenere olmayan bir simetrik bilineer forma, V reel vektör uzayı üzerinde bir skaler çarpım denir. Ayrıca, V üzerinde pozitif tanımlı bir skaler çarpıma iç çarpım denir. V vektör uzayı üzerinde g skaler bir çarpım ise, (V,g) ikilisine skaler çarpımlı vektör uzayı denir.*

Tanım 2.6. *$(V,\ g)$ reel vektör uzayı üzerinde ortonormal baz vektörleri için*

$$g(e_i,e_j) = \varepsilon_i\delta_{ij}\ ,\ g(e_i,e_i) = \varepsilon_i = \pm 1$$

sağlanır ve $\forall v \in V$ *vektörü*

$$v = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i g(v,e_i)e_i \tag{2.1}$$

şeklinde tek türlü yazılabilir. Burada,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Kronecker deltasını göstermektedir.

$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, n–boyutlu skaler çarpımlı V uzayının ortonormal bir bazı olmak üzere, bu vektörlerin işaretleri $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$'den negatif olanlarının sayısı V uzayının indeksini göstermektedir.

Tanım 2.7. *$T_p(M)$, M manifoldunun bir p noktasındaki teğet uzayı olmak üzere,*

$$\begin{aligned} g : T_pM \times T_pM &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X_p, Y_p) &\longrightarrow g(X_p, Y_p) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı sabit t indeksli, dejenere olmayan ve simetrik (0,2) tipindeki bir g tensörüne M manifoldu üzerinde bir metrik tensör denir. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ile de gösterilir, yani, $g(X_p, Y_p) = \langle X_p, Y_p \rangle$ dır.

(M, g) çiftine ise, *yarı–Riemann manifoldu* denir. g metrik tensörünün t indeksine yarı–Riemann manifoldunun indeksi denir ve t indeksli yarı–Riemann manifoldu M_t ile gösterilir. $0 \leq t < \dim(M)$ olur. Özel olarak, indeksin sıfır olması durumunda M manifoldu bir *Riemann manifoldu* olarak, indeksin bir olması durumunda ise M_1 manifoldu *Lorentz manifoldu* olarak isimlendirilir.

Tanım 2.8. *v, M yarı–Riemann manifolduna teğet bir vektör olsun. Bu durumda,*

i. $g(v, v) > 0$ *ve* $v = 0$ *ise v vektörü uzaysal,*

ii. $g(v, v) < 0$ *ise v vektörü zamansal,*

iii. $v \neq 0$ *olmak üzere* $g(v, v) = 0$ *ise v vektörü ışıksal*

olarak isimlendirilir.

M yarı–Riemann manifoldu üzerinde bir α eğrisinin karakteri α' teğet vektörünün karakterine bağlıdır. Yani, α' uzaysal ise eğri uzaysal, zamansal ise eğri zamansal ve ışıksal ise α eğrisi ışıksal bir eğridir.

Tanım 2.9. *$f, g \in C^\infty(M)$ and $X, Y, Z \in \chi(M)$ olmak üzere,*

$$\begin{aligned} \nabla : \chi(M) \times \chi(M) &\longrightarrow \chi(M) \\ (X, Y) &\longrightarrow \nabla_X Y \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan ve

i. $\nabla_X(Y+Z)=\nabla_X Y+\nabla_X Z$,

ii. $\nabla_{(fX+gY)}Z=f\nabla_X Z+g\nabla_Y Z$,

iii. $\nabla_X(fY)=X(f)Y+f\nabla_X Y$

şartlarını sağlayan ∇ *fonksiyonuna* M *manifoldu üzerinde afin konneksiyon ve* $\nabla_X Y$ *ifadesine de,* Y *vektör alanının* X*'e göre kovaryant türevi denir.*

Tanım 2.10. $X,Y\in\chi(M)$ *olmak üzere, Lie parantezi*

$$\begin{aligned}[\cdot,\cdot]:\ \chi(M)\times\chi(M) &\longrightarrow \chi(M)\\ (X,Y) &\longrightarrow [X,Y]=XY-YX\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan bir tasvirdir.

Burulma tensörü T, $(1,2)$ tipinde bir tensördür ve $T(X,Y)=\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y]$ şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.1. *Bir M yarı–Riemann manifoldu üzerinde aşağıdaki şartları sağlayan tek türlü* ∇ *konneksiyonu vardır:*

i. *g metriği ile uyumludur, yani,*

$$X(g(Y,Z))=g(\nabla_X Y,Z)+g(Y,\nabla_X Z),$$

ii. *Burulmasızdır, yani,* $T(X,Y)=0$ *veya* $\nabla_X Y-\nabla_Y X=[X,Y]$.

Bu durumda, ∇ *konneksiyonu M manifoldu üzerinde Levi–Civita konneksiyonu olarak adlandırılır ve*

$$2g(\nabla_Y Z,X)=Yg(Z,X)+Zg(X,Y)-Xg(Y,Z)-g(Y,[Z,X])+g(Z,[X,Y])+g(X,[Y,Z])$$

Kozsul formülü ile karakterize edilir.

Tanım 2.11. *M bir yarı–Riemann manifoldu ve* ∇ *Levi–Civita konneksiyonu olmak üzere,*

$$\begin{aligned}R:\chi(M)\times\chi(M)\times\chi(M) &\longrightarrow \chi(M)\\ (X,Y,Z) &\longrightarrow R(X,Y)Z=\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $(1,3)$ *tipinde tensöre Riemann eğrilik tensörü denir. Ayrıca,* $R(X,Y;Z,W)=g(R(X,Y)Z,W)$ *ile gösterilir.*

M manifoldunun bir p noktasındaki teğet uzayı $T_p(M)$'nin 2–boyutlu bir lineer alt uzayına *düzlemsel bir kesit* denir. $\{X,Y\}$ bu düzlemsel kesitin bazları olmak üzere,

$$Q(X,Y) = g(X,X)g(Y,Y) - (g(X,Y))^2$$

şeklinde tanımlanan $Q(X,Y) \in \mathbb{R}$ dır. Bu düzlemsel kesitin dejenere olmayan bir düzlem olması için gerek ve yeter koşul, $Q(X,Y) \neq 0$ dır. Bu durumda, bir M Riemann manifoldu için kesitsel eğrilik aşağıdaki şekilde tanımlanır:

Tanım 2.12. *Bir M yarı–Riemann manifoldunun bir p noktasındaki dejenere olmayan bir düzlemsel kesiti için kesitsel eğrilik*

$$K_p(X,Y) = \frac{R(X,Y;Y,X)}{Q(X,Y)}$$

şeklinde tanımlanır ve $K_p(X,Y)$'nin değeri bu düzlemsel kesit için seçilen $\{X,Y\}$ bazından bağımsızdır.

Her $p \in M$ ve bu noktadaki her düzlemsel kesit için K_p sabitse, M manifolduna *sabit eğrilikli uzay* denir ve $R(X,Y;Y,X) = cQ(X,Y)$ olarak yazılabilir. Burada, c, M manifoldunun eğriliğidir. M manifolduna ait her p noktası için K_p özdeş olarak sıfırsa, M manifolduna *düz manifold* denir. Bu durumda, M manifoldunun düz olması için gerek ve yeter koşul, R eğrilik tensörünün her noktada sıfır olmasıdır.

Tanım 2.13. *Sabit eğrilikli, basit bağlantılı ve tam olan bir manifolda belirsiz uzay formu denir.*

Tanım 2.14. *M yarı–Riemann manifoldu üzerinde*

$$Ric(X,Y) = tr\{Z \mapsto R(Z,X)Y\}$$

şeklinde tanımlanan $(0,2)$ tipinde tensöre Ricci tensörü denir ve Ric ile gösterilir.

$\{e_1,\ldots,e_n\}$ vektörleri n–boyutlu M yarı–Riemann manifoldu için ortonormal bir baz olmak üzere, bu durumda Ricci tensörü

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i R(e_i,X;Y,e_i) \tag{2.2}$$

ile hesaplanır.

Tanım 2.15. $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *vektörleri n–boyutlu bir M yarı–Riemann manifoldu üzerinde ortonormal bir baz olmak üzere,*

$$S = \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_i \varepsilon_j R(e_i, e_j; e_j, e_i) \tag{2.3}$$

fonksiyonuna M yarı–Riemann manifoldunun skaler eğriliği denir.

M manifoldunun yüzey olması durumunda, S skaler eğriliği yüzeyin K Gauss eğriliğinin iki katıdır.

Şimdi, bu çalışma boyunca kullanılacak olan belirsiz uzay formlarından bahsedilecektir.

$\mathbb{E}_s^m$, metrik tensörü $\tilde{g}$

$$\widetilde{g} = \sum_{i=1}^{m-s} dx_i^2 - \sum_{j=m-s+1}^{m} dx_j^2$$

şeklinde tanımlanan m–boyutlu s indeksli yarı–Euclid uzayı olsun. Burada, $(x_1, \ldots, x_m)$, $\mathbb{E}_s^m$ uzayının kartezyen koordinat sistemi ve $0 \leq s < m$ dir. $\mathbb{E}_s^m$ yarı–Euclid uzayı sıfır eğrilikli bir uzaydır. $s = 0$ ise, $\mathbb{E}^m$ standart iç çarpıma sahip Euclid uzayı olur.

$\mathbf{x}_0 \in \mathbb{E}_s^m$ ve $c > 0$ sabit olmak üzere,

$$\mathbb{S}_s^{m-1}(\mathbf{x_0}, c) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{E}_s^m : \langle \mathbf{x} - \mathbf{x_0}, \mathbf{x} - \mathbf{x_0} \rangle = \frac{1}{c} \right\},$$

$$\mathbb{H}_s^{m-1}(\mathbf{x_0}, -c) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{E}_{s+1}^m : \langle \mathbf{x} - \mathbf{x_0}, \mathbf{x} - \mathbf{x_0} \rangle = -\frac{1}{c} \right\}$$

ile verilen tam uzayları, sırasıyla, *yarı–küre* ve *yarı–hiperbolik uzay* olarak adlandırılır. $\mathbb{S}_s^{m-1}(\mathbf{x_0}, c)$ ve $\mathbb{H}_s^{m-1}(\mathbf{x_0}, -c)$, sırasıyla, merkezleri $\mathbf{x_0}$ ve eğrilikleri $c, -c$ olan yarı–Riemann manifoldlarıdır. $\mathbf{x_0} = \mathbf{0}$ olması durumunda, $\mathbb{S}_s^{m-1}(\mathbf{0}, c)$ ve $\mathbb{H}_s^{m-1}(\mathbf{0}, -c)$ uzayları $\mathbb{S}_s^{m-1}(c)$ ve $\mathbb{H}_s^{m-1}(-c)$ ile, $c = 1$ olması durumunda ise, $\mathbb{S}_s^{m-1}$ ve $\mathbb{H}_s^{m-1}$ ile gösterilecektir. Özel olarak, $s = 1$ olması durumunda $\mathbb{E}_1^m$, $\mathbb{S}_1^{m-1}$ ve $\mathbb{H}_1^{m-1}$ uzayları, sırasıyla, fizikteki genel görelilik kuramından gelen *Minkowski*, *de Sitter* ve *anti–de Sitter uzayı* olarak isimlendirilir. Ayrıca, yarı–hiperbolik uzaylarda $s = 0$ ise

$$\mathbb{H}^{m-1}(-c) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{E}_1^m : \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \frac{1}{c} < 0 \quad \text{ve} \quad x_m > 0 \right\} \tag{2.4}$$

ile verilen merkezi orjinde $-c$ eğrilikli $\mathbb{H}^{m-1}(-c)$ uzayına *hiperbolik uzay* denir.

$\mathbb{E}_s^m$ yarı–Euclid uzayının köşesi $\mathbf{v_0}$ noktasında olan $\mathscr{LC}(\mathbf{v_0})$ ışık konisi

$$\mathscr{LC}(\mathbf{v_0}) = \{ \mathbf{v} \in \mathbb{E}_s^m : \langle \mathbf{v} - \mathbf{v_0}, \mathbf{v} - \mathbf{v_0} \rangle = 0 \} \tag{2.5}$$

şeklinde tanımlanır. $\mathbf{v_0}$ orijin ise, $\mathscr{LC}(\mathbf{0})$ ışık konisi $\mathscr{LC}$ ile gösterilir.

2.2 Yarı–Riemann Alt Manifoldları

Tanım 2.16. *M ve $\widetilde{M}$, sırasıyla, boyutları n ve m olan iki Riemann manifoldu olsun.*

i. M, $\widetilde{M}$'nın topolojik bir alt uzayı,

ii. $i : M \longrightarrow \widetilde{M}$ içine tasvirinin diferansiyeli birebir ise

M manifolduna, m–boyutlu $\widetilde{M}$ manifoldunun n–boyutlu bir alt manifoldu denir. $m-n$ sayısına da M alt manifoldunun $\widetilde{M}$ manifoldu içindeki karşıt boyutu denir.

M alt manifoldunun metriği g, $\widetilde{M}$ manifolduna ait $\tilde{g}$ metriğinden indirgenmiştir ve dolayısıyla bu iki manifolda ait metrik g veya $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ile gösterilecektir. $\widetilde{M}$ yarı–Riemann bir manifold ve g metriği M alt manifoldunun her noktasında sabit indeksli ve dejenere olmayan bir metrik ise, M'ye $\widetilde{M}$ yarı–Riemann manifoldunun *yarı–Riemann alt manifoldu* denir.

Tanım 2.17. *M alt manifoldunun her X teğet vektör alanı için $\langle\xi, X\rangle = 0$ oluyorsa, ξ'ye normal vektör alanı denir.*

M, $\widetilde{M}$ yarı–Riemann manifoldunun bir yarı–Riemann alt manifoldu olmak üzere, Levi–Civita konneksiyonları, sırasıyla, ∇ ve $\widetilde{\nabla}$ ile gösterilsin. X ve Y vektör alanları M alt manifolduna teğet ve ξ vektör alanı M alt manifolduna normal olmak üzere, Gauss ve Weingarten formülleri, sırasıyla,

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y) \tag{2.6}$$

ve

$$\widetilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + D_X \xi \tag{2.7}$$

şeklindedir. Burada, h ikinci esas formu, A_ξ, M alt manifoldunun ξ normal vektörü doğrultusundaki şekil operatörünü veya Weingarten tasvirini ve D ise, M üzerine indirgenen normal konneksiyonu göstermektedir. Şekil operatörü A ile ikinci esas form h arasında aşağıdaki denklemle verilen bir ilişki bulunmaktadır:

$$\langle A_\xi X, Y\rangle = \langle h(X,Y), \xi\rangle. \tag{2.8}$$

M'nin herhangi X,Y,Z,W teğet vektör alanları ve ξ,η normal vektör alanları için, M alt manifolduna ait Gauss, Codazzi ve Ricci denklemleri, sırasıyla,

$$\widetilde{R}(X,Y;Z,W) = R(X,Y;Z,W) + g(h(X,Z),h(Y,W)) - g(h(X,W),h(Y,Z)), \quad (2.9)$$
$$(\widetilde{R}(X,Y)Z)^{\perp} = \left(\overline{\nabla}_X h\right)(Y,Z) - \left(\overline{\nabla}_Y h\right)(X,Z), \quad (2.10)$$
$$R^D(X,Y;\xi,\eta) = \widetilde{R}(X,Y;\xi,\eta) + g([A_\xi,A_\eta](X),Y) \quad (2.11)$$

şeklindedir. Burada, $\widetilde{R}$ ile $\widetilde{M}$ manifoldunun eğrilik tensörü, $\widetilde{R}^{\perp}$ ile $\widetilde{R}$ eğrilik tensörünün normal bileşeni,

$$(\overline{\nabla}_X h)(Y,Z) = D_X h(Y,Z) - h(\nabla_X Y,Z) - h(Y,\nabla_X Z)$$

şeklinde tanımlanan $\overline{\nabla} h$ ile h ikinci esas formunun van der Waerden–Bortolotti konneksiyonuna göre kovaryant türevi ve

$$R^D(X,Y)\xi = D_X D_Y \xi - D_Y D_X \xi - D_{[X,Y]}\xi,$$

şeklinde tanımlanan R^D ile normal eğrilik tensörü gösterilmektedir. $\overline{\nabla} h = 0$ ise, M alt manifolduna *paralel alt manifold* denir. İkinci esas form h özdeş olarak sıfır olması durumunda, M alt manifolduna *tümden jeodezik alt manifold* denir.

$\widetilde{M}$ çevreleyen uzayı sabit c eğrilikli ise, (2.9), (2.10) ve (2.11) denklemleri aşağıdaki ifadelere indirgenir:

$$\begin{aligned} R(X,Y;Z,W) =& c(g(X,W)g(Y,Z) - g(X,Z)g(Y,W)) \\ &+ g(h(X,W),h(Y,Z)) - g(h(X,Z),h(Y,W)), \end{aligned} \quad (2.12)$$
$$\left(\overline{\nabla}_X h\right)(Y,Z) = \left(\overline{\nabla}_Y h\right)(X,Z), \quad (2.13)$$
$$R^D(X,Y;\xi,\eta) = g([A_\xi,A_\eta](X),Y). \quad (2.14)$$

Bundan sonraki kısımda kullanılan indislerin aralıkları aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$1 \leq A,B,C,\ldots, \leq m; \quad 1 \leq i,j,k,\ldots, \leq n; \quad n+1 \leq r,s,t,\ldots, \leq m.$$

Burada, m ile $\widetilde{M}$ manifoldunun n ile M alt manifoldunun boyutu gösterilmektedir.

$\widetilde{M}$ yarı–Riemann manifoldu içinde $e_1,\ldots,e_n$ vektörleri, M yarı–Riemann alt manifolduna teğet ve $e_{n+1},\ldots,e_m$ vektörleri, M yarı–Riemann alt manifolduna normal olmak üzere, $\{e_1,\ldots,e_n,e_{n+1},\ldots,e_m\}$ şeklinde M üzerinde bir ortonormal çatı alanı olarak seçilebilir. e_A vektörlerinin işaretleri $\varepsilon_A = \langle e_A, e_A\rangle \pm 1$ ile gösterilsin. $\omega_1,\ldots,\omega_n$, $e_1,\ldots,e_n$ teğet ortonormal çatı alanına karşılık gelen dual vektörler olmak üzere, bu seçilen ortonormal çatı alanına göre, (2.6) ve (2.7) denklemleri ile verilen , Gauss ve Weingarten formülleri, sırasıyla,

$$\widetilde{\nabla}_{e_k}e_i = \sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j\omega_{ij}(e_k)e_j + \sum_{r=n+1}^{m}\varepsilon_r h^r_{ik}e_r \tag{2.15}$$

ve

$$\widetilde{\nabla}_{e_k}e_s = -\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j h^s_{jk}e_j + \sum_{r=n+1}^{m}\varepsilon_r\omega_{sr}(e_k)e_r \tag{2.16}$$

olarak yazılabilir. Burada, h^r_{ik} ile h ikinci esas formunun bileşenleri ve ω_{rs} ile normal konneksiyon formları gösterilmektedir. Ayrıca, ω_{AB} konneksiyon formları herhangi bir X vektör alanı için

$$\omega_{AB}(X) = \langle\tilde{\nabla}_X e_A, e_B\rangle$$

ile tanımlanır ve $\omega_{AB}+\omega_{BA} = 0$ şartını sağlar.

$\widetilde{M}$ çevreleyen uzayın c sabit eğrilikli olması durumunda ise, seçilen ortonormal çatı alanına göre Codazzi ve Ricci denklemleri, sırasıyla,

$$\begin{aligned} h^r_{ij,k} &= h^r_{jk,i} \\ h^r_{jk,i} &= e_i(h^r_{jk}) - \sum_{\ell=1}^{n}\varepsilon_\ell(h^r_{j\ell}\omega_{k\ell}(e_i)+h^r_{k\ell}\omega_{j\ell}(e_i)) + \sum_{s=n+1}^{m}\varepsilon_s h^s_{jk}\omega_{sr}(e_i) \end{aligned} \tag{2.17}$$

ve

$$R^D(e_j,e_k;e_r,e_s) = \langle[A_r,A_s](e_j),e_k\rangle = \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i(h^r_{ik}h^s_{ij} - h^r_{ij}h^s_{ik}) \tag{2.18}$$

şeklinde yazılır. Normal eğrilik tensörü R^D özdeş olarak sıfır ise, M yarı–Riemann alt manifoldu *düz normal konneksiyona sahiptir* denir.

M yarı–Riemann alt manifoldunun ikinci esas formunun uzunluğunun karesi $||h||^2$ ve $\widetilde{M}$ yarı–Riemann manifoldu içindeki ortalama eğrilik vektörü H, sırasıyla,

$$||h||^2 = \sum_{i,j=1}^{n}\varepsilon_i\varepsilon_j\langle h(e_i,e_j),h(e_i,e_j)\rangle = \sum_{i,j=1}^{n}\sum_{r=n+1}^{m}\varepsilon_i\varepsilon_j\varepsilon_r(h^r_{ij})^2 \tag{2.19}$$

ve

$$H = \frac{1}{n}\sum_{r=n+1}^{m}\mathrm{tr}A_r e_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{r=n+1}^{m}\varepsilon_i\varepsilon_r h^r_{ii}e_r \tag{2.20}$$

ile tanımlanır. $DH = 0$ ise, M yarı–Riemann alt manifoldu *paralel ortalama eğrilik vektörüne sahiptir* denir. M yüzeyi uzaysal ve $H = 0$ ise, M'ye *maksimal yüzey* denir.

M yüzeyinin H ortalama eğrilik vektörü ışıksal ise, M yüzeyine *marjinlerde sıkışmış yüzey (ing. marginally trapped surface)* denir. Tuzaklı yüzey kavramı ilk kez 1965 yılında P. Penrose tarafından ortaya atılmıştır ve kozmik kara delikler teorisinde önemli bir yeri bulunmaktadır. Tuzaklı yüzeylerden ışık dahil olmak üzere hiçbir madde kaçamaz. Marjinlerde sıkışmış yüzey ise tuzaklı yüzey ile tuzaklı olmayan yüzeyi birbirinden ayırır. Bu kavrama matematiksel olarak bakıldığında çevreleyen uzaydan gelen gerilmeyi ölçen ortalama eğrilik vektörünün zamansal olması yüzeyin tuzaklı, ışıksal olması yüzeyin marjinlerde sıkışmış yüzey olduğunu söyler.

M alt manifoldunun $\mathbb{E}^m_s$ yarı–Euclid uzayı içindeki skaler eğriliği,

$$S = n^2 |H|^2 - \|h\|^2 \tag{2.21}$$

şeklinde bulunur.

$\mathbf{x} : M \longrightarrow \mathbb{S}^{m-1}_s(c) \subset \mathbb{E}^m_s$, bir M Riemann manifoldundan $\mathbb{S}^{m-1}_s(c)$ yarı–küresine izometrik bir daldırma olmak üzere, aşağıdaki ilişkiler geçerlidir:

$$H = \hat{H} - c\mathbf{x} \quad \text{ve} \quad h(X,Y) = \hat{h}(X,Y) - cg(X,Y)\mathbf{x}. \tag{2.22}$$

Burada, $\hat{h}$ ve $\hat{H}$, sırasıyla, M manifoldunun $\mathbb{S}^{m-1}_s(c)$ yarı–küresi içindeki ikinci esas formunu ve ortalama eğrilik vektörünü göstermektedir. Ayrıca, M alt manifoldunun (2.21) denklemi ile verilen skaler eğrilik ifadesi

$$S = cn(n-1) + n^2|\hat{H}|^2 - ||\hat{h}||^2 \tag{2.23}$$

şeklinde yazılabilir.

Tanım 2.18. *M, bir yarı–Riemann manifoldu ve $f \in C^\infty(M)$ olsun. Bu durumda, herhangi bir X vektör alanı için f fonksiyonunun gradyenti ∇f veya $\operatorname{grad} f$*

$$\langle \nabla f, X \rangle = X(f)$$

ile tanımlanır.

n–boyutlu bir M yarı–Riemann manifoldu üzerinde tanımlanan $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ ortonormal çatı alanına göre ∇f aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i e_i(f) e_i. \tag{2.24}$$

Tanım 2.19. *M, yarı–Riemann manifoldu ve $f \in C^\infty(M)$ olsun. Bu durumda, f fonksiyonunun Laplasiyeni*

$$\Delta f = -div(gradf)$$

şeklinde tanımlanır.

n–boyutlu M yarı–Riemann alt manifoldu için $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ortonormal çatı alanına göre M'nin metriği tarafından indirgenen Δ, Laplace operatörü

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (\widetilde{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i} - \widetilde{\nabla}_{e_i} \widetilde{\nabla}_{e_i}) \tag{2.25}$$

ile verilir. Ayrıca, $f, g \in C^\infty(M)$ olmak üzere, iki fonksiyonun çarpımının Laplasiyeni

$$\Delta(f.g) = \Delta f.g + f.\Delta g - 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle \tag{2.26}$$

şeklindedir.

Tanım 2.20. *$\widetilde{M}$ yarı–Riemann manifoldunun bir M yarı–Riemann alt manifoldu üzerindeki ξ normal vektör alanı ve $\rho \in C^\infty(M)$ fonksiyonu için ξ doğrultusundaki şekil operatörü $A_\xi = \rho I$ şeklinde yazılabiliyorsa, ξ'ye ombilik kesit veya M alt manifolduna, ξ vektör alanına göre ombilik denir. M alt manifoldu bütün normal vektör alanlarına göre ombilik ise, M alt manifolduna tümden ombilik denir.*

Diğer bir deyişle, M yarı–Riemann alt manifoldu tümden ombilik ise herhangi X ve Y teğet vektörleri için

$$h(X,Y) = g(X,Y)H \tag{2.27}$$

ilişkisi sağlanır.

Ayrıca,

$$g(h(X,Y),H) = \lambda g(X,Y) \tag{2.28}$$

ilişkisini sağlayan bir $\lambda \in C^\infty(M)$ fonksiyonu varsa M'ye $\widetilde{M}$ yarı–Riemann manifoldunun *yarı–ombilik alt manifoldu* denir. Görüldüğü üzere, her tümden ombilik alt manifold aynı zamanda yarı–ombilik iken tersi doğru değildir.

Tanım 2.21. *M, $\widetilde{M}$ yarı–Riemann manifoldunun bir yarı–Riemann alt manifoldu olmak üzere, $p \in M$ noktasında, birim X teğet vektörü için $\langle h(X,X), h(X,X) \rangle$ ifadesi X teğet vektörünün seçiminden bağımsız ise, p noktasına M yarı–Riemann alt manifoldunun bir izotropik noktası denir. M yarı–Riemann alt manifoldunun her noktası izotropik ise, M'ye izotropik alt manifold denir.*

Tanım 2.22. *M, $\widetilde{M}$ yarı–Riemann manifoldunun bir yarı–Riemann alt manifoldu olmak üzere, bir p noktasında*

$$Imh_p = span\{h(X,Y)|X,Y \in T_pM\} \tag{2.29}$$

şeklinde tanımlanan M alt manifoldunun normal uzayının alt uzayına birinci normal uzay denir.

[29] numaralı çalışmada verilen Erbarcher–Magid İndirgeme Teoreminin yarı–Euclid uzayının daldırmaları için olan ifadesi aşağıdaki şekildedir:

Teorem 2.2. *$\phi : M \longrightarrow \mathbb{E}^m_s$, n-boyutlu bir M yarı–Riemann manifoldundan $\mathbb{E}^m_s$ yarı–Euclid uzayına izometrik bir daldırma olsun. M yarı–Riemann manifoldunun k–boyutlu birinci normal uzayı, Imh, paralel ise, $\phi(M) \subset E^*$ olacak şekilde $\mathbb{E}^m_s$ uzayının tam, tümden jeodezik ve $(n+k)$–boyutlu bir E^* yarı–Euclid alt manifoldu vardır.*

Özel olarak, karşıt boyutun 1 olması durumunda, M yarı–Riemann alt manifolduna $\widetilde{M}$ yarı–Riemann manifoldunun *yarı–Riemann hiperyüzeyi* denir.

Tanım 2.23. *Bir yarı–Riemann hiperyüzeyinin her noktasında şekil operatörü köşegenleştirilebilir ise, bu hiperyüzeye has yarı–Riemann hiperyüzeyi denir.*

Tanım 2.24. *Bir has yarı–Riemann hiperyüzeyin şekil operatörünün özdeğerleri sabit ise, bu hiperyüzeye izoparametrik yarı–Riemann hiperyüzey denir.*

2.3 Gauss Tasviri ve Temel Teoremler

Bu bölümde, sırasıyla, klasik Gauss tasviri, küresel Gauss tasviri ve yarı–küresel Gauss tasvirinin tanımı verilecektir.

2.3.1 Klasik Gauss tasviri

$\mathbb{E}^3$ Euclid uzayının bir M yüzeyinin Gauss tasviri, yüzeyin bir noktasındaki normal vektörünü birim kürenin merkezine taşıyan tasvirdir. Yani, $\nu(p) = N(p)$ dir. Karşıt boyutun 1 olması durumunda, Gauss tasviri manifoldun normal vektörü ile tanımlanır. Karşıt boyutun 1'den büyük olması durumunda, klasik Gauss tasvirinin tanımı için ilk önce, $\mathbb{E}^m$ Euclid uzayında n–boyutlu düzlem ve Grasmaniyen manifoldundan bahsedilecektir.

V, $\mathbb{E}^m$ Euclid uzayında, n–boyutlu yönlendirilmiş bir düzlem ve $\{e_1,\ldots,e_n\}$ bu V düzleminin yönlendirilmiş bir ortonormal bazı olsun. Bu durumda, $e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n$ normu 1 olan ayrışabilen bir n–vektördür ve V düzlemi üzerinde bir yönlendirme verir. Tersine, $\mathbb{E}^m$ uzayında herhangi bir normu 1 olan ayrışabilen n–vektör tek bir düzlem belirler.

$G(n,m)$, $\mathbb{E}^m$ Euclid uzayında orijinden geçen yönlendirilmiş n–boyutlu düzlemlerin oluşturduğu uzaydır ve $G(n,m)$ Grasmaniyen manifoldu olarak isimlendirilir. Dolasıyla, $\bigwedge^n \mathbb{E}^m$, $\mathbb{E}^m$ Euclid uzayındaki n–vektörlerin uzayı, $G(n,m)$ Grasmaniyen manifoldu ile tanımlanır. $\bigwedge^n \mathbb{E}^m$, $N = \binom{m}{n}$ boyutlu bir Euclid uzayıdır. Yani, $\bigwedge^n \mathbb{E}^m \cong \mathbb{E}^N$ dir.

Bu bilgiler doğrultusunda, [11] numaralı çalışmada, klasik Gauss tasvirinin tanımı aşağıdaki şekilde verilmiştir:

$\mathbf{x} : M \to \mathbb{E}^m$, yönlendirilmiş n–boyutlu M Riemann manifoldundan $\mathbb{E}^m$ Euclid uzayına tanımlanan izometrik bir daldırma olsun. $\{e_1,\ldots,e_n\}$ vektörleri M manifoldu üzerinde yönlendirilmiş teğet bir ortonormal çatı alanı olmak üzere, klasik Gauss tasviri

$$\nu : M \longrightarrow G(n,m) \subset \mathbb{E}^N \tag{2.30}$$

$$p \longrightarrow (e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n)(p) \tag{2.31}$$

şeklindedir. Burada, $e_1,\ldots,e_n$ vektörleri $d\mathbf{x}$'in görüntüsü olarak tanımlanmıştır.

[8] numaralı çalışmadan görüldüğü üzere, M manifoldunun teğet vektörleri yardımıyla tanımlanan Gauss tasviri manifoldun normal vektörleri ile de tanımlanabilir. $G(n,m) \cong G(n-m,m)$ olduğundan bu iki tasvirle elde edilen sonuçlar aynıdır.

Yardımcı Teorem 2.1. *[30] M, $\mathbb{E}_s^{n+2}$ yarı–Euclid uzayının n–boyutlu yönlendirilmiş bir alt manifoldu olsun. M alt manifoldunun $\nu = e_{n+1} \wedge e_{n+2}$ Gauss tasvirinin Laplasiyeni*

$$\begin{aligned}\Delta\nu =&||h||^2\nu + 2\sum_{1\le j<k\le n} \varepsilon_j\varepsilon_k R^D(e_j,e_k;e_{n+1},e_{n+2})e_j \wedge e_k + \nabla(trA_{n+1}) \wedge e_{n+2} \\ &+ e_{n+1} \wedge \nabla(trA_{n+2}) + n\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \omega_{(n+1)(n+2)}(e_j) H \wedge e_j\end{aligned} \tag{2.32}$$

olarak verilir. Burada, $||h||^2$ ve R^D, sırasıyla, M alt manifoldunun ikinci esas formunun normunun karesini ve normal eğrilik tensörünü, $\nabla(trA_r)$ ise, M alt manifoldunun A_r şekil operatörünün izinin gradyentidir.

2.3.2 Yarı–küresel Gauss tasviri

Yarı–küresel Gauss tasvirinin tanımı için öncelikle, küresel Gauss tasvirinden bahsedilecektir.

$\mathbf{x}$, M Riemann manifoldundan $\mathbb{S}^{m-1}$ küresine bir izometrik daldırma olsun. $\mathbb{S}^{m-1} \subset \mathbb{E}^m$ olduğundan, $\mathbf{x}$ daldırması Euclid uzayının bir daldırması olarak düşünülebilir. Dolayısıyla, $\mathbf{x}$ daldırmasına karşılık gelen Gauss tasviri yukarıdaki gibi tanımlanabilir. Ancak, bu Gauss tasviri $\mathbf{x}$ küresel daldırmasının özelliklerini tam olarak yansıtmamaktadır. Bu nedenle, [13] numaralı çalışmada M. Obata tarafından Gauss tasvirinin tanımı aşağıdaki şekilde verilmiştir:

$\mathbf{x} : M \longrightarrow V$, bir M Riemann manifoldundan m–boyutlu belirsiz bir uzay formu V'ye tanımlanan bir daldırma olsun. *Obata anlamında Gauss tasviri* veya *genelleştirilmiş Gauss tasviri*, M manifoldu üzerindeki bir p noktasını $\mathbf{x}(p)$ noktasında $\mathbf{x}(M)$'ye teğet olan V uzayının tümden jeodezik n–boyutlu alt uzaylarına götüren bir tasvirdir. V uzayı $\mathbb{S}^m$ olarak alınırsa, bu tasvire *küresel Gauss tasviri*, $\mathbb{H}^m$ olursa, *hiperbolik Gauss tasviri* denir.

$\mathbb{S}^{m-1}$, merkezi orijinde olan $\mathbb{E}^m$ Euclid uzayının bir birim hiperküresi olmak üzere, $\mathbf{x} : M \to \mathbb{S}^{m-1} \subset \mathbb{E}^m$ izometrik daldırmasına karşılık gelen, genelleştirilmiş Gauss tasviri M manifoldunun bir p noktasını $\mathbf{x}(p)$ noktasında $\mathbf{x}(M)$ manifolduna teğet olan $\mathbb{S}^{m-1}$ küresinin tümden jeodeziklerine götüren tasvirdir. $\mathbb{S}^{m-1}$ küresinin tümden jeodezikleri n–boyutlu büyük kürelerdir.

Q, $\mathbb{S}^{m-1}$ uzayı içindeki tüm n–boyutlu büyük kürelerin kümesi olsun. $(n+1)$–boyutlu düzlemler bir tek n–boyutlu büyük küreleri ve tersine, n–boyutlu büyük küre bir tek $(n+1)$–düzlemi belirler. Dolayısıyla, $\mathbb{E}^m$ uzayı içinde $\mathbb{S}^{m-1}$ hiperküresinin merkezinden geçen $(n+1)$–boyutlu düzlemlerin Grasmaniyen manifoldu $G(n+1,m)$ ile Q kümesi arasında doğal olarak tanımlama yapılabilir. Bu durumda, genelleştirilmiş Gauss tasviri, M manifoldundan $G(n+1,m)$ Grasmaniyen manifolduna bir tasvirdir.

$\mathbb{S}^{m-1}$ küresinin içinde M alt manifoldu üzerindeki bir p noktasında teğet uzayı için $\{e_1,\ldots,e_n\}$ ortonormal bazı seçilsin. Burada, $e_1,\ldots,e_n$ vektörleri $d\mathbf{x}$'in görüntüsü olarak tanımlanmıştır. $\mathbf{x},e_1,\ldots,e_n$ vektörleri $\mathbb{E}^m$ uzayı içinde, $(n+1)$–boyutlu lineer bir alt uzay belirler. Bu $(n+1)$–boyutlu alt uzay ile $\mathbb{S}^{m-1}$ küresinin kesişimi, n–boyutlu tümden jeodezik bir küre verir. M manifoldu üzerindeki bir p noktasını, n–boyutlu tümden jeodezik $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{S}^{m-1}$ küresine taşıyan tasvire *Obata tasviri* denir.

n–boyutlu tümden jeodezik küreler, $\mathbb{E}^m$ Euclid uzayının $(n+1)$–boyutlu lineer alt uzay tarafından tek türlü belirlendiğinden, Obata tasviri $G(n+1,m)$ Grasmaniyen manifoldlarına genişletilebilir. Yani, $x : M \longrightarrow \mathbb{S}^{m-1} \subset \mathbb{E}^m$ daldırmasına karşılık gelen Obata tasviri

$$\begin{aligned} \hat{\nu} : M &\longrightarrow G(n+1,m) \\ p &\longrightarrow (\mathbf{x}\wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n)(p) \end{aligned}$$

olarak tanımlanır. Ayrıca, $G(n+1,m)$ Grasmaniyen manifoldu $\mathbb{S}^{N-1}$ birim hiperküresinin alt manifoldu olduğundan, $i : G(n+1,m) \longrightarrow \mathbb{S}^{N-1}$ içine tasviri vardır. Burada, $N = \binom{m}{n+1}$ dir.

$\hat{\nu}$ Obata tasviri ile i tasvirinin bileşkesi olarak tanımlanan *küresel Gauss tasviri* $\tilde{\nu}$,

$$\begin{aligned} \tilde{\nu} : M &\longrightarrow G(n+1,m) \subset \mathbb{S}^{N-1} \subset \mathbb{E}^N \\ p &\longrightarrow (\mathbf{x}\wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n)(p) \end{aligned} \tag{2.33}$$

ile verilir. Küresel Gauss tasvirinin tanımı [16] numara ile verilen çalışmada yer almaktadır.

Bu durumda, küresel Gauss tasviri tanımı kullanılarak, yarı–küresel Gauss tasviri aşağıdaki şekilde verilir:

$\mathbf{x} : M_t \longrightarrow \mathbb{S}^{m-1}_s \subset \mathbb{E}^m_s$, indeksi t olan, n–boyutlu yönlendirilmiş yarı–Riemann M_t alt manifoldundan $\mathbb{S}^{m-1}_s$ yarı–küresine izometrik bir daldırma olsun. Bu izometrik daldırmaya karşılık gelen Obata anlamında yarı–küresel Gauss tasviri her $p \in M_t$ noktasından $\mathbf{x}(p)$ noktasında $\mathbf{x}(M_t)$'ye teğet olan $\mathbb{S}^{m-1}_s$ uzayının n–boyutlu tümden jeodezik kürelerine götürür.

$\mathbb{S}^{m-1}_s(c)$ yarı–küresinin tümden jeodezikleri aşağıdaki şekilde verilir:
$n < m-1$ ve $0 \le t \le s$ olmak üzere,

$$\mathbb{S}^n_t(c) = \{(x_1,\ldots,x_t,0,\ldots,0,x_{s+1},\ldots,x_{n+1},0,\ldots,0) \in \mathbb{S}^m_s(c)\}$$

şeklinde tanımlanan sabit c eğrilikli, t indeksli bu uzay, $\mathbb{S}_s^{m-1}(c)$ yarı–küresinin tümden jeodezik bir yarı–Riemann alt manifoldudur ve $\mathbb{S}_s^{m-1}(c)$ yarı–küresinin n–boyutlu bir yarı–alt küresi denir.

Diğer taraftan, $\mathbb{S}_s^{m-1}$ yarı–küresinin n–boyutlu tümden jeodezik yarı–küreleri, $\mathbb{E}_s^m$ uzayı içinde $\mathbb{S}_s^{m-1}$ uzayının merkezinden geçen $(n+1)$–boyutlu düzlemlerin Grasmaniyen manifoldu ile doğal olarak tanımlanabilir. Çünkü, $(n+1)$–düzlem tek bir n–boyutlu yarı–küre belirlerken bu ifadenin tersi de doğrudur. Dolayısıyla, Obata anlamında yarı–küresel Gauss tasviri $\hat{v} : M_t \longrightarrow G(n+1,m)$ olarak verilir.

$p \in M_t$ için $T_p(M_t)$ uzayının $\{e_1,\ldots,e_n\}$ yönlendirilmiş bir ortonormal bazı göz önüne alınsın. Bu vektörlerin işaretleri $\varepsilon_i = \langle e_i, e_i \rangle = \pm 1$, $i = 1,\ldots,n$ ile gösterilsin. $\mathbf{x}(p), e_1,\ldots,e_n$ vektörleri $\mathbb{E}_s^m$ yarı–Euclid uzayının $(n+1)$–boyutlu bir lineer alt uzayını belirler. Bu $(n+1)$–boyutlu lineer alt uzay ile $\mathbb{S}_s^{m-1}$ yarı–küresinin kesişimi alınırsa, $\mathbb{S}_s^{m-1}$ uzayının $T_p(M_t)$ tarafından belirlenmiş tümden jeodezik n–boyutlu yarı–kürelerini verir. Bu yarı–küreler $T_p(M_t)$ tarafından belirlendiğinden indeksi t dir. Bu durumda, yarı–küresel $\mathbf{x}$ izometrik daldırmasına karşılık gelen Obata anlamında yarı–küresel Gauss tasviri $\hat{v}(p) = (\mathbf{x} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n)(p)$ şeklindedir.

$\{f_1, f_2,\ldots,f_m\}$ ve $\{g_1, g_2,\ldots,g_m\}$, $\mathbb{E}_s^m$ yarı–Euclid uzayının iki ortonormal bazı olmak üzere, $f_{i_1} \wedge \cdots \wedge f_{i_{n+1}}$ ve $g_{j_1} \wedge \cdots \wedge g_{j_{n+1}}$ vektörleri $\bigwedge^{n+1} \mathbb{E}_s^m$, $\mathbb{E}_s^m$ uzayındaki $(n+1)$ tane vektörün dış çarpımlarından oluşan vektörlerin oluşturduğu uzayın elemanlarıdır. $\bigwedge^{n+1} \mathbb{E}_s^m$ uzayı üzerinde $\langle\langle .,. \rangle\rangle$ iç çarpımı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\langle\langle f_{i_1} \wedge \cdots \wedge f_{i_{n+1}}, g_{j_1} \wedge \cdots \wedge g_{j_{n+1}} \rangle\rangle = \det(\langle f_{i_\ell}, g_{j_k} \rangle). \tag{2.34}$$

Dolayısıyla, $\bigwedge^{n+1} \mathbb{E}_s^m$ uzayı uygun bir q pozitif tamsayı indeksli, $N = \binom{m}{n+1}$–boyutlu yarı–Euclid uzayıdır. Yani, $\bigwedge^{n+1} \mathbb{E}_s^m \cong \mathbb{E}_q^N$ dir.

Diğer taraftan, $G(n+1,m)$ Grasmaniyen manifoldu, $\mathbb{E}_q^N$ yarı–Euclid uzayına daldırılabilir, yani, $i : G(n+1,m) \longrightarrow \mathbb{E}_q^N$ içine tasviri vardır. Obata anlamında yarı–küresel Gauss tasviri $\hat{v}$ ile i tasvirinin bileşkesi alındığında elde edilen

$$\begin{aligned} \tilde{v} : M_t &\longrightarrow G(n+1,m) \subset \mathbb{E}_q^N \\ p &\longrightarrow (\mathbf{x} \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n)(p) \end{aligned} \tag{2.35}$$

tasvirine *yarı–küresel Gauss tasviri* denir.

Ayrıca, (2.34) denkleminden $\langle\langle \hat{v}, \hat{v} \rangle\rangle = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots = \pm 1$ olarak hesaplanır. Dolayısıyla, $G(n+1,m)$ Grasmaniyen manifoldu $\mathbb{S}_q^{N-1} \subset \mathbb{E}_q^N$ yarı–küresinin veya $\mathbb{H}_{q-1}^{N-1} \subset \mathbb{E}_q^N$ yarı–hiperbolik uzayının alt manifoldu olur.

Şimdi, (2.35) denklemi ile verilen $\tilde{v}$ yarı–küresel Gauss tasvirinin Laplasiyeni hesaplanacaktır. $\tilde{v}$ tasvirinin e_i doğrultusunda türevi alındığında

$$
\begin{aligned}
e_i \tilde{\nu} &= e_i(\mathbf{x} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) \\
&= \tilde{\nabla}_{e_i} \mathbf{x} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{x} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{\tilde{\nabla}_{e_i} e_k}_{\text{k'ıncı}} \wedge \cdots \wedge e_n \\
&= e_i \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{x} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_k \omega_{kj}(e_i) e_j + \sum_{r=n+1}^{m} \varepsilon_r h_{ik}^r e_r \right)}_{\text{k'ıncı}} \wedge \cdots \wedge e_n \\
&= e_i \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n + \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=n+1}^{m-1} \varepsilon_r h_{ik}^r \mathbf{x} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_r}_{\text{k'ıncı}} \wedge \cdots e_n
\end{aligned} \tag{2.36}
$$

olarak bulunur. Ancak $i = 1, \ldots, n$ değerleri için $e_i \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n = 0$ olur. Dolayısıyla, (2.36) denklemi aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$
e_i \tilde{\nu} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=n+1}^{m-1} \varepsilon_r h_{ik}^r \mathbf{x} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_r}_{\text{k'ıncı}} \wedge \cdots e_n. \tag{2.37}
$$

Benzer şekilde, (2.37) denkleminin e_i doğrultusunda türevi alınırsa

$$
\begin{aligned}
e_i e_i \tilde{\nu} = &\sum_{k=1}^{n} \sum_{r=n+1}^{m-1} \varepsilon_r e_i(h_{ik}^r) \mathbf{x} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_r}_{\text{k'ıncı}} \wedge \cdots \wedge e_n \\
&+ \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=n+1}^{m-1} \varepsilon_r h_{ik}^r e_i \wedge e_1 \wedge \underbrace{e_r}_{\text{k'ıncı}} \wedge \cdots \wedge e_n \\
&- \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=n+1}^{m-1} \varepsilon_r \varepsilon_k h_{ik}^r h_{ki}^r \mathbf{x} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \\
&+ \sum_{k=1}^{n} \sum_{r,s=n+1}^{m-1} \varepsilon_r \varepsilon_s h_{ik}^r \omega_{rs}(e_i) \mathbf{x} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_s}_{\text{k'ıncı}} \wedge \cdots \wedge e_n \\
&+ \sum_{\substack{j,k,\ell=1 \\ j \neq k}}^{n} \sum_{r=n+1}^{m-1} \varepsilon_r \varepsilon_\ell h_{ik}^r \omega_{j\ell}(e_i) \mathbf{x} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_\ell}_{\text{j'inci}} \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_r}_{\text{k'ıncı}} \wedge \cdots \wedge e_n \\
&+ \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{n} \sum_{r,s=n+1}^{m-1} \varepsilon_r \varepsilon_s h_{ik}^r h_{ij}^s \mathbf{x} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_s}_{\text{j'inci}} \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_r}_{\text{k'ıncı}} \wedge \cdots \wedge e_n
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. $\nabla_{e_i} e_i = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \omega_{ij}(e_i) e_j$ ve (2.37) kullanıldığında

$$
(\nabla_{e_i} e_i)\, \tilde{\nu} = \sum_{j,k=1}^{n} \sum_{r=n+1}^{m-1} \varepsilon_j \varepsilon_r h_{ik}^r \omega_{ij}(e_i) \mathbf{x} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_r}_{\text{k'ıncı}} \wedge \cdots \wedge e_n \tag{2.38}
$$

elde edilir. Bu denklemlerden

$$
\begin{aligned}
\Delta\tilde{\nu} = & \sum_{i,j,k=1}^{n}\sum_{r=n+1}^{m-1} \varepsilon_i\varepsilon_j\varepsilon_r h^r_{ik}\omega_{ij}(e_i)\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_r}_{\text{k'ıncı}}\wedge\cdots\wedge e_n \\
& -\sum_{i,k=1}^{n} \varepsilon_i\varepsilon_r e_i(h^r_{ik})\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_r}_{\text{k'ıncı}}\wedge\cdots\wedge e_n \\
& -\sum_{i,k=1}^{n}\sum_{r=n+1}^{m-1} \varepsilon_i\varepsilon_r h^r_{ik} e_i\wedge e_1\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_r}_{\text{k'ıncı}}\wedge\cdots\wedge e_n \\
& +\sum_{i,k=1}^{n}\sum_{r=n+1}^{m-1} \varepsilon_i\varepsilon_k\varepsilon_r h^r_{ik}h^r_{ki}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge e_n \\
& -\sum_{i,k=1}^{n}\sum_{r,s=n+1}^{m-1} \varepsilon_i\varepsilon_r\varepsilon_s h^r_{ik}\omega_{rs}(e_i)\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_r}_{\text{k'ıncı}}\wedge\cdots\wedge e_n \\
& -\sum_{\substack{i,j,k,l=1\\ j\neq k}}^{n}\sum_{r=n+1}^{m-1} \varepsilon_i\varepsilon_\ell\varepsilon_r h^r_{il}\omega_{j\ell}(e_i)\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_\ell}_{\text{j'inci}}\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_r}_{\text{k'ıncı}}\wedge\cdots\wedge e_n \\
& -\sum_{i,j,k=1}^{n}\sum_{r,s=n+1}^{m-1} \varepsilon_i\varepsilon_r\varepsilon_s h^r_{ik}h^s_{ij}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_s}_{\text{j'inci}}\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_r}_{\text{k'ıncı}}\wedge\cdots\wedge e_n
\end{aligned} \tag{2.39}
$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılarak

$$
\begin{aligned}
\Delta\tilde{\nu} = & \|h\|^2\tilde{\nu} + nH\wedge e_1\wedge\cdots\wedge e_n \\
& -n\sum_{k=1}^{n}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge \underbrace{D_{e_k}H}_{\text{k'ıncı}}\wedge\cdots\wedge e_n \\
& -\sum_{\substack{i,j,k=1\\ j\neq k}}^{n}\sum_{r,s=n+1}^{m-1} \varepsilon_i\varepsilon_r\varepsilon_s h^r_{ik}h^s_{ij}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_s}_{\text{j'inci}}\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_r}_{\text{k'ıncı}}\wedge\cdots\wedge e_n
\end{aligned} \tag{2.40}
$$

ifadesine ulaşılır. Ayrıca, $D_{e_k}H = D_{e_k}\hat{H}$, $\|h\|^2 = \|\hat{h}\|^2 - n$, (2.18) ve (2.22) eşitlikleri kullanıldığında, yarı–küresel Gauss tasvirinin Laplasiyeni için aşağıdaki yardımcı teorem ifade edilir:

Yardımcı Teorem 2.2. *M_t, $\mathbb{S}^{m-1}_s$ yarı–küresinin t indeksli, n–boyutlu, yönlendirilmiş bir yarı–Riemann alt manifoldu olsun. Herhangi bir q pozitif tamsayısı ve $N = \binom{m}{n+1}$ için $\tilde{\nu} : M_t \longrightarrow G(n+1,m) \subset \mathbb{E}^N_q$ yarı–küresel Gauss tasvirinin Laplasiyeni*

$$
\begin{aligned}
\Delta\tilde{\nu} = & \|\hat{h}\|^2\tilde{\nu} + n\hat{H}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge e_n - n\sum_{k=1}^{n}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge \underbrace{D_{e_k}\hat{H}}_{\text{k'ıncı}}\wedge\cdots\wedge e_n \\
& + \sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n}\sum_{\substack{r,s=n+1,\\ r<s}}^{m-1} \varepsilon_r\varepsilon_s R^r_{sjk}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_r}_{\text{j'inci}}\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_s}_{\text{k'ıncı}}\wedge\cdots\wedge e_n,
\end{aligned} \tag{2.41}
$$

ile verilir. Burada, $R^r_{sjk} = R^D(e_j,e_k;e_r,e_s)$dır.

2.4 Sonlu Tipten Kavramı ve Temel Teoremler

Bu bölümde, 1970'li yılların sonlarına doğru B.-Y. Chen tarafından ortaya atılan sonlu tipten manifoldlar ve tasvirler kavramı üzerine durulacaktır ve bu çalışma boyunca kullanılacak olan konu ile ilgili bazı teoremlerden bahsedilecektir.

Tanım 2.25. *Kompakt bir M Riemann manifoldundan $\mathbb{E}^m$ Euclid uzayına olan $\mathbf{x} : M \longrightarrow \mathbb{E}^m$ izometrik daldırması, Laplace operatörünün özvektörlerinin sonlu toplamı olarak aşağıdaki gibi yazılabiliyorsa*

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_k, \qquad \Delta \mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k, \tag{2.42}$$

M manifolduna sonlu tipten manifold denir. Burada, $\mathbf{x}_0$, $\mathbb{E}^m$ uzayında sabit bir vektör, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$'lar $\mathbb{E}^m$–değerli tasvirler ve Δ, M üzerindeki metrikten indirgenmiş Laplace operatörüdür. Δ Laplace operatörünün $x_1, x_2, \ldots, x_k$ özvektörlerine karşılık gelen reel $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ özdeğerleri sıfırdan farklı ve ayrık ise, M manifolduna k–tipinden manifold denir.

$\mathbb{E}^m$ Euclid uzayındaki kompakt bir manifoldun sonlu tipten olup olmadığını belirlemek için [11] numaralı çalışmada aşağıdaki teorem verilmiştir.

Teorem 2.3. *[11] $\mathbf{x} : M \longrightarrow \mathbb{E}^m$, kompakt bir M Riemann manifoldundan $\mathbb{E}^m$ Euclid uzayına izometrik bir daldırma ve H, M manifoldunun $\mathbb{E}^m$ Euclid uzayındaki ortalama eğrilik vektörü olsun. Bu durumda, aşağıdaki ifadeler geçerlidir:*

i. *M manifoldunun sonlu tipten olması için gerek ve yeter koşul, $Q(\Delta)H = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir Q polinomunun var olmasıdır;*

ii. *M manifoldu sonlu tipten ise, $P(\Delta)H = 0$ olacak şekilde en küçük dereceli, monik P polinomu vardır ve tektir;*

iii. *M manifoldu k–tipinden olması için gerek ve yeter koşul, $deg(P) = k$ olmasıdır.*

Yukarıdaki teorem, H ortalama eğrilik vektörü yerine $\mathbf{x} - \mathbf{x_0}$ vektörü alındığı zaman da geçerlidir.

Sonlu tipten manifold tanımı ve yukarıda verilen teorem alt manifoldlar üzerinde tanımlanan diferansiyellenebilir tasvirler için de benzer şekilde verilir.

Kompakt bir M Riemann manifoldundan $\mathbb{E}^m$ Euclid uzayına tanımlanmış düzgün bir $\phi : M \longrightarrow \mathbb{E}^m$ tasviri,

$$\phi = \phi_0 + \phi_1 + \cdots + \phi_k, \qquad \Delta\phi_i = \lambda_i \phi_i, \;\; \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

şeklinde sonlu spektral açılıma sahipse, ϕ tasviri *sonlu tiptendir* denir. Burada, ϕ_0, $\mathbb{E}^m$ uzayında sabit bir vektör, $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_k$'lar $\mathbb{E}^m$–değerli tasvirlerdir. Δ Laplace operatörünün $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_k$ özvektörlerine karşılık gelen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ özdeğerleri ayrık ve sıfırdan farklı ise ϕ tasviri *k–tipindendir.*

Kompakt bir Riemann manifoldu üzerinde tanımlanan düzgün bir tasvirin sonlu tipten olması ile ilgili [11] numaralı çalışmada aşağıdaki teorem verilmiştir.

Teorem 2.4. *[11] $\phi : M \longrightarrow \mathbb{E}^m$, kompakt bir M Riemann manifoldu üzerinde düzgün bir tasvir ve $\tau = div(d\phi)$, ϕ tasvirinin gerilim alanı olsun. Bu durumda, aşağıdaki ifadeler geçerlidir:*

i. *ϕ tasvirinin sonlu tipten olması için gerek ve yeter koşul, $Q(\Delta)\tau = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir Q polinomunun var olmasıdır;*

ii. *ϕ tasviri sonlu tipten bir tasvir ise, $P(\Delta)\tau = 0$ olacak şekilde en küçük dereceli monik P polinomu vardır ve tektir;*

iii. *ϕ tasviri k–tipinden olması için gerek ve yeter koşul, $deg(P) = k$ olmasıdır.*

Yukarıdaki teorem, ϕ tasvirinin gerilim alanı τ yerine $\phi - \phi_0$ tasviri alındığı zamanda geçerlidir.

Teorem 2.3 ve Teorem 2.4'de bahsedilen P polinomu, sonlu tipten M manifoldunun veya sonlu tipten ϕ tasvirinin *minimal polinomu* olarak isimlendirilir.

Sonlu tipten manifoldlar ve sonlu tipten tasvir tanımında kompaktlık önemli bir koşuldur. Kompakt bir Riemann manifoldu üzerinde harmonik tasvirler sadece sabit tasvirlerden ibarettir. Dolayısıyla, kompakt olmayan manifoldlarda bir tasvirin harmonik olması bu tasvirin her zaman sabit olduğunu söylemez. [3] numaralı çalışmada, B.-Y. Chen tarafından sonlu tipten tasvir tanımı kompakt olmayan manifoldlar için benzer şekilde verilmiştir. Sıfırlı k–tipinden manifold veya sıfırlı k–tipinden tasvir olarak adlandırılan yeni bir tanım ortaya atılmıştır.

Tanım 2.26. *$\phi : M \longrightarrow \mathbb{E}^m$, M Riemann manifoldundan $\mathbb{E}^m$ Euclid uzayına tanımlanan düzgün tasvir Laplace operatörünün özvektörlerinin sonlu toplamı şeklinde, yani ϕ tasviri aşağıdaki şekilde ifade edilebiliyorsa*

$$\phi = \phi_1 + \cdots + \phi_k, \qquad \Delta\phi_i = \lambda_i\phi_i, \;\; \lambda_i \in \mathbb{R} \quad i = 1,2,\ldots,k, \tag{2.43}$$

ϕ tasvirine sonlu tipten tasvir denir. Burada, $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_k$'lar $\mathbb{E}^m$–değerli tasvirler ve Δ, M üzerindeki metrikten indirgenmiş Laplace operatörüdür. Δ Laplace operatörünün özdeğerleri olan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$'lar sıfırdan farklı ayrık ise, ϕ tasviri k–tipinden ve $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$'larden en az biri sıfır ise, ϕ tasvirine sıfırlı k–tipinden tasvir denir.

Ayrıca, M manifoldu kompakt değilse, Teorem 2.3 ve Teorem 2.4'de bahsedilen bir polinomun varlığı, M manifoldunun sonlu tipten veya ϕ tasvirinin sonlu tipten olmasını gerektirmez. [31] numaralı çalışmada aşağıdaki ifade gösterilmiştir:
M manifoldu 1–boyutlu veya P polinomunun k tane ayrık kökü varsa, P polinomunun varlığı kompakt olmayan M manifoldunun sonlu tipten olduğunu söyler.

Benzer şekilde, [4] numaralı çalışmada, sonlu tipten alt manifold ve sonlu tipten tasvir tanımları ve teoremler benzer şekilde yarı–Euclid uzayının alt manifoldları ve düzgün tasvirler için verilmiştir. Kompakt olmayan manifoldlarla ilgili ifadelerin yarı–Riemann manifoldları için de geçerli olduğu [4] ve [31] çalışmalarında gösterilmiştir. [32] numaralı çalışmada ise, yarı–Euclid uzayındaki alt manifoldların üzerinde tanımlanan düzgün tasvirlerin sonlu tipten olması ile ilgili aşağıdaki teorem elde edilmiştir.

Teorem 2.5. *[32] $\phi : M_t \longrightarrow \mathbb{E}^m_s$, indeksi t olan M_t yarı–Riemann alt manifoldundan $\mathbb{E}^m_s$ yarı–Euclid uzayına düzgün bir tasvir ve $\tau = div(d\phi)$, ϕ tasvirinin gerilim alanı olsun. Bu durumda,*

i. $Q(\Delta)\tau = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı Q polinomu varsa, ϕ tasviri $k \leq deg(Q)+1$ sağlayan k–tipinden veya sonsuz tiptendir;

ii. $P(\Delta)\tau = 0$ olacak şekilde kökleri basit olan sıfırdan farklı P polinomu varsa, ϕ tasviri $k \leq deg(P)$ sağlayan k–tipindendir.

[33] numaralı çalışmada, sonlu tipten tasvir tanımı yarı–küre ve yarı–hiperbolik uzaylar için aşağıdaki şekilde verilmiştir:

Tanım 2.27. *$\phi : M_t \longrightarrow \mathbb{S}_s^{m-1} \subset \mathbb{E}_s^m$ (veya $\phi : M_t \longrightarrow \mathbb{H}_{s-1}^{m-1} \subset \mathbb{E}_s^m$) indeksi t olan yarı–Riemann M_t alt manifoldundan $\mathbb{S}_s^{m-1}$ yarı–küresine (veya $\mathbb{H}_{s-1}^{m-1}$ yarı–hiperbolik uzayına) düzgün bir tasvir olsun. ϕ tasviri*

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_k \tag{2.44}$$

şeklinde bir spektral açılıma sahip ise, ϕ tasvirine $\mathbb{S}_s^{m-1}$ uzayı (veya $\mathbb{H}_{s-1}^{m-1}$ uzayı) içinde sonlu tipten bir tasvir denir. Burada, ϕ_i'ler sabit olmayan $\mathbb{E}_s^m$ değerli Δ Laplace operatörünün özvektörleridir. Yani, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ için, $\Delta\phi_i = \lambda_i\phi_i$, $i = 1,\ldots,k$ bağıntısını sağlar. (2.44) *spektral açılımı, k tane sabit olmayan terim içeriyorsa, ϕ tasviri k–tipinden ve λ_i özdeğerlerinden biri sıfır ise, ϕ tasviri sıfırlı k–tipinden olarak adlandırılır.*

Ancak, (2.44) denklemindeki spektral açılımda, terimlerden biri hala sabit olabilir. İlerleyen bölümlerde tasvirin spektral açılımının sıfırdan farklı sabit terim içerip içermemesine göre sınıflandırma ve karakterizasyon teoremleri ayrı ayrı elde edilecektir.

Sonuç 2.1. *[33] $\phi : M \longrightarrow \mathbb{S}_s^{m-1}(c) \subset \mathbb{E}_s^m$, bir M yarı–Riemann manifoldundan $\mathbb{S}_s^{m-1}(c)$ yarı–küresine düzgün bir tasvir olsun. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ ikişerli ayrık kökler olmak üzere, $P(\Delta)(\phi) = 0$ şartını sağlayan $P(t) = \prod_{i=1}^{k}(t-\lambda_i)$ polinomu varsa, ϕ tasviri sonlu tiptendir. Özel olarak, ϕ tasvirinin 1–tipinden olması gerek ve yeter koşul, λ reel sayısı için, $\Delta\phi = \lambda\phi$ denkleminin sağlanmasıdır.*

2.5 Noktasal 1–Tipinden Gauss Tasviri

Euclid veya yarı–Euclid uzayının bir alt manifoldunun ν Gauss tasviri 1–tipinden ise, ν tasviri bir λ sabiti ve bir C sabit vektörü için, $\Delta\nu = \lambda(\nu + C)$ denklemini sağlaması gerekir. [21] ve [22] numaralı çalışmalarda, 3–boyutlu Euclid uzayında katenoid, helikoid gibi bazı önemli yüzeyler ile daha yüksek boyutlu Euclid ve yarı–Euclid uzaylarında Clifford tor yüzeyi, küresel n–koniler, Enneper hiperyüzeyi gibi birçok alt manifoldun Gauss tasvirlerinin bu denklemi λ sabitinin bir fonksiyon olması durumunda sağladığı gösterilmiştir. Bu da aşağıda bahsedilen noktasal 1–tipinden Gauss tasviri diye adlandırılan yeni bir tanımın ortaya çıkmasına neden olmuştur.

Tanım 2.28. *M, $\mathbb{E}^m$ Euclid uzayının bir alt manifoldu olsun. M alt manifoldunun ν Gauss tasviri,*

$$\Delta\nu = f(\nu + C) \tag{2.45}$$

eşitliğini bir $f : M \to \mathbb{R}$ düzgün fonksiyonu ve bir C sabit vektörü için sağlıyorsa, ν Gauss tasviri, noktasal 1–tipinden Gauss tasviri olarak isimlendirilir. Ayrıca, (2.45) *denklemi $C = 0$ için sağlanıyorsa, Gauss tasvirine birinci çeşit noktasal 1–tipinden, $C \neq 0$ ve $f \neq 0$ için sağlanıyorsa, Gauss tasvirine ikinci çeşit noktasal 1–tipinden denir.*

Noktasal 1–tipinden Gauss tasviri tanımı yarı–Euclid uzayı için de benzer şekilde verilebilir. (2.45) denklemindeki f tasviri sabit ise, ν tasviri *global 1–tipinden Gauss tasviri* olarak adlandırılır.

M, $\mathbb{E}^4_s$, $s = 1,2$, yarı–Euclid uzayında bir yüzey olsun. $\mathbb{E}^4_s$ uzayında e_1, e_2 vektörleri M yüzeyine teğet, e_3, e_4 vektörleri M yüzeyine normal olmak üzere, M için $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ yönlendirilmiş ortonormal çatı alanı seçilebilir.

Bu durumda,$\{e_A \wedge e_B \mid 1 \leq A < B \leq 4\}$ kümesi $\bigwedge^2 \mathbb{E}^4_s \cong \mathbb{E}^6_q$ yarı–Euclid uzayı için bir ortonormal baz verir. $C \in \mathbb{E}^6_q$ olduğundan C vektörü

$$C = \sum_{1 \leq A < B \leq 4} \varepsilon_A \varepsilon_B C_{AB} e_A \wedge e_B \tag{2.46}$$

şeklinde ifade edilir. Burada, $C_{AB} = \langle\langle C, e_A \wedge e_B \rangle\rangle$ dır. Ayrıca, $s = 1$ ise $q = 3$, $s = 2$ ise $q = 4$ olur.

Yardımcı Teorem 2.3. *$\bigwedge^2 \mathbb{E}^4_s \cong \mathbb{E}^6_q$ yarı–Euclid uzayında,* (2.46) *denklemi ile tanımlanan C vektörünün sabit olması için gerek ve yeter koşul, aşağıdaki denklem sisteminin $i = 1,2$ için sağlanmasıdır:*

$$\begin{aligned}
e_i(C_{12}) &= \varepsilon_3 h^3_{i2} C_{13} + \varepsilon_4 h^4_{i2} C_{14} - \varepsilon_3 h^3_{i1} C_{23} - \varepsilon_4 h^4_{i1} C_{24}, && (2.47)\\
e_i(C_{13}) &= -\varepsilon_2 h^3_{i2} C_{12} + \varepsilon_4 \omega_{34}(e_i) C_{14} + \varepsilon_2 \omega_{12}(e_i) C_{23} - \varepsilon_4 h^4_{i1} C_{34}, && (2.48)\\
e_i(C_{14}) &= -\varepsilon_2 h^4_{i2} C_{12} - \varepsilon_3 \omega_{34}(e_i) C_{13} + \varepsilon_2 \omega_{12}(e_i) C_{24} + \varepsilon_3 h^3_{i1} C_{34}, && (2.49)\\
e_i(C_{23}) &= \varepsilon_1 h^3_{i1} C_{12} - \varepsilon_1 \omega_{12}(e_i) C_{13} + \varepsilon_4 \omega_{34}(e_i) C_{24} - \varepsilon_4 h^4_{i2} C_{34}, && (2.50)\\
e_i(C_{24}) &= \varepsilon_1 h^4_{i1} C_{12} - \varepsilon_1 \omega_{12}(e_i) C_{14} - \varepsilon_3 \omega_{34}(e_i) C_{23} + \varepsilon_3 h^3_{i2} C_{34}, && (2.51)\\
e_i(C_{34}) &= \varepsilon_1 h^4_{i1} C_{13} - \varepsilon_1 h^3_{i1} C_{14} + \varepsilon_2 h^4_{i2} C_{23} - \varepsilon_2 h^3_{i2} C_{24}. && (2.52)
\end{aligned}$$

2.6 $\mathbb{E}^4$ Euclid Uzayında Dönme ve Dönel Yüzeyler

Bu bölümde, $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında dönme kavramı ve dönel yüzeylerden bahsedilecektir. Bunun için öncellikle, ortogonal grup tanımı ve bu grubun özellikleri verilecektir.

$\mathbb{E}^m$ Euclid uzayının lineer izometrilerinin, yani uzaklık koruyan dönüşümlerin, oluşturduğu gruba *ortogonal grup* denir ve $O(m)$ ile gösterilir. Yani, $A \in O(m)$ ve $v, w \in \mathbb{E}^m$ olmak üzere,

$$\langle Av, Aw \rangle = \langle v, w \rangle$$

şeklindedir. Ayrıca, bu denklemden $A^T = A^{-1}$ olduğu görülür. Burada, A^T,A^{-1} ile, sırasıyla, A matrisinin transpozesi ve tersi gösterilmektedir.

Bu durumda, $GL(m,\mathbb{R})$, $m \times m$ ve tersi olan matrislerin grubu olmak üzere, $O(m)$ ortogonal grubun tanımı aşağıdaki şekilde verilebilir:

$$O(m) = \{A \in GL(m,\mathbb{R}) \mid A^T = A^{-1}\}.$$

$A \in O(m)$ ise, $\det A = \pm 1$ olur. Bu nedenle, $O(m)$'nin iki tane bağlantılı bileşeni vardır. Bunlardan birisi *özel ortogonal grup* olarak isimlendirilen $SO(m)$

$$SO(m) = \{A \in O(m) \mid \det A = 1\}$$

alt grubudur.

Benzer şekilde, $\mathbb{E}^m_s$ yarı–Euclid uzayının lineer izometrilerinin, yani, uzaklık koruyan dönüşümlerin, oluşturduğu gruba *yarı–ortogonal grup* denir ve $O_s(m)$ ile gösterilir.

Teorem 2.6. *[27] A, $m \times m$ bir matris olmak üzere, aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:*

i. $A \in O_s(m)$

ii. $A^T = \varepsilon A^{-1} \varepsilon$, *burada* $\varepsilon = (\delta_{ij})\varepsilon_j$, $i, j = 1, \ldots, m$, *köşegen bir matristir.*

iii. A matrisinin satırları veya sütunları, $\mathbb{E}^m_s$ *yarı–Ruclid uzayı için ortonormal bir bazdır.*

iv. A matrisi, $\mathbb{E}^m_s$ *uzayının bir ortonormal bazını başka bir ortonormal bazına götürür.*

[34] numaralı çalışmada, dönme tanımını verilmiş ve 4–boyutlu Euclid uzayındaki dönel yüzeyler üzerine sonuçlar elde edilmiştir.

Tanım 2.29. $\mathbb{E}^4$ *Euclid uzayında uzaklığı koruyan ve bir noktayı sabit bırakan pozitif determinatlı lineer dönüşümlere dönme denir.*

$\mathbb{E}^4$ uzayında kesişimleri tek bir nokta olan iki düzleme *tamamiyle birbirine dik düzlemler* denir. Bir dönme matrisi, birbirine tamamiyle dik iki düzlemi düzlemsel olarak değişmez bırakıyorsa, *genel dönme* veya *çift dönme* ve birbirine dik bu iki düzlemden bir tanesini noktası noktasına değişmez bırakıyor ise, *basit dönme* olarak isimlendirilir.

$\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında genel dönme matrisi

$$G(a,b) = \begin{pmatrix} \cos at & -\sin at & 0 & 0 \\ \sin at & \cos at & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos bt & -\sin bt \\ 0 & 0 & \sin bt & \cos bt \end{pmatrix} \tag{2.53}$$

şeklindedir. Bu dönme hareketinde birbirine dik x_1x_2 ve x_3x_4–düzlemleri düzlemsel olarak değişmez kalırlar. Burada, a ve b, sırasıyla, x_1x_2 ve x_3x_4–düzlemlerinin dönme oranlarını göstermektedir.

Ayrıca, genel dönme matrisi altında bir noktanın görüntüsü her zaman çember olmak zorunda değildir. Örneğin, $p = (p_1, p_2, p_3, p_4) \in \mathbb{R}^4$ noktasının (2.53) dönme matrisi altındaki yörüngesi

$$\begin{aligned} \gamma(t) =&(p_1 \cos at + p_2 \sin at, p_1 \sin at - p_2 \cos at, \\ &p_3 \cos bt + p_4 \sin bt, p_3 \sin bt - p_4 \cos bt) \end{aligned}$$

olur. Özel olarak, dönme oranları eşit alındığında $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 = p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_4^2$ elde edilir. Yani, $\gamma(t)$ eğrisi merkezi orjinde ve yarıçapı $\sqrt{p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_4^2}$ olan bir çemberi ifade eder.

$a = 0$ ve $b = 1$ durumunda, (2.53) dönme matrisi basit bir dönme verir ve

$$G(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

şeklinde olur. $G(0,1)$ dönme matrisi x_1x_2–düzlemini noktası noktasına sabit bırakırken, x_3x_4–düzlemini küme olarak değişmez bırakmaktadır.

$p = (p_1, p_2, p_3, p_4) \in \mathbb{R}^4$ noktasının $G(0,1)$ matrisi altındaki yörüngesi

$$\gamma(t) = (p_1, p_2, p_3 \cos t + p_4 \sin t, -p_3 \sin t + p_4 \cos t)$$

şeklindedir. $(x_1-p_1)^2+(x_2-p_2)^2+x_3^2+x_4^2=p_3^2+p_4^2$ olur. Bu durumda, $\gamma(t)$ eğrisi merkezi $(p_1,p_2,0,0)$ noktasında olan, $\sqrt{p_3^2+p_4^2}$ yarıçaplı çemberi ifade etmektedir.

Ayrıca, iki basit dönmenin bileşkesi her zaman yine bir basit dönme olmak zorunda değildir. Bununla ilgili olarak aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 2.7. *Basit dönmeler dışında kalan bütün dört boyutlu dönmeler, sabit bıraktıkları düzlemler tamamiyle birbirine dik olan iki basit dönmenin bileşkesi olarak yazılabilirler.*

Bu durumda, (2.53) ile verilen dönme matrisi iki basit dönmenin bileşkesidir.

[34] numaralı çalışmada, $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayındaki dönel yüzeylerin tanımı aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Tanım 2.30. $\mathbb{E}^4$ *uzayının bir dönme matrisi altında değişmez kalan yüzeye,* $\mathbb{E}^4$ *Euclid uzayında bir dönel yüzey denir.*

$\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında, düzgün ve regüler

$$\beta(s)=(x(s),y(s),z(s),w(s)),\ \ s\in I\subset\mathbb{R}$$

eğrisi göz önüne alınsın. $\beta(s)$ eğrisinin (2.53) dönme matrisi altındaki yörüngesi

$$\begin{aligned} r(s,t)=&(x(s)\cos at-y(s)\sin at, x(s)\sin at+y(s)\cos at,\\ &z(s)\cos bt-w(s)\sin bt, z(s)\sin bt+w(s)\cos bt) \end{aligned} \tag{2.54}$$

ile verilir. Burada, a ve b dönme oranlarıdır. $r(s,t)$ vektörünün (2.53) dönüşümü altında değişmez kaldığı gösterilebilir. Bu durumda, (2.54) denklemi $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında, düzgün ve regüler β profil eğrisine sahip dönel yüzeyi ifade eder.

3. YARI–EUCLİD UZAYINDA NOKTASAL 1–TİPİNDEN GAUSS TASVİRİNE SAHİP DÖNEL YÜZEYLER

3.1 $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski Uzayında Çift Dönmeli Dönel Yüzeyler

[34] numaralı çalışmada, C. L. Moore tarafından 4–boyutlu Euclid uzayında genel dönel yüzeyleri tanımlanmıştır. Bu fikir kullanılarak, U. Dursun [35] numaralı çalışmada, 4–boyutlu Minkowski uzayı için dönme ve genel dönel yüzey aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

a ve b sabit olmak üzere, $\mathbb{E}_1^4$ uzayının

$$G_{(a,b)} = \left\{ B_t(a,b) = \begin{pmatrix} \cos at & \sin at & 0 & 0 \\ -\sin at & \cos at & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh bt & \sinh bt \\ 0 & 0 & \sinh bt & \cosh bt \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \tag{3.1}$$

şeklinde bir dönüşüm alt grubu göz önüne alınırsa, $B_t(a,b)$ matrisinin $O_1(4)$ yarı–ortogonal grubunun bir elemanı olduğu gösterilir. Dolayısıyla, $B_t(a,b)$ matrisi $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayında bir dönme verir.

$\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayında

$$\beta(s) = (x(s), y(s), z(s), w(s)),\ s \in I \subset \mathbb{R}$$

eğrisi göz önüne alınsın. Bu eğrinin (3.1) dönüşümü altındaki yörüngesi aşağıdaki vektör ile verilir:

$$\begin{aligned} M : F(s,t) = \Big(& x(s)\cos at - y(s)\sin at,\ x(s)\sin at + y(s)\cos at, \\ & z(s)\cosh bt + w(s)\sinh bt,\ z(s)\sinh bt + w(s)\cosh bt \Big). \end{aligned} \tag{3.2}$$

$F(s,t)$ vektörü (3.1) dönme matrisi altında değişmez kalır. Bu durumda, β profil eğrisine sahip yer vektörü (3.2) ile verilen M yüzeyine *genel dönel yüzey* veya *çift dönmeli dönel yüzey* olarak isimlendirilir. a ve b sabitlerinden biri sıfır ise, M dönel yüzeyine *basit bir dönel yüzey* denir. Bu çalışmada, basit dönel yüzeyler incelenmediğinden $ab \neq 0$ olduğu varsayılacaktır.

3.1.1 Noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip çift dönmeli zamansal dönel yüzeyler

[35] numaralı çalışmada, $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayındaki çift dönmeli uzaysal dönel yüzeyler çalışılmış ve bu yüzeylerden noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip olanlar sınıflandırılmıştır. Bu bölümde ise, $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayındaki profil eğrisi 2–boyutlu zamansal düzlemde kalan çift dönmeli zamansal dönel yüzeylerden noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip olanlar incelenecektir.

$\mathbb{E}_1^2$ uzayında yay uzunluğuna göre parametrelenmiş düzgün ve regüler

$$\beta(s) = (x(s), w(s)),\ s \in I \subset \mathbb{R}$$

zamansal eğrisi göz önüne alınsın. Bu durumda, β eğrisinin koordinat fonksiyonları $x'^2(s) - w'^2(s) = -1$ eşitliğini sağlar. β düzlemsel bir eğri olduğundan, eğriliği $\kappa(s) = w'(s)x''(s) - x'(s)w''(s)$ ile verilir. Düzlemsel $\beta(s)$ eğrisi $\mathbb{E}_1^4$ uzayına zamansal x_1x_4–düzleminde kalacak şekilde

$$\beta(s) = (x(s), 0, 0, w(s))$$

olarak daldırılabilir. Bu durumda, (3.2) denkleminde, $y(s) = z(s) = 0$ olarak yazılırsa

$$M : r(s,t) = (x(s)\cos at, x(s)\sin at, w(s)\sinh bt, w(s)\cosh bt),\ s \in I, t \in \mathbb{R} \tag{3.3}$$

elde edilir. (3.3) denklemi β profil eğrisi 2–boyutlu zamansal düzlemde kalan çift dönmeli zamansal dönel yüzeyi gösterir.

$\mathbb{E}_1^4$ uzayında e_1, e_2 vektörleri M'ye teğet ve e_3, e_4 vektörleri M'ye normal olacak şekilde M yüzeyi üzerinde tanımlı $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ şeklinde yönlendirilmiş bir ortonormal çatı alanı

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial s}, \quad e_2 = \frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial t}, \tag{3.4}$$

$$e_3 = (w'\cos at, w'\sin at, x'\sinh bt, x'\cosh bt), \tag{3.5}$$

$$e_4 = \frac{1}{q}(bw\sin at, -bw\cos at, ax\cosh bt, ax\sinh bt), \tag{3.6}$$

olarak seçilebilir. Burada $q = \sqrt{a^2x^2(s) + b^2w^2(s)} \neq 0$ şeklindedir. Ayrıca, $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = -1$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 1$ olarak bulunur. Dolayısıyla, M yüzeyi zamansaldır.

Gerekli hesaplamalar yapılarak, M yüzeyine ait ikinci esas formun katsayıları ve konneksiyon formları

$$h_{11}^3 = \kappa, \qquad h_{22}^3 = -\frac{a^2xw' + b^2wx'}{a^2x^2 + b^2w^2}, \tag{3.7}$$

$$h_{12}^4 = \frac{ab(xw' - wx')}{a^2x^2 + b^2w^2}, \qquad h_{11}^4 = h_{22}^4 = h_{12}^3 = 0, \tag{3.8}$$

$$\omega_{12}(e_1) = 0, \qquad \omega_{12}(e_2) = \frac{a^2xx' + b^2ww'}{a^2x^2 + b^2w^2}, \tag{3.9}$$

$$\omega_{34}(e_1) = 0, \qquad \omega_{34}(e_2) = \frac{ab(xx' - ww')}{a^2x^2 + b^2w^2} \tag{3.10}$$

şeklinde elde edilir. İkinci esas formun bileşenleri göz önünde bulundurulduğunda, M yüzeyinin H ortalama eğrilik vektörü ve R^D normal eğrilik tensörü, sırasıyla,

$$H = \frac{1}{2}(h_{22}^3 - h_{11}^3)e_3, \tag{3.11}$$

$$R^D(e_1, e_2; e_3, e_4) = h_{12}^4(h_{11}^3 + h_{22}^3) \tag{3.12}$$

olarak hesaplanır. Diğer taraftan, (2.17) Codazzi denkleminden de

$$e_1(h_{22}^3) = -\omega_{12}(e_2)(h_{11}^3 + h_{22}^3) - h_{12}^4\omega_{34}(e_2), \tag{3.13}$$

$$e_1(h_{12}^4) = -2\omega_{12}(e_2)h_{12}^4 + h_{11}^3\omega_{34}(e_2) \tag{3.14}$$

ifadeleri elde edilir.

3.1.1.1 Birinci çeşit noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip olan dönel yüzeyler

Yer vektörü (3.3) denklemi ile verilen, zamansal dönel yüzeylerden birinci çeşit noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip olanların sınıflandırılabilmesi için ilk olarak $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayında, birinci çeşit noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip zamansal yüzeylerin karakterizasyonu ile ilgili aşağıdaki teoremler verilecektir:

Teorem 3.1. $\mathbb{E}_1^4$ *Minkowski uzayında, sıfır ortalama eğriliğe sahip, yönlendirilmiş zamansal bir yüzeyin birinci çeşit noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul, bu yüzeyin normal konneksiyonunun düz olmasıdır. Bu durumda, yüzeyin Gauss tasviri* (2.45) *denklemini* $f = \|h\|^2$ *ve* $C = 0$ *için sağlar.*

İspat. M, $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayında, sıfır ortalama eğriliğe sahip, yönlendirilmiş zamansal bir yüzey olsun. $H = 0$ olduğundan, $\mathrm{tr}A_3 = \mathrm{tr}A_4 = 0$ olur. Bu durumda, (2.32) denkleminden M yüzeyinin ν Gauss tasvirinin birinci çeşit noktasal 1–tipinden olması için gerek ve yeter koşul, R^D normal eğrilik tensörünün özdeş olarak sıfıra eşit olmasıdır. Diğer bir deyişle, yüzeyin normal konneksiyonunun düz olmasıdır. □

Teorem 3.2. $\mathbb{E}_1^4$ *Minkowski uzayında, sıfırdan farklı ortalama eğriliğe sahip, yönlendirilmiş zamansal yüzeyin birinci çeşit noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul, bu yüzeyin ortalama eğrilik vektörünün paralel olmasıdır.*

İspat. M, $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayında, sıfırdan farklı ortalama eğriliğe sahip, yönlendirilmiş zamansal bir yüzey olsun. İlk olarak, yüzeyin Gauss tasviri ν birinci çeşit noktasal 1–tipinden olduğu kabul edilsin. Bu durumda, (2.32) denkleminden, $R^D \equiv 0$ ve

$$\nabla(\text{tr}A_3) \wedge e_4 + e_3 \wedge \nabla(\text{tr}A_4) + 2\sum_{j=1}^{2} \varepsilon_j \omega_{34}(e_j) H \wedge e_j = 0 \tag{3.15}$$

bulunur. $R^D \equiv 0$ olduğundan, $\omega_{34} = 0$ olacak şekilde $\{e_3, e_4\}$ ortonormal bazı seçilebilir. Dolayısıyla, (3.15) denkleminden, $\nabla(\text{tr}A_3) = \nabla(\text{tr}A_4) = 0$ olur. $\omega_{34} = 0$ ve $\nabla(\text{tr}A_3) = \nabla(\text{tr}A_4) = 0$ olduğundan, H vektörü paraleldir.

Yeter koşulun ispatı için, M yüzeyi sıfırdan farklı paralel H ortalama eğrilik vektörüne sahip olsun. [36] numaralı çalışmadaki Yardımcı Teorem 2.2'den, $R^D \equiv 0$ olduğu görülür. Benzer şekilde, $\omega_{34} = 0$ olacak şekilde, $\{e_3, e_4\}$ ortonormal bazı seçilebilir ve $\nabla(\text{tr}A_3) = \nabla(\text{tr}A_4) = 0$ olur. Dolayısıyla, (2.32) denkleminden $\Delta\nu = \|h\|^2\nu$ elde edilir, yani, ν birinci çeşit noktasal 1–tipindendir. $\square$

Açıklama 3.1. Yarı–Euclid uzayındaki bir düzlemin Gauss tasviri ν sabittir. Dolayısıyla, $\Delta\nu = 0$ olur. $\Delta\nu = 0.\nu$ şeklinde yazılabileceğinden, ν Gauss tasviri birinci çeşit noktasal 1–tipindendir. Diğer taraftan, $C = -\nu$ olarak seçilirse, ν Gauss tasviri ikinci çeşit noktasal 1–tipinden olur. Bu durumda, yarı–Euclid uzayındaki bir düzlemin Gauss tasviri hem birinci çeşit hem de ikinci çeşit noktasal 1–tipinden olur.

Teorem 3.3. $\mathbb{E}_1^4$ *Minkowski uzayında, yer vektörü* (3.3) *ile verilen zamansal bir dönel yüzeyin ortalama eğriliğinin sıfır ve normal demetinin düz olması için gerek ve yeter koşul, bu yüzeyin zamansal bir düzlemin açık bir parçası olmasıdır.*

İspat. M, $\mathbb{E}_1^4$ uzayında, yer vektörü (3.3) denklemi ile verilen sıfır ortalama eğriliğe ve düz normal konneksiyona sahip zamansal bir dönel yüzey olsun. Bu durumda, $\mathbb{E}_1^4$ uzayı içinde M üzerinde, (3.4)–(3.6) ile verilen $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ yönlendirilmiş ortonormal çatı alanı seçilebilir ve bu yüzeye ait büyüklükler (3.7)–(3.10) denklemleri ile verilir. $h^3_{11} = \kappa$ olmak üzere, (3.11) ve (3.12)'den

$$h^3_{22} - \kappa = 0, \tag{3.16}$$

$$h^4_{12}(\kappa + h^3_{22}) = 0 \tag{3.17}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklemlerden, $h^4_{12}\kappa = 0$ bulunur. Bu durumda, $\kappa = 0$ veya $h^4_{12} = 0$ olur.

1. Durum: $\kappa = 0$ olsun. Yani, M yüzeyinin β profil eğrisi bir doğru olur. Bu durumda, β eğrisinin yay uzunluğuna göre bir parametrizasyonu

$$x(s) = x_0 s + x_1, \quad w(s) = w_0 s + w_1 \tag{3.18}$$

olarak seçilebilir. Burada, x_0, w_0, x_1, w_1 sabitlerdir ve $x_0^2 - w_0^2 = -1$ ilişkisi vardır. Ayrıca, (3.16) denkleminden, $h^3_{22} = 0$ olur. Bu durumda, (3.7) ve (3.18) denklemlerinden

$$h^3_{22} = -\frac{(a^2+b^2)x_0 w_0 s + a^2 w_0 x_1 + b^2 x_0 w_1}{a^2(x_0 s + x_1)^2 + b^2(w_0 s + w_1)^2} = 0$$

elde edilir. Bu ifadeden

$$(a^2+b^2)x_0 w_0 = 0, \tag{3.19}$$

$$a^2 w_0 x_1 + b^2 x_0 w_1 = 0 \tag{3.20}$$

denklem sistemi bulunur. $ab \neq 0$ varsayımı ve (3.19) bağıntısından, $x_0 w_0 = 0$ elde edilir. Ancak, $x_0^2 - w_0^2 = -1$ olduğundan, w_0'ın sıfırdan farklı olması gerektiği görülür. Bu durumda, $x_0 = 0$, yani, $x = 0$ olur. Dolayısıyla, M yüzeyi zamansal x_3x_4–düzleminin açık bir parçasıdır.

2. Durum: $h^4_{12} = 0$ olsun. (3.8) denkleminden, $xw' - wx' = 0$ bulunur. Bu diferansiyel denklemin çözümü, c_0 sabit olmak üzere, $x = c_0 w$ olarak elde edilir. Bu durumda, $h^3_{11} = \kappa = 0$ ve (3.16) denkleminden ise, $h^3_{22} = 0$ olur. Ayrıca, h^3_{22}'nin (3.7)'deki ifadesinden, $c_0(a^2+b^2)ww' = 0$ elde edilir. Ancak, β eğrisi yay uzunluğuna göre parametrelenmiş ve $x = c_0 w$ olduğundan, w ve w' sıfırdan farklı olmalıdır. Bu durumda, $c_0 = 0$ olur, yani, $x = 0$ olur. Sonuç olarak, M yüzeyi zamansal x_3x_4–düzleminin açık bir parçası olur.

Teoremin tersinin ispatı aşikardır. $\square$

Teorem 3.1 ve Teorem 3.3 kullanılarak aşağıdaki sonuca ulaşılır.

Sonuç 3.1. $\mathbb{E}_1^4$ *Minkowski uzayında, yer vektörü* (3.3) *ile verilen sıfır ortalama eğriliğe sahip Gauss tasviri birinci çeşit noktasal 1–tipinden olan düzlemsel olmayan, zamansal bir dönel yüzey yoktur.*

Teorem 3.4. $\mathbb{E}_1^4$ *Minkowski uzayında, yer vektörü* (3.3) *ile verilen sıfırdan farklı ortalama eğriliğe sahip, zamansal bir dönel yüzeyin paralel ortalama eğrilik vektörüne sahip olması için gerek ve yeter koşul, bu yüzeyin yer vektörü*

$$\begin{aligned} r(s,t) = \Bigg(& r_0 \cosh\left(\frac{s}{r_0}\right)\cos at,\ r_0 \cosh\left(\frac{s}{r_0}\right)\sin at,\ r_0 \sinh\left(\frac{s}{r_0}\right)\sinh bt, \\ & r_0 \sinh\left(\frac{s}{r_0}\right)\cosh bt \Bigg) \end{aligned} \tag{3.21}$$

ile verilen zamansal yüzeyin açık bir parçası olmasıdır. Bu yüzey, $S_1^3(r_0{}^{-2}) \subset \mathbb{E}_1^4$ *de Sitter uzayı içinde sıfır ortalama eğriliğe sahiptir.*

İspat. M, $\mathbb{E}_1^4$ uzayında yer vektörü (3.3) ile verilen sıfırdan farklı paralel ortalama eğrilik vektörüne sahip, zamansal bir yüzey olsun. $\mathbb{E}_1^4$ uzayı içinde M yüzeyi üzerinde, (3.4)–(3.6) ile verilen $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ yönlendirilmiş ortonormal çatı alanı seçilebilir ve bu yüzeye ait büyüklükler (3.7)–(3.10) denklemleri ile verilir. H paralel olduğundan, $i = 1,2$ için, $D_{e_i}H = 0$ dır. Bu durumda, (3.10) ve (3.11) denklemleri göz önüne alınırsa,

$$D_{e_2}H = \frac{ab(h_{22}^3 - h_{11}^3)(xx' - ww')}{2(a^2x^2 + b^2w^2)} e_4 \tag{3.22}$$

elde edilir. H sıfırdan farklı olduğundan, $h_{22}^3 - h_{11}^3 \neq 0$ dır. Yani, $xx' - ww' = 0$ olur. Bu diferansiyel denklemin çözümü $\mu_0 \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $x^2 - w^2 = \mu_0$ şeklindedir. Profil eğrisi zamansal bir eğri olduğundan, $\mu_0 > 0$ olmalıdır. $\mu_0 = r_0^2$ olarak isimlendirilirse

$$x(s) = r_0 \cosh\left(\frac{s}{r_0}\right), \quad w(s) = r_0 \sinh\left(\frac{s}{r_0}\right)$$

olur. Ayrıca, bu parametrizasyon için $D_{e_1}H = 0$ olduğu görülür. Bu durumda, M yer vektörü (3.21) ile verilen yüzeyin açık bir parçası olur. Ayrıca, $\langle r, r\rangle = r_0^2$ olduğundan M yüzeyi $\mathbb{S}_1^3(r_0{}^{-2})$ de Sitter uzayının içinde kalır ve doğrudan hesaplama ile $\mathbb{S}_1^3(r_0^{-2})$ uzayı içinde ortalama eğrilik vektörü $\hat{H} = 0$ olduğu görülür.

Teoremin yeter koşulunun ispatı doğrudan hesaplama ile elde edilir. $\square$

Teorem 3.2 ve Teorem 3.4 kullanılarak aşağıdaki sonuca ulaşılır.

Sonuç 3.2. $\mathbb{E}_1^4$ *Minkowski uzayında, yer vektörü* (3.3) *ile verilen, sıfırdan farklı ortalama eğriliğe sahip zamansal dönel yüzeyin Gauss tasvirinin birinci çeşit noktasal 1–tipinden olması için gerek ve yeter koşul, bu yüzeyin yer vektörü* (3.21) *ile verilen zamansal yüzeyin açık bir parçası olmasıdır.*

Yukarıda elde edilen sonuçlar kullanılarak, birinci çeşit noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip, çift dönmeli zamansal dönel yüzeylerle ilgili aşağıdaki sınıflandırma teoremi verilir:

Teorem 3.5. $\mathbb{E}_1^4$ *Minkowski uzayında, yer vektörü* (3.3) *ile verilen zamansal bir dönel yüzeyin birinci çeşit noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul, bu yüzeyin aşağıda verilen yüzeylerden birinin açık bir parçası olmasıdır:*

i. $\mathbb{E}_1^4$ *Minkowski uzayında zamansal bir düzlem;*

ii. $\mathbb{S}_1^3(r_0^{-2})$ *de Sitter uzayı içinde sıfır ortalama eğrilikli yer vektörü* (3.21) *ile verilen zamansal yüzey.*

Ayrıca, yer vektörü (3.21) *ile verilen zamansal yüzeyin* $\nu = e_3 \wedge e_4$ *Gauss tasviri* (2.45) *denklemini*

$$f = \|h\|^2 = \frac{2}{r_0^2}\left(1 - \frac{a^2b^2}{\left(a^2\cosh^2\left(\frac{s}{r_0}\right) + b^2\sinh^2\left(\frac{s}{r_0}\right)\right)^2}\right) \tag{3.23}$$

fonksiyonu ve $C = 0$ *vektörü için sağlar.*

Görüldüğü üzere, (3.23) denklemindeki f fonksiyonu sabit değildir. Dolayısıyla, $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayında global 1–tipinden Gauss tasvirine sahip, düzlemsel olmayan zamansal bir dönel yüzey yoktur.

3.1.1.2 İkinci çeşit noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip olan dönel yüzeyler

Bu bölümde, $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayında, yer vektörü (3.3) ile verilen çift dönmeli zamansal yüzeylerden ikinci çeşit noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip olanlar sınıflandırılacaktır.

Teorem 3.6. $\mathbb{E}_1^4$ *Minkowski uzayında, yer vektörü* (3.3) *ile verilen normal demeti düz zamansal bir dönel yüzeyin ikinci çeşit noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul, bu yüzeyin zamansal bir düzlemin açık parçası olmasıdır.*

İspat. M, $\mathbb{E}_1^4$ uzayında yer vektörü (3.3) ile verilen düz normal konneksiyona sahip zamansal bir dönel yüzey olsun. Bu durumda, $\mathbb{E}_1^4$ uzayında M yüzeyi üzerinde (3.4)–(3.6) ile verilen $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ yönlendirilmiş ortonormal çatı alanı seçilebilir ve bu yüzeye ait büyüklükler (3.7)–(3.10) denklemleri ile verilir. $R^D \equiv 0$ olduğundan, (3.12) denkleminden, $h_{12}^4 = 0$ veya $h_{11}^3 = -h_{22}^3 \neq 0$ olur.

1. Durum: $h_{12}^4 = 0$ olsun. (3.8) ifadesinden $xw' - wx' = 0$ elde edilir. Bu diferansiyel denklemin çözümü $x = c_0 w$ şeklindedir. Burada, c_0 sabittir. c_0 sıfırdan farklı bir sabit ise, M dönel yüzeyi zamansal regüler bir koni yüzeyi olur. Profil eğrisi β yay uzunluğuna göre parametrelendiğinden koordinat fonksiyonları

$$w = \pm\frac{1}{\sqrt{1-c_0^2}}s + w_0 \text{ ve } x = \pm\frac{c_0}{\sqrt{1-c_0^2}}s + c_0 w_0$$

olarak verilebilir. Burada, $c_0^2 < 1$ olmak üzere, c_0 ve w_0 sabitlerdir. Bu durumda, (3.9)–(3.10) denklemleri ile verilen M yüzeyi ile ilgili ifadeler aşağıdaki hali alır:

$$\begin{aligned} h_{11}^3 &= 0, & h_{22}^3 &= \mp\frac{c_0(a^2+b^2)}{\sqrt{1-c_0^2}(a^2c_0^2+b^2)w}, \\ h_{12}^3 &= 0, & h_{ij}^4 &= 0,\ i,j = 1,2, \\ \omega_{12}(e_1) &= 0, & \omega_{12}(e_2) &= \pm\frac{1}{\sqrt{1-c_0^2}w}, \\ \omega_{34}(e_1) &= 0, & \omega_{34}(e_2) &= \mp\frac{ab\sqrt{1-c_0^2}}{(a^2c_0^2+b^2)w}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Ayrıca, (2.32) denkleminden, M yüzeyinin ν Gauss tasvirinin Laplasiyeni

$$\Delta\nu = ||h||^2\nu + h_{22}^3\omega_{12}(e_2)e_1 \wedge e_4 - h_{22}^3\omega_{34}(e_2)e_2 \wedge e_3 \tag{3.25}$$

olarak hesaplanır. M yüzeyinin ν Gauss tasviri ikinci çeşit noktasal 1–tipinden ise, (2.45) ile (3.25) denklemleri karşılaştırıldığında

$$f(1+C_{34}) = \|h\|^2 = (h^3_{22})^2, \tag{3.26}$$

$$fC_{14} = -h^3_{22}\omega_{12}(e_2), \tag{3.27}$$

$$fC_{23} = -h^3_{22}\omega_{34}(e_2), \tag{3.28}$$

$$C_{12} = C_{13} = C_{24} = 0 \tag{3.29}$$

ifadelerine ulaşılır. (3.24) denkleminden, $h^3_{22}, \omega_{12}(e_2)$ ve $\omega_{34}(e_2)$'nin ve (3.27) ve (3.28) denklemlerinden, C_{14} ve C_{23} sıfırdan farklı olduğu görülür. Bu durumda, bu denklemlerden

$$\omega_{34}(e_2)C_{14} - \omega_{12}(e_2)C_{23} = 0 \tag{3.30}$$

elde edilir. Diğer taraftan, $i = 2$ için (2.48) denklemi yazılırsa aşağıdaki denkleme ulaşılır:

$$\omega_{34}(e_2)C_{14} + \omega_{12}(e_2)C_{23} = 0. \tag{3.31}$$

Ancak, bu iki denklemden $C_{14} = C_{23} = 0$ olarak bulunur. Bu ise, C_{14} ve C_{23} sıfırdan farklı olması ile çelişir. Bu durumda, M zamansal regüler koni yüzeyinin Gauss tasviri ikinci çeşit noktasal 1–tipinden olamaz. Yani, $c_0 = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla, M dönel yüzeyi zamansal bir düzlemin açık parçasıdır.

2. Durum: $h^3_{11} = -h^3_{22} \neq 0$ olsun. Yani, M, $\mathbb{E}^4_1$ Minkowski uzayında yarı–ombilik zamansal bir dönel yüzey olsun. Ayrıca, h^4_{12} sıfırdan farklıdır. Çünkü $h^4_{12} = 0$ ise, 1. Durumdan M zamansal dönel yüzeyi bir koni yüzeyi olur. Fakat, (3.24) denkleminden, koninin yarı–ombilik bir yüzey olmadığı görülür. Dolayısıyla, $h^4_{12} \neq 0$ dır.

(3.13) ve (3.14) denklemleri göz önünde alındığında, (2.32) denkleminden M yüzeyinin ν Gauss tasvirinin Laplasiyeni

$$\Delta\nu = ||h||^2\nu + 2h^4_{12}\omega_{34}(e_2)e_1 \wedge e_4 + 2h^3_{11}\omega_{34}(e_2)e_2 \wedge e_3 \tag{3.32}$$

olarak hesaplanır. Benzer şekilde, ν ikinci çeşit noktasal 1–tipinden ise aşağıdaki denklemlere ulaşılır:

$$f(1+C_{34}) = \|h\|^2, \tag{3.33}$$

$$fC_{14} = -2h^4_{12}\omega_{34}(e_2), \tag{3.34}$$

$$fC_{23} = 2h^3_{11}\omega_{34}(e_2), \tag{3.35}$$

$$C_{12} = C_{13} = C_{24} = 0. \tag{3.36}$$

Burada, $\omega_{34}(e_2) \neq 0$ olmalıdır. Dolayısıyla, (3.34) ve (3.35) denklemlerinden

$$h^3_{11}C_{14} + h^4_{12}C_{23} = 0 \tag{3.37}$$

bulunur. Diğer taraftan, $i = 1$ için (2.47) denklemi yazılırsa

$$h^4_{12}C_{14} - h^3_{11}C_{23} = 0 \tag{3.38}$$

elde edilir. ν tasviri ikinci çeşit noktasal 1–tipinden Gauss tasviri olduğundan, (3.37) ve (3.38) denklemlerinden oluşan sistemin sıfırdan farklı çözümü olmalıdır. Yani, $h^3_{11} = h^4_{12} = 0$ dır. Dolayısıyla, M yüzeyinin ikinci esas formu özdeş olarak sıfır olur. Bu durumda, M zamansal bir düzlemin açık parçasıdır.

Teoremin tersinin ispatı, Açıklama (3.1)'den elde edilir. □

Bu durumda, aşağıdaki sonuca ulaşılır.

Sonuç 3.3. $\mathbb{E}^4_1$ *Minkowski uzayında yer vektörü* (3.3) *ile verilen düz normal demete ve ikinci çeşit noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip, düzlemsel olmayan zamansal bir dönel yüzey yoktur.*

Ayrıca, [37] numaralı çalışmadaki Önerme 3.2 kullanılarak, çift dönmeli zamansal dönel yüzeylerle ilgili aşağıdaki sonuç ifade edilir:

Sonuç 3.4. $\mathbb{E}^4_1$ *Minkowski uzayında, yer vektörü* (3.3) *ile verilen sıfır ortalama eğriliğe ve düz olmayan normal demete sahip Gauss tasviri ikinci çeşit noktasal 1–tipinden olan zamansal dönel yüzey yoktur.*

3.2 $\mathbb{E}^4_1$ Minkowski Uzayında Eliptik, Hiperbolik ve Parabolik Tipten Dönel Yüzeyler

Bu bölümde, ilk olarak, $\mathbb{E}^4_1$ Minkowski uzayında eliptik, hiperbolik ve parabolik tipten dönel yüzeylerin tanımı verilecektir. Daha sonra, bu dönel yüzeylerden düz olup birinci çeşit veya ikinci çeşit noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip olanlar belirlenecektir. Sınıflandırma teoremleri uzaysal dönel yüzeyler ve zamansal dönel yüzeyler için ayrı ayrı verilecektir.

3.2.1 Eliptik tipten dönel yüzeyler

$\{\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4\}$, $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayının standart ortonormal bazı olsun. $\mathbb{E}_1^3$ uzayı içinde kalan düzgün ve regüler bir

$$\alpha(s)=(x(s),z(s),w(s)),\ s\in I\subset\mathbb{R}$$

eğrisi göz önüne alınsın. α eğrisi $\mathbb{E}_1^3=\text{span}\{\eta_1,\eta_3,\eta_4\}$ içinde kalacak şekilde, $\mathbb{E}_1^4$ uzayının içine

$$\alpha(s)=(x(s),0,z(s),w(s))$$

olarak daldırılabilir.

Diğer taraftan, $a=1$, $b=0$ için $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayında (3.1) dönüşüm matrislerinin kümesi

$$G_{(1,0)}=\left\{B_t(1,0)=\begin{pmatrix}\cos t & \sin t & 0 & 0\\ -\sin t & \cos t & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}: t\in[0,2\pi)\right\} \tag{3.39}$$

olur. $B_t(1,0)$ matrisi ortogonal bir dönüşümdür, yani, $B_t(1,0)\in O_1(4)$ dır. $\alpha(s)$ eğrisinin $B_t(1,0)$ dönme matrisi altındaki yörüngesi

$$M_1: F_1(s,t)=(x(s)\cos t, x(s)\sin t, z(s), w(s)),\quad s\in I,\ t\in[0,2\pi), \tag{3.40}$$

şeklindedir. Görüldüğü üzere, $B_t(1,0)$ dönüşümü $\{\eta_3,\eta_4\}$ vektörlerinin oluşturduğu zamansal düzlemi noktası noktasına sabit bırakırken, $\{\eta_1,\eta_2\}$ vektörlerinin oluşturduğu uzaysal düzlemi küme olarak sabit bırakır.

$\mathbb{E}_1^4$ uzayında profil eğrisi α olan ve $B_t(1,0)$ dönme grubu altında değişmez kalan M_1 yüzeyine *eliptik tipten dönel yüzey* ve $B_t(1,0)$ dönmesine *zamansal dönme* denir.

$x(s)=0$ ise, M_1 dönel yüzeyi düzlemin açık bir parçası olur. Bu nedenle, genelliği bozmaksızın her $s\in I$ için $x(s)>0$ olarak varsayılacaktır. Ayrıca, I aralığı üzerinde α profil eğrisinin uzaysal olması durumunda, M_1 dönel yüzeyi uzaysal, zamansal olması durumunda ise, M_1 dönel yüzeyi eliptik tipten zamansal bir dönel yüzey olur.

3.2.1.1 Noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip eliptik tipten uzaysal dönel yüzeyler

M_1, $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayında yer vektörü (3.40) ile verilen uzaysal regüler α profil eğrisine sahip bir dönel yüzey olsun. Genelliği bozmaksızın, uzaysal $\alpha(s)$ profil eğrisi yay uzunluğuna göre parametrelenebilir. Yani, eğrinin koordinat bileşenleri $x'^2(s)+z'^2(s)-w'^2(s)=1$ ifadesini sağlar. $\alpha(s)$ eğrisinin eğriliği ise, $\kappa=\langle\alpha'',\alpha''\rangle=\sqrt{\varepsilon_N(x''^2(s)+z''^2(s)-w''^2(s)}\neq 0$ ile verilir. Burada, ε_N ile α'' vektörünün işareti gösterilmektedir.

$\mathbb{E}^4_1$ uzayında, M_1 yüzeyi üzerinde tanımlı e_1,e_2 vektörleri M_1'e teğet ve e_3,e_4 vektörleri M_1'e normal olacak şekilde $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ yönlendirilmiş ortonormal çatı alanı

$$e_1=\frac{\partial}{\partial s},\quad e_2=\frac{1}{x(s)}\frac{\partial}{\partial t} \tag{3.41}$$

$$e_3=\frac{1}{\kappa}(x''\cos t,x''\sin t,z'',w''), \tag{3.42}$$

$$e_4=\frac{1}{\kappa}(\mu\cos t,\mu\sin t,w'x''-x'w'',z'x''-x'z'') \tag{3.43}$$

şeklinde seçilebilir. Burada, $\mu=z'w''-w'z''$ olarak tanımlanır ve $\varepsilon_1=\varepsilon_2=1$, $\varepsilon_3=-\varepsilon_4=\varepsilon_N$ şeklindedir. Dolayısıyla, uzaysal $\alpha(s)$ profil eğrisine sahip M_1 dönel yüzeyi uzaysaldır.

Gerekli hesaplamalar yapılarak, M_1 yüzeyine ait ikinci esas formun katsayıları ve konneksiyon formları

$$h^3_{11}=\varepsilon_N\kappa,\qquad h^3_{22}=-\frac{x''}{\kappa x}, \tag{3.44}$$

$$h^3_{12}=h^4_{11}=h^4_{12}=0,\qquad h^4_{22}=-\frac{\mu}{\kappa x}, \tag{3.45}$$

$$\omega_{12}(e_1)=0,\qquad \omega_{12}(e_2)=\frac{x'}{x}, \tag{3.46}$$

$$\omega_{34}(e_1)=\tau,\qquad \omega_{34}(e_2)=0 \tag{3.47}$$

olarak bulunur. $\tau=\tau(s)$, α profil eğrisinin burulmasını göstermektedir.

Ayrıca, M_1 yüzeyinin H ortalama eğrilik vektörü ve K Gauss eğriliği, sırasıyla,

$$H=\frac{\varepsilon_N}{2}\left[\left(\varepsilon_N\kappa-\frac{x''}{\kappa x}\right)e_3+\frac{\mu}{\kappa x}e_4\right] \tag{3.48}$$

ve

$$K=-\frac{x''}{x} \tag{3.49}$$

olarak bulunur. (2.17) Codazzi denklemi kullanılarak, M_1 yüzeyi için aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$e_1(h^3_{22})=\omega_{12}(e_2)(h^3_{11}-h^3_{22})-\varepsilon_N\tau h^4_{22}, \tag{3.50}$$

$$e_1(h^4_{22})=-\omega_{12}(e_2)h^4_{22}-\varepsilon_N\tau h^3_{22}. \tag{3.51}$$

Teorem 3.7. *M_1, $\mathbb{E}^4_1$ Minkowski uzayında yer vektörü (3.40) ile verilen eliptik tipten düz uzaysal bir dönel yüzey olsun. $\alpha(s) = (x(s), 0, z(s), w(s))$ profil eğrisinin temel eğrilik vektörü $\alpha''(s)$ sıfırdan farklı ve ışıksal olmayan bir vektör ise,*

i. M_1 dönel yüzeyinin birinci çeşit global 1–tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul, $\alpha(s)$ profil eğrisinin bileşenlerinin

$$x(s) = x_1, \tag{3.52}$$

$$z(s) = \pm\frac{1}{k_0}\sinh(k_1 \pm k_0 s) + z_0, \tag{3.53}$$

$$w(s) = \pm\frac{1}{k_0}\cosh(k_1 \pm k_0 s) + w_0 \tag{3.54}$$

ile verilmesidir. Burada, $x_1, k_0 > 0$ olmak üzere, k_0, w_0, z_0, k_1, x_1 sabitlerdir. Ayrıca, $\Delta\nu = \left(\frac{1}{x_1^2} - k_0^2\right)\nu$ olur. Bu durumda, ν Gauss tasvirinin harmonik olması için gerek ve yeter koşul, $k_0 = \frac{1}{x_1}$ olmasıdır. $k_0 = \frac{1}{x_1}$ ise, M_1 dönel yüzeyi marjinlerde sıkışmış bir yüzey olur.

ii. M_1 dönel yüzeyinin ikinci çeşit noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul, $\alpha(s)$ profil eğrisinin bileşenlerinin

$$x(s) = x_0 s + x_1, \tag{3.55}$$

$$z(s) = \sqrt{x_0^2 - 1}\int \sinh(q_0 \ln(x_0 s + x_1) + \psi_0)ds + z_0, \tag{3.56}$$

$$w(s) = \sqrt{x_0^2 - 1}\int \cosh(q_0 \ln(x_0 s + x_1) + \psi_0)ds + w_0 \tag{3.57}$$

ile verilmesidir. Burada, $s > -\frac{x_1}{x_0}, k_0^2 \neq x_0^2 - 1$, $q_0 = \pm\frac{k_0}{x_0\sqrt{x_0^2-1}}$ ve $k_0 > 0$ olmak üzere, $k_0, x_0, z_0, w_0, \psi_0, x_1$ sabitlerdir. Bu durumda, M_1 yüzeyinin $\nu = e_3 \wedge e_4$ Gauss tasviri (2.45) denklemini

$$f(s,t) = \frac{x_0^2 - 1 - k_0^2}{(x_0^2 - 1)(x_0 s + x_1)^2}$$

fonksiyonu ve

$$C = x_0^2 e_3 \wedge e_4 - x_0\sqrt{x_0^2 - 1}\, e_1 \wedge e_3$$

sabit vektörü için sağlar. Ayrıca, M_1 dönel yüzeyinin profil eğrisi α bir helisdir.

(3.56) ve (3.57) denklemlerinden verilen integraller $q_0 = -1$, $q_0 = 1$ ve $q_0 \neq \pm 1$ için hesaplanabilir.

İspat. M_1, $\mathbb{E}^4_1$ Minkowski uzayında, temel eğrilik vektörü α'' sıfırdan farklı ışıksal olmayan α profil eğrisine sahip, yer vektörü (3.40) ile verilen düz uzaysal bir dönel yüzey olsun. $\alpha''(s)$ sıfırdan farklı ışıksal olmayan bir vektör ise, $\alpha(s)$ profil eğrisinin eğriliği κ sıfırdan farklıdır. Bu durumda, M_1 dönel yüzeyi üzerinde, (3.41)–(3.43) ile verilen $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ yönlendirilmiş ortonormal çatı alanı seçilebilir ve yüzeye ait büyüklükler (3.44)–(3.47) ile verilir. (3.50) ve (3.51) Codazzi denklemleri kullanılarak, (2.32) denkleminden M_1 yüzeyinin ν Gauss tasvirinin Laplasiyeni

$$\Delta\nu = ||h||^2\nu - (\varepsilon_3\tau h^3_{11} - \omega_{12}(e_2)h^4_{22})e_1 \wedge e_3 + (\varepsilon_3\kappa' + \omega_{12}(e_2)(h^3_{11} - h^3_{22}))e_1 \wedge e_4 \tag{3.58}$$

olarak bulunur. M_1 düz bir yüzey olduğundan, (3.49) denkleminden $x'' = 0$ dır. Yani, $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $x(s) = x_0 s + x_1$ olur. Ayrıca, (3.44) ifadesinden, $h^3_{22} = 0$ olduğu görülür. Bu durumda, (3.58) eşitliği

$$\Delta\nu = ||h||^2\nu - (\varepsilon_3\tau h^3_{11} - \omega_{12}(e_2)h^4_{22})e_1 \wedge e_3 + (\varepsilon_3\kappa' + \omega_{12}(e_2)h^3_{11})e_1 \wedge e_4 \tag{3.59}$$

halini alır. (2.45) ile (3.59) denklemleri karşılaştırıldığında, aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$f(1 + \varepsilon_3\varepsilon_4 C_{34}) = \|h\|^2 = \varepsilon_3(h^3_{11})^2 + \varepsilon_4(h^4_{22})^2, \tag{3.60}$$

$$\varepsilon_3 f C_{13} = -(\varepsilon_3\tau h^3_{11} - \omega_{12}(e_2)h^4_{22}), \tag{3.61}$$

$$\varepsilon_4 f C_{14} = \varepsilon_3\kappa' + \omega_{12}(e_2)h^3_{11}, \tag{3.62}$$

$$C_{12} = C_{23} = C_{24} = 0. \tag{3.63}$$

C vektörünün sabit olması için sağlaması gereken (2.47), (2.50) ve (2.51) denklemleri $i = 2$ için yazılırsa,

$$h^4_{22}C_{14} = 0, \tag{3.64}$$

$$\omega_{12}(e_2)C_{13} - \varepsilon_3 h^4_{22}C_{34} = 0, \tag{3.65}$$

$$\omega_{12}(e_2)C_{14} = 0 \tag{3.66}$$

elde edilir. Ayrıca, M_1 yüzeyi düz olduğundan, (3.46) denkleminden $\omega_{12}(e_2) = \dfrac{x_0}{x}$ olarak bulunur. Dolayısıyla, (3.66) denkleminden, $x_0 C_{14} = 0$ elde edilir.

1. Durum: $x_0 = 0$, yani, $x(s) = x_1$ olsun. $x(s) > 0$ olduğundan, $x_1 \in \mathbb{R}_+$ olmalıdır. Bu durumda, M_1 dönel yüzeyinin profil eğrisi $\alpha(s) = (x_1, 0, z(s), w(s))$ şeklindedir. Yani,

α eğrisi $x = x_1$ düzleminde bulunan düzlemsel bir eğri olur. Dolayısıyla,

$$\kappa(s) = |z'w'' - w'z''| = \pm\mu \quad \text{ve} \quad \tau = 0$$

olur. (3.45), (3.46) ve (3.47) denklemlerinden, M_1 yüzeyi için, $h_{22}^4 = \pm\dfrac{1}{x_1}$, $\omega_{12} = \omega_{34} = 0$ olarak bulunur. Dolayısıyla, (3.61), (3.64) ve (3.65) denklemlerinden, $C_{13} = C_{14} = C_{34} = 0$ elde edilir. Yani, C vektörü sıfırdır. Bu durumda, ν Gauss tasviri ikinci çeşit noktasal 1–tipinden olamaz. $\omega_{12} = 0$ ve $C_{14} = 0$ olduğundan, (3.62) denkleminden $k_0 \in \mathbb{R}_+$ olmak üzere, profil eğrisinin eğriliği $\kappa = k_0$ şeklinde bulunur. α'nın koordinat fonksiyonları $z'^2(s) - w'^2(s) = 1$ eşitliğini sağladığından

$$z'(s) = \cosh\theta(s) \quad \text{ve} \quad w'(s) = \sinh\theta(s)$$

olarak seçilebilir. $\alpha''(s) = (0, 0, \theta'\sinh\theta, \theta'\cosh\theta)$ ve $\langle \alpha''(s), \alpha''(s)\rangle = -\theta'^2(s) < 0$ şeklinde hesaplanır. Dolayısıyla, $\kappa(s) = \pm\theta'(s)$ ve $\varepsilon_3 = \varepsilon_N = -1$ olur. $\kappa = k_0$ ifadesi göz önünde bulundurulursa, $\theta(s) = \pm k_0 s + k_1$ olarak bulunur. Bu durumda, $\alpha(s)$ profil eğrisinin bileşenleri (3.53) ve (3.54) denklemlerindeki gibidir. Ayrıca, (3.60) eşitliğinden, $f(s,t) = \dfrac{1}{x_1^2} - k_0^2$ bulunur. $f(s,t)$ sabit bir fonksiyon olduğundan, ν Gauss tasviri global 1–tipindendir. Görüldüğü üzere, ν tasvirinin harmonik olması için gerek ve yeter koşul, $k_0 = \dfrac{1}{x_1}$ olmasıdır. (3.48) denkleminden, $H = \dfrac{1}{2}\left(k_0 e_3 \pm \dfrac{1}{x_1} e_4\right)$ ve $\langle H, H\rangle = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x_1^2} - k_0^2\right)$ bulunur. $k_0 = \dfrac{1}{x_1}$ olduğunda H vektörünün ışıksal, yani, M_1 marjinlerde sıkışmış bir yüzey olduğu elde edilir.

2. Durum: $C_{14} = 0$ ve $x_0 \neq 0$ olsun. (3.62) denkleminden, $\varepsilon_3\kappa' + \varepsilon_N \dfrac{x_0}{x}\kappa = 0$ dır. Bu diferansiyel denkleminin çözümü k_0 pozitif sabit olmak üzere, $\kappa = \dfrac{k_0}{x_0 s + x_1}$ şeklinde bulunur. α profil eğrisi yay uzunluğuna göre parametrelendiğinden, $z'^2(s) - w'^2(s) = 1 - x_0^2$ olur. $x_0 = 1$ ise, $z' = \pm w'$ dir. Bu durumda, $\alpha''(s) = (0, 0, \pm w''(s), w''(s))$ ve $\langle \alpha''(s), \alpha''(s)\rangle = 0$ şeklindedir. Bu ise, α'' vektörünün ışıksal olmayan bir vektör olması ile çelişmektedir. Dolayısıyla, $x_0 \neq 1$ olur. $x_0^2 > 1$ olduğu kabul edilirse, $\mu_0^2 = x_0^2 - 1$ olarak isimlendirilip ve genelliği bozmaksızın $\mu_0 > 0$ olarak alınabilir. $z'^2(s) - w'^2(s) = -\mu_0^2$ denkleminden

$$z'(s) = \mu_0 \sinh\psi(s) \quad \text{ve} \quad w'(s) = \mu_0 \cosh\psi(s)$$

şeklinde seçilebilir ve $z''(s) = \mu_0\psi'(s)\cosh\psi(s)$ ve $w''(s) = \mu_0\psi'(s)\sinh\psi(s)$ olarak bulunur. Bu durumda,

$\alpha''(s) = (0, 0, \mu_0\psi'(s)\cosh\psi(s), \mu_0\psi'(s)\sinh\psi(s))$ ve $\langle \alpha''(s), \alpha''(s)\rangle = \mu_0^2\psi'^2(s) > 0$

olarak hesaplanır. Dolayısıyla, $\kappa(s) = \pm\mu_0\psi'(s)$ ve $\varepsilon_3 = \varepsilon_N = 1$ olur ve $\psi'(s) = \pm\frac{k_0}{\mu_0(x_0s+x_1)}$ şeklinde bulunur. Bu diferansiyel denklemin çözümü $\psi(s) = q_0\ln(x_0s + x_1) + \psi_0$ şeklindedir. Burada, $q_0 = \mp\frac{k_0}{x_0\sqrt{x_0^2-1}}$ ve ψ_0 sabitlerdir. Dolayısıyla, $\alpha(s)$ profil eğrisinin bileşenleri (3.56) ve (3.57) denklemlerinde verildiği gibidir. Diğer taraftan, $\mu = -\mu_0^2\psi' = -\dfrac{\mu_0k_0}{x}$ olarak bulunur. $h_{22}^4 = -\dfrac{\mu}{\kappa x} = \dfrac{\mu_0}{x}$ ve $\omega_{12}(e_2) = \dfrac{x_0}{x}$ ifadeleri (3.65) denkleminde kullanılırsa

$$x_0C_{13} - \mu_0C_{34} = 0 \tag{3.67}$$

elde edilir. Gerekli hesaplamalar yapılarak,

$$\varepsilon_3\tau h_{11}^3 - \omega_{12}(e_2)h_{22}^4 = \frac{x_0(k_0^2-\mu_0^2)}{\mu_0x^2} \quad \text{ve} \quad \|h\|^2 = \frac{{k_0}^2-\mu_0^2}{x^2}$$

bulunur. Burada, ${k_0}^2 \neq \mu_0^2$ olur. (3.60) ve (3.61) denklemlerinden

$$-\mu_0C_{13} + x_0C_{34} = x_0 \tag{3.68}$$

elde edilir. Bu denklemlerden, $C_{13} = x_0\mu_0$ ve $C_{34} = x_0^2$ olarak bulunur. Bu durumda,

$$C = x_0^2e_3\wedge e_4 - x_0\sqrt{x_0^2-1}e_1\wedge e_3 \quad \text{ve} \quad f(s,t) = \frac{x_0^2-1-k_0^2}{(x_0^2-1)(x_0s+x_1)^2}$$

şeklindedir. Ayrıca, M_1 dönel yüzeyinin profil eğrisi α, $\mathbb{E}_1^3$ uzayında kaldığından, eğrinin burulması $\tau = \dfrac{k_0x_0}{\mu_0x}$ dir. $\dfrac{\tau}{\kappa} = \dfrac{x_0}{\mu_0}$ sabittir. Dolayısıyla, α eğrisi helistir.

$x_0^2 < 1$ durumunda elde edilen yüzeyin, $x_0^2 > 1$ için elde edilen yüzeye kongurent olduğu gösterilebilir.

Yeter koşulunun ispatı doğrudan hesaplama ile elde edilir. □

3.2.1.2 Noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip eliptik tipten zamansal dönel yüzeyler

M_1, $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayında, yer vektörü (3.40) ile verilen, zamansal regüler α profil eğrisine sahip bir dönel yüzey olsun. Genelliği bozmaksızın, zamansal $\alpha(s)$ profil eğrisi yay uzunluğuna göre parametrelenebilir. Yani, eğrinin koordinat bileşenleri $x'^2(s) + z'^2(s) - w'^2(s) = -1$ ifadesini sağlar. $\alpha(s)$ eğrisinin eğriliği ise $\kappa(s) = \langle\alpha''(s), \alpha''(s)\rangle = \sqrt{x''^2(s) + z''^2(s) - w''^2(s)} \neq 0$ ile verilir.

$\mathbb{E}_1^4$ uzayında, M_1 yüzeyi üzerinde tanımlı e_1, e_2 vektörleri M_1'e teğet ve e_3, e_4 vektörleri M_1'e normal olacak şekilde, $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ yönlendirilmiş ortonormal çatı alanı

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial s}, \quad e_2 = \frac{1}{x(s)}\frac{\partial}{\partial t}, \tag{3.69}$$

$$e_3 = \frac{1}{\kappa}(x'' \cos t, x'' \sin t, z'', w''), \tag{3.70}$$

$$e_4 = \frac{1}{\kappa}(\mu \cos t, \mu \sin t, w'x'' - x'w'', z'x'' - x'z'') \tag{3.71}$$

şeklinde seçilebilir. Burada, $\mu = z'w'' - w'z''$ olarak tanımlanır ve $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = -1$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 1$ şeklindedir. Dolayısıyla, zamansal $\alpha(s)$ profil eğrisine sahip M_1 dönel yüzeyi zamansaldır.

Gerekli hesaplamalar yapılarak, M_1 yüzeyine ait ikinci esas formun katsayıları ve konneksiyon formları

$$h_{11}^3 = \kappa, \qquad h_{22}^3 = -\frac{x''}{\kappa x}, \tag{3.72}$$

$$h_{12}^3 = h_{11}^4 = h_{12}^4 = 0, \qquad h_{22}^4 = -\frac{\mu}{\kappa x}, \tag{3.73}$$

$$\omega_{12}(e_1) = 0, \qquad \omega_{12}(e_2) = \frac{x'}{x}, \tag{3.74}$$

$$\omega_{34}(e_1) = \tau, \qquad \omega_{34}(e_2) = 0 \tag{3.75}$$

olarak bulunur. Burada, $\tau = \tau(s)$, α profil eğrisinin burulmasını göstermektedir.

M_1 yüzeyinin H ortalama eğrilik vektörü ve K Gauss eğriliği, sırasıyla,

$$H = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x''}{\kappa x} + \kappa\right)e_3 + \frac{\mu}{\kappa x}e_4\right], \tag{3.76}$$

ve

$$K = -\frac{x''}{x} \tag{3.77}$$

olarak bulunur. (2.17) Codazzi denklemi kullanılarak, M_1 yüzeyi için aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$e_1(h_{22}^3) = -\omega_{12}(e_2)\left(h_{11}^3 + h_{22}^3\right) + \tau h_{22}^4, \tag{3.78}$$

$$e_1(h_{22}^4) = -\omega_{12}(e_2)h_{22}^4 - \tau h_{22}^3. \tag{3.79}$$

Aşağıdaki teoremin ispatı, Teorem 3.7'in ispatına benzer şekilde verilebileceğinden tekrar edilmeyecektir.

Teorem 3.8. *M_1, $\mathbb{E}^4_1$ Minkowski uzayında, yer vektörü* (3.40) *ile verilen eliptik tipten düz zamansal bir dönel yüzey olsun. $\alpha(s) = (x(s), 0, z(s), w(s))$ profil eğrisinin temel eğrilik vektörü $\alpha''(s)$ sıfırdan farklı ve ışıksal değilse,*

i. M_1 dönel yüzeyinin birinci çeşit global 1–tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul, $\alpha(s)$ profil eğrisinin bileşenlerinin

$$x(s) = x_1,$$
$$z(s) = \frac{1}{q_0}\cosh(k_1 + q_0 s) + z_0, \tag{3.80}$$
$$w(s) = \frac{1}{q_0}\sinh(k_1 + q_0 s) + w_0 \tag{3.81}$$

ile verilmesidir. Burada, $q_0 = \pm k_0$ ve $x_1, k_0 > 0$ olmak üzere, x_1, z_0, w_0, k_0, k_1 sabitlerdir ve M_1 yüzeyinin Gauss tasviri $\Delta\nu = \left(\frac{1}{x_1^2} + k_0^2\right)\nu$ eşitliğini sağlamaktadır.

ii. M_1 dönel yüzeyinin ikinci çeşit noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul, $\alpha(s)$ profil eğrisinin bileşenlerinin

$$x(s) = x_0 s + x_1,$$
$$z(s) = \sqrt{x_0^2+1}\int \sinh(q_0 \ln(x_0 s + x_1) + \psi_0)ds + z_0, \tag{3.82}$$
$$w(s) = \sqrt{x_0^2+1}\int \cosh(q_0 \ln(x_0 s + x_1) + \psi_0)ds + w_0 \tag{3.83}$$

ile verilmesidir. Burada, $s > -\frac{x_1}{x_0}$, $q_0 = \pm\frac{k_0}{x_0\sqrt{x_0^2+1}}$ ve $k_0 > 0$ olmak üzere, $\kappa_0, x_0, x_1, z_0, w_0, \psi_0$ sabitlerdir. Bu durumda, M_1 yüzeyinin $\nu = e_3 \wedge e_4$ Gauss tasviri (2.45) *denklemini*

$$f(s,t) = \frac{\kappa_0^2 + x_0^2 + 1}{(x_0^2+1)(x_0 s + x_1)^2}$$

fonksiyonu ve

$$C = x_0^2 e_3 \wedge e_4 - \frac{q_0 x_0^2(x_0^2+1)}{\kappa_0} e_1 \wedge e_3$$

sabit vektörü için sağlar. Ayrıca, M_1 dönel yüzeyinin profil eğrisi α bir helisdir.

(3.82) *ve* (3.83) *denklemlerinden verilen integraller $q_0 = -1$, $q_0 = 1$ ve $q_0 \neq \pm 1$ için hesaplanabilir.*

Açıklama 3.2. $\alpha''(s)$ vektörü sıfır veya ışıksal bir vektör ise, $\kappa(s) = 0$ olur. Bu durumda, α profil eğrisi bir doğrudur ve M_1 dönel yüzeyi 3–boyutlu Euclid uzayında veya 3–boyutlu Minkowski uzayında kalır. Bu uzaylardaki noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip dönel yüzeylerin sınıflandırılması ile ilgili birçok çalışma bulunmaktadır. Bunlardan bazıları [21, 38] dır.

3.2.2 Hiperbolik tipten dönel yüzeyler

$\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayındaki eliptik tipten dönel yüzeylere benzer şekilde, hiperbolik tipten dönel yüzeyler tanımlanabilir. Bu bölümdeki teoremlerin ispatı, Teorem 3.7 ve Teorem 3.8'nin ispatlarına benzer olduğu için detaylarından bahsedilmeyecektir.

$\mathbb{E}_1^3$ uzayı içinde düzgün ve regüler bir

$$\beta(s) = (x(s), y(s), w(s)),\ s \in I \subset \mathbb{R}$$

eğrisi göz önüne alınsın. β eğrisi $\mathbb{E}_1^4$ uzayına $\mathbb{E}_1^3 = \mathrm{span}\{\eta_1, \eta_2, \eta_4\}$ içinde kalacak şekilde

$$\beta(s) = (x(s), y(s), 0, w(s))$$

olarak daldırılabilir. $a = 0$, $b = 1$ için (3.1) kümesi

$$G_{(0,1)} = \left\{ B_t(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh t & \sinh t \\ 0 & 0 & \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \tag{3.84}$$

olur. $B_t(0,1)$ matrisi $\mathbb{E}_1^4$ uzayının ortogonal bir dönüşümüdür. Yani, $B_t(0,1) \in O_1(4)$ dır. $\beta(s)$ eğrisinin $B_t(0,1)$ dönüşümü altındaki yörüngesi

$$M_2 : F_2(s,t) = (x(s), y(s), w(s)\sinh t, w(s)\cosh t), \quad s \in I, t \in \mathbb{R} \tag{3.85}$$

şeklindedir. $B_t(0,1)$ dönüşüm matrisi $\{\eta_1, \eta_2\}$ vektörlerinin oluşturduğu uzaysal düzlemi noktası noktasına sabit bırakırken, $\{\eta_3, \eta_4\}$ vektörlerinin oluşturduğu zamansal düzlemi küme olarak sabit bırakır. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında, profil eğrisi β olan ve $B_t(0,1)$ dönme grubu altında değişmez kalan M_2 yüzeyine *hiperbolik tipten dönel yüzey* ve $B_t(0,1)$ dönmesine *hiperbolik dönme* denir.

$w(s) = 0$ ise, M_2 dönel yüzeyi düzlemin açık bir parçası olur. Bu nedenle, genelliği bozmaksızın, her $s \in I$ için, $w(s) > 0$ olarak varsayılacaktır. Ayrıca, I aralığı üzerinde β profil eğrisinin uzaysal olması durumunda, M_2 dönel yüzeyi uzaysal, β'nın zamansal bir eğri olması durumunda ise, M_2 yüzeyi hiperbolik tipten zamansal bir dönel yüzey olur.

3.2.2.1 Noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip hiperbolik tipten uzaysal dönel yüzeyler

M_2, $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayında, yer vektörü (3.85) ile verilen uzaysal regüler β profil eğrisine sahip bir dönel yüzey olsun. Genelliği bozmaksızın, uzaysal $\beta(s)$ profil eğrisi yay uzunluğuna göre parametrelenebilir. Yani, β eğrisinin koordinat bileşenleri $x'^2(s)+y'^2(s)-w'^2(s)=1$ ifadesini sağlar. $\beta(s)$ eğrisinin eğriliği ise, $\kappa(s)=\langle\beta''(s),\beta''(s)\rangle=\sqrt{\varepsilon_N(x''^2(s)+y''^2(s)-w''^2(s))}\neq 0$ ile verilir. Burada, ε_N ile β'' vektörünün işareti gösterilmektedir.

$\mathbb{E}_1^4$ uzayında, M_2 yüzeyi üzerinde tanımlı e_1,e_2 vektörleri M_2'ye teğet ve e_3,e_4 vektörleri M_2'ye normal olacak şekilde, $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ yönlendirilmiş ortonormal çatı alanı

$$e_1=\frac{\partial}{\partial s},\quad e_2=\frac{1}{w(s)}\frac{\partial}{\partial t},\tag{3.86}$$

$$e_3=\frac{1}{\kappa}(x'',y'',w''\sinh t,w''\cosh t),\tag{3.87}$$

$$e_4=\frac{1}{\kappa}(y'w''-w'y'',w'x''-x'w'',\rho\sinh t,\rho\cosh t)\tag{3.88}$$

şeklinde seçilebilir. Burada, $\rho=y'x''-x'y''$ olarak tanımlanır ve $\varepsilon_1=\varepsilon_2=1$, $\varepsilon_3=-\varepsilon_4=\varepsilon_N$ şeklindedir. Dolayısıyla, uzaysal $\beta(s)$ profil eğrisine sahip, M_2 dönel yüzeyi uzaysaldır.

Gerekli hesaplamalar yapılarak, M_2 yüzeyine ait ikinci esas formun katsayıları ve konneksiyon formları

$$h_{11}^3=\varepsilon_N\kappa,\qquad h_{22}^3=-\frac{w''}{\kappa w},\tag{3.89}$$

$$h_{12}^3=h_{11}^4=h_{12}^4=0,\qquad h_{22}^4=-\frac{\rho}{\kappa w},\tag{3.90}$$

$$\omega_{12}(e_1)=0,\qquad \omega_{12}(e_2)=\frac{w'}{w},\tag{3.91}$$

$$\omega_{34}(e_1)=\tau,\qquad \omega_{34}(e_2)=0,\tag{3.92}$$

olarak bulunur. Burada, $\tau=\tau(s)$ ile β profil eğrisinin burulmasını göstermektedir.

M_2 yüzeyinin H ortalama eğrilik vektörü ve K Gauss eğriliği, sırasıyla,

$$H=\frac{\varepsilon_N}{2}\left[\left(\varepsilon_N\kappa-\frac{w''}{\kappa w}\right)e_3+\frac{\rho}{\kappa w}e_4\right]\tag{3.93}$$

ve

$$K=-\frac{w''}{w}\tag{3.94}$$

olarak bulunur. (2.17) Codazzi denklemi kullanılarak, M_2 yüzeyi için aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$e_1(h^3_{22}) = \omega_{12}(e_2)\left(h^3_{11} - h^3_{22}\right) - \varepsilon_N \tau h^4_{22}, \tag{3.95}$$

$$e_1(h^4_{22}) = -\omega_{12}(e_2)h^4_{22} - \varepsilon_N \tau h^3_{22}. \tag{3.96}$$

Teorem 3.9. *M_2, $\mathbb{E}^4_1$ Minkowski uzayında, yer vektörü (3.85) ile verilen hiperbolik tipten düz uzaysal bir dönel yüzey olsun. $\beta(s) = (x(s), y(s), 0, w(s))$ profil eğrisinin temel eğrilik vektörü $\beta''(s)$ sıfırdan farklı ve ışıksal olmayan vektör ise,*

i. M_2 dönel yüzeyinin birinci çeşit global 1–tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul, $\beta(s)$ profil eğrisinin bileşenlerinin

$$x(s) = \pm\frac{1}{k_0}\sin(k_1 \pm k_0 s) + x_0, \tag{3.97}$$

$$y(s) = \pm\frac{1}{k_0}\cos(k_1 \pm k_0 s) + y_0, \tag{3.98}$$

$$w(s) = w_1 \tag{3.99}$$

ile verilmesidir. Burada, $k_0, w_1 > 0$ olmak üzere, x_0, y_0, k_0, w_1, k_1 sabitlerdir. Ayrıca, M_2 yüzeyinin Gauss tasviri $\Delta\nu = \left(k_0^2 - \frac{1}{w_1^2}\right)\nu$ sağlar ve ν Gauss tasvirinin harmonik olması için gerek ve yeter koşul, $k_0 = \frac{1}{w_1}$ olmasıdır. $k_0 = \frac{1}{w_1}$ ise, M_2 dönel yüzeyi marjinlerde sıkışmış bir yüzey olur.

ii. M_2 dönel yüzeyinin ikinci çeşit noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul,

$$\phi(s) = \frac{k_0}{w_0\sqrt{1+w_0^2}}\ln(w_0 s + w_1) + \phi_0 \tag{3.100}$$

olmak üzere, $\beta(s)$ profil eğrisinin bileşenlerinin

$$x(s) = \frac{1+w_0^2}{k_0^2 + w_0^2 + w_0^4}(w_0 s + w_1)\left(k_0 \sin\phi(s) + w_0\sqrt{1+w_0^2}\cos\phi(s)\right), \tag{3.101}$$

$$y(s) = \frac{1+w_0^2}{k_0^2 + w_0^2 + w_0^4}(w_0 s + w_1)\left(w_0\sqrt{1+w_0^2}\sin\phi(s) - k_0\cos\phi(s)\right), \tag{3.102}$$

$$w(s) = w_0 s + w_1 \tag{3.103}$$

ile verilmesidir. Burada, $s > -\frac{w_1}{w_0}$, $k_0^2 \neq 1 + w_0^2$ ve $k_0 > 0$ olmak üzere, k_0, w_0, w_1, ϕ_0 sabitlerdir. M_2 yüzeyinin $\nu = e_3 \wedge e_4$ Gauss tasviri (2.45) denklemini fonksiyonu

$$f(s,t) = \frac{k_0^2 - 1 - w_0^2}{(1+w_0^2)(w_0 s + w_1)^2}$$

ve

$$C = w_0^2 e_3 \wedge e_4 - w_0 \sqrt{1+w_0^2} e_1 \wedge e_3,$$

sabit vektörü için sağlar. Ayrıca, M_2 dönel yüzeyinin profil eğrisi β bir helisdir.

3.2.2.2 Noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip hiperbolik tipten zamansal dönel yüzeyler

M_2, $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayında, yer vektörü (3.85) ile verilen zamansal regüler β profil eğrisine sahip bir dönel yüzey olsun. Genelliği bozmaksızın, zamansal $\beta(s)$ profil eğrisi yay uzunluğuna göre parametrelenebilir. Yani, eğrinin koordinat bileşenleri $x'^2(s) + y'^2(s) - w'^2(s) = -1$ ifadesini sağlar. $\beta(s)$ eğrisinin eğriliği ise, $\kappa(s) = \langle \beta''(s), \beta''(s) \rangle = \sqrt{x''^2(s) + y''^2(s) - w''^2(s)} \neq 0$ ile verilir.

$\mathbb{E}_1^4$ uzayında, M_2 yüzeyi üzerinde tanımlı e_1, e_2 vektörleri M_2'ye teğet ve e_3, e_4 vektörleri M_2'ye normal olacak şekilde, $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ yönlendirilmiş ortonormal çatı alanı

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial s}, \quad e_2 = \frac{1}{w(s)} \frac{\partial}{\partial t}, \tag{3.104}$$

$$e_3 = \frac{1}{\kappa}(x'', y'', w'' \sinh t, w'' \cosh t), \tag{3.105}$$

$$e_4 = \frac{1}{\kappa}(y'w'' - w'y'', w'x'' - x'w'', \rho \sinh t, \rho \cosh t), \tag{3.106}$$

şeklinde seçilebilir. Burada, $\rho = y'x'' - x'y''$ ve $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = -1$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 1$ şeklindedir. Dolayısıyla, zamansal $\beta(s)$ profil eğrisine sahip M_2 dönel yüzeyi zamansaldır.

Gerekli hesaplamalar yapılarak, M_2 yüzeyine ait ikinci esas formun katsayıları ve konneksiyon formları

$$h_{11}^3 = \kappa, \qquad h_{22}^3 = -\frac{w''}{\kappa w}, \tag{3.107}$$

$$h_{12}^3 = h_{11}^4 = h_{12}^4 = 0, \qquad h_{22}^4 = -\frac{\rho}{\kappa w}, \tag{3.108}$$

$$\omega_{12}(e_1) = 0, \qquad \omega_{12}(e_2) = \frac{w'}{w}, \tag{3.109}$$

$$\omega_{34}(e_1) = \tau, \qquad \omega_{34}(e_2) = 0 \tag{3.110}$$

olarak bulunur. Burada, $\tau = \tau(s)$, β profil eğrisinin burulmasını göstermektedir.

M_2 yüzeyinin H ortalama eğrilik vektörü ve K Gauss eğriliği

$$H = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{w''}{\kappa w} + \kappa\right) e_3 + \frac{\rho}{\kappa w} e_4\right] \tag{3.111}$$

ve

$$K = -\frac{w''}{w} \tag{3.112}$$

olarak bulunur. (2.17) Codazzi denklemi kullanılarak, M_2 yüzeyi için aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$e_1(h_{22}^3) = -\omega_{12}(e_2)\left(h_{11}^3 + h_{22}^3\right) + \tau h_{22}^4, \tag{3.113}$$

$$e_1(h_{22}^4) = -\omega_{12}(e_2)h_{22}^4 - \tau h_{22}^3. \tag{3.114}$$

M_2 dönel yüzeyinin $\beta(s)$ profil eğrisinin koordinat fonksiyonları $x'^2(s) + y'^2(s) - w'^2(s) = -1$ eşitliğini sağladığından, $w(s)$ fonksiyonu sabit olamaz. Bu nedenle, Teorem 3.9'un (a)–şıkkındaki durum Teorem 3.10'da gözükmeyecektir.

Teorem 3.10. *M_2, $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayında, yer vektörü (3.85) ile verilen hiperbolik tipten düz zamansal bir dönel yüzey olsun. Zamansal $\beta(s) = (x(s), y(s), 0, w(s))$ profil eğrisinin temel eğrilik vektörü $\beta''(s)$ sıfırdan farklı ve ışıksal olmayan vektör ise, M_2 dönel yüzeyinin ikinci çeşit noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul,*

$$\psi(s) = q_0 \ln(w_0 s + w_1) + \psi_0$$

olmak üzere, $\beta(s)$ profil eğrisinin bileşenlerinin

$$x(s) = \frac{\sqrt{w_0^2 - 1}}{w_0(1+q_0^2)}(w_0 s + w_1)(q_0 \sin\psi(s) + \cos\psi(s)), \tag{3.115}$$

$$y(s) = \frac{\sqrt{w_0^2 - 1}}{w_0(1+q_0^2)}(w_0 s + w_1)(\sin\psi(s) - q_0 \cos\psi(s)), \tag{3.116}$$

$$w(s) = w_0 s + w_1 \tag{3.117}$$

ile verilmesidir. Burada, $s > -\frac{w_1}{w_0}$, $|w_0| > 1$, $q_0 = \pm\frac{k_0}{w_0\sqrt{w_0^2-1}}$ ve $k_0 > 0$ olmak üzere, k_0, w_0, w_1, ψ_0 sabitlerdir. Bu durumda, M_2 yüzeyinin $\nu = e_3 \wedge e_4$ Gauss tasviri (2.45) denklemini

$$f(s,t) = \frac{k_0^2 + w_0^2 - 1}{(1 - w_0^2)(w_0 s + w_1)^2}$$

fonksiyonu ve

$$C = -w_0^2 e_3 \wedge e_4 + \frac{q_0 w_0^2(w_0^2 - 1)}{k_0} e_1 \wedge e_3$$

sabit vektörü için sağlar. Ayrıca, M_2 dönel yüzeyinin profil eğrisi β bir helisdir.

Açıklama 3.3. Eliptik tipten dönel yüzeylere benzer şekilde, $\beta''(s)$ vektörünün sıfır ve ışıksal olması durumunda M_2 yüzeyi $\mathbb{E}^3$ Euclid veya $\mathbb{E}^3_1$ Minkowski uzayının içinde kalır. 3–boyutlu Euclid ve Minkowski uzayında, noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip dönel yüzeylerle ilgili birçok çalışma bulunmaktadır, [21, 38].

3.2.3 Parabolik tipten dönel yüzeyler

$\mathbb{E}^4_1$ Minkowski uzayında, parabolik tipten dönel yüzeyler, eliptik ve hiperbolik tipten dönel yüzeylere göre biraz daha farklı yapıdadır. Bu bölümde, parabolik tipten dönel yüzeyi oluşturan burgu veya vida dönmesi olarak adlandırılan dönme matrisinden ve dönel yüzeyin detaylarından bahsedilecektir.

$\mathbb{E}^4_1$ uzayının standart ortonormal bazı kullanılarak, bu uzay için yarı–ortonormal baz takımı aşağıdaki şekilde elde edilebilir:

$\{\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4\}$, $\mathbb{E}^4_1$ Minkowski uzayının standard ortonormal bazı olmak üzere,

$$\xi_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_4 - \eta_3) \qquad \text{ve} \qquad \xi_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_3 + \eta_4) \tag{3.118}$$

vektörleri tanımlansın. $\langle \eta_3, \eta_3 \rangle = -\langle \eta_4, \eta_4 \rangle = -1$ olduğundan, $\langle \xi_3, \xi_3 \rangle = \langle \xi_4, \xi_4 \rangle = 0$ ve $\langle \xi_3, \xi_4 \rangle = -1$ görülür. Dolayısıyla, $\{\eta_1, \eta_2, \xi_3, \xi_4\}$, $\mathbb{E}^4_1$ uzayı için yarı–ortonormal bir baz takımıdır.

Şimdi, $\mathbb{E}^4_1$ Minkowski uzayının 3–boyutlu alt uzayı $\mathbb{E}^3_1 = \text{span}\{\eta_1, \eta_3, \eta_4\}$ içinde kalan düzgün ve regüler bir

$$\gamma(s) = x(s)\eta_1 + \bar{z}(s)\eta_3 + \overline{w}(s)\eta_4, \quad s \in I \subset \mathbb{R}$$

eğrisi göz önüne alınsın. $\{\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4\}$ baz takımına göre verilmiş olan $\gamma(s)$ eğrisini

$$\eta_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_4 - \xi_3) \qquad \text{ve} \qquad \eta_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_4 + \xi_3) \tag{3.119}$$

eşitlikleri kullanılarak, $\{\eta_1, \eta_2, \xi_3, \xi_4\}$ yarı–ortonormal baz takımına göre

$$\gamma(s) = x(s)\eta_1 + \left(\frac{\overline{w}(s) - \bar{z}(s)}{\sqrt{2}}\right)\xi_3 + \left(\frac{\overline{w}(s) + \bar{z}(s)}{\sqrt{2}}\right)\xi_4, \tag{3.120}$$

şeklinde ifade edilir. $z(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\overline{w}(s) - \bar{z}(s))$ ve $w(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\overline{w}(s) + \bar{z}(s))$ olarak adlandırılırsa, $\gamma(s)$ profil eğrisi

$$\gamma(s) = x(s)\eta_1 + z(s)\xi_3 + w(s)\xi_4, \quad s \in I \subset \mathbb{R} \tag{3.121}$$

haline dönüşür. Diğer taraftan, $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayında

$$G=\left\{T=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&\sqrt{2}t\\0&\sqrt{2}t&1&t^2\\0&0&0&1\end{pmatrix}:t\in\mathbb{R}\right\} \tag{3.122}$$

dönme alt grubu düşünülsün. Bu dönme alt grubunun bir elemanı olan T dönüşüm matrisi için $T(\eta_1)=\eta_1$, $T(\eta_2)=\eta_2+\sqrt{2}t\xi_3$, $T(\xi_3)=\xi_3$ ve $T(\xi_4)=\sqrt{2}t\eta_2+t^2\xi_3+\xi_4$ olur. $T\in O_1(4)$ dır. Görüldüğü üzere, T dönüşümü $\{\eta_1,\xi_3\}$ vektörlerinin oluşturduğu dejenere düzlemi noktası noktasına sabit bırakır. Bu durumda, (3.121) denklemi ile verilen $\gamma(s)$ eğrisinin (3.122) dönüşüm matrisi altındaki yörüngesi

$$M_3:F_3(s,t)=x(s)\eta_1+\sqrt{2}tw(s)\eta_2+(z(s)+t^2w(s))\xi_3+w(s)\xi_4,\quad s\in I,t\in\mathbb{R} \tag{3.123}$$

şeklinde tanımlanır. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında profil eğrisi γ olan ve (3.122) dönme alt grubu altında değişmez kalan M_3 dönel yüzeyine *parabolik tipten dönel yüzey* ve bu dönmeye *burgu dönmesi* veya *vida dönmesi* denir.

$w(s)=0$ olması durumunda, M_3 yüzeyi düzlemin bir açık parçası olur ve genelliği bozmaksızın her $s\in I$ için, $w(s)>0$ olarak alınabilir. I aralığı üzerinde, γ profil eğrisinin uzaysal olması durumunda M_3 uzaysal, γ'nın zamansal olması durumunda ise, M_3 parabolik tipten zamansal bir dönel yüzey olur.

3.2.3.1 Noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip parabolik tipten uzaysal dönel yüzeyler

M_3, $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayında, uzaysal regüler γ profil eğrisine sahip, yer vektörü (3.123) ile verilen bir dönel yüzey olsun. Genelliği bozmaksızın, uzaysal $\gamma(s)$ profil eğrisi yay uzunluğuna göre parametrelenebilir. Yani, eğrinin koordinat bileşenleri $x'^2(s)-2z'(s)w'(s)=1$ ifadesini sağlar. γ eğrisinin tanımlandığı I aralığının

$$I_1=\{s\in I:w'(s)\neq 0\}\quad \text{ve}\quad I_2=\{s\in I:w'(s)=0\}$$

şeklinde I_1 ve I_2 iki alt kümesi göz önüne alınsın.

1. Durum: I_1, I aralığının yoğun bir alt kümesi olsun. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında, M_3 yüzeyi üzerinde tanımlı e_1,e_2 vektörleri M_3'e teğet ve e_3,e_4 vektörleri M_3'e normal olacak şekilde,

$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ yönlendirilmiş ortonormal çatı alanı

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial s}, \quad e_2 = \frac{1}{w(s)}\frac{\partial}{\partial t}, \tag{3.124}$$

$$e_3 = x'(s)\eta_1 + \sqrt{2}tw'(s)\eta_2 + \left(\frac{1}{w'(s)} + t^2w'(s) + z'(s)\right)\xi_3 + w'(s)\xi_4, \tag{3.125}$$

$$e_4 = \frac{x'(s)}{w'(s)}\xi_3 + \eta_1 \tag{3.126}$$

şeklinde seçilebilir. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1, \varepsilon_3 = -\varepsilon_4 = -1$ olarak bulunur. Dolayısıyla, I_1 aralığı üzerinde uzaysal $\gamma(s)$ profil eğrisine sahip M_3 dönel yüzeyi uzaysal bir yüzeydir.

Doğrudan hesapla, M_3 yüzeyine ait ikinci esas formun bileşenleri ve konneksiyon formları

$$h_{11}^3 = -\frac{w''}{w'}, \qquad h_{22}^3 = -\frac{w'}{w}, \tag{3.127}$$

$$h_{11}^4 = \frac{x''w' - x'w''}{w'}, \qquad h_{12}^3 = h_{22}^4 = h_{12}^4 = 0, \tag{3.128}$$

$$\omega_{12}(e_1) = 0, \qquad \omega_{12}(e_2) = \frac{w'}{w}, \tag{3.129}$$

$$\omega_{34}(e_1) = \frac{x''w' - x'w''}{w'}, \qquad \omega_{34}(e_2) = 0 \tag{3.130}$$

elde edilir. Ayrıca, M_3 yüzeyinin H ortalama eğrilik vektörü ve K Gauss eğriliği, sırasıyla,

$$H = \frac{1}{2}\left[-\varepsilon_3\left(\frac{w''}{w'} + \frac{w'}{w}\right)e_3 + \varepsilon_4\left(\frac{x''w' - x'w''}{w'}\right)e_4\right] \tag{3.131}$$

ve

$$K = -\frac{w''}{w} \tag{3.132}$$

ile verilir.

2. Durum: I_2, I aralığının yoğun bir alt kümesi olsun. $s \in I_2$ için $w'(s) = 0$ dır. Bu durumda, w_0 sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere, $w(s) = w_0$ olur. Profil eğrisi γ yay uzunluğunu göre parametrelendiğinden $x'^2(s) = 1$, yani, $x(s) = \delta s + x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}, \delta = \pm 1$, olarak bulunur.

$\mathbb{E}_1^4$ uzayında, M_3 yüzeyi üzerinde tanımlı e_1, e_2 vektörleri M_3'e teğet ve e_3, e_4 vektörleri M_3'e normal olacak şekilde, $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ yönlendirilmiş ortonormal çatı alanı aşağıdaki şekilde seçilebilir:

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial s}, \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}w_0}\frac{\partial}{\partial t}, \quad w_0 > 0, \tag{3.133}$$

$$e_3 = \delta z'(s)\eta_1 + \sqrt{2}t\eta_2 + \frac{(z'(s))^2 + 2t^2 + 1}{2}\xi_3 + \xi_4, \tag{3.134}$$

$$e_4 = \delta z'(s)\eta_1 + \sqrt{2}t\eta_2 + \frac{(z'(s))^2 + 2t^2 - 1}{2}\xi_3 + \xi_4 \tag{3.135}$$

ve $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_3 = -\varepsilon_4 = -1$ olur. Dolayısıyla, I_2 alt aralığı üzerinde, uzaysal $\gamma(s)$ profil eğrisine sahip M_3 dönel yüzeyi uzaysal bir yüzeydir.

Benzer şekilde, M_3 yüzeyine ait ikinci esas formun bileşenleri ve konneksiyonları

$$h^3_{11} = -z'', \qquad h^3_{22} = -\frac{1}{w_0}, \qquad h^3_{12} = h^3_{21} = 0, \tag{3.136}$$

$$h^4_{11} = -z'', \qquad h^4_{22} = -\frac{1}{w_0}, \qquad h^4_{12} = h^4_{21} = 0, \tag{3.137}$$

$$\omega_{12}(e_1) = \omega_{12}(e_2) = 0, \qquad \omega_{34}(e_1) = \omega_{34}(e_2) = 0. \tag{3.138}$$

şeklinde hesaplanır ve M_3 yüzeyinin H ortalama eğrilik vektörü ve K Gauss eğriliği, sırasıyla,

$$H = \frac{1}{2}\left(z''(s) + \frac{1}{w_0}\right)(e_3 - e_4) \quad \text{ve} \quad K = 0 \tag{3.139}$$

şeklindedir.

Teorem 3.11. *M_3, $\mathbb{E}^4_1$ Minkowski uzayında, yer vektörü* (3.123) *ile verilen parabolik tipten düz uzaysal bir dönel yüzey olsun. Bu yüzeyin paralel ortalama eğrilik vektörüne sahip olması için gerek ve yeter koşul, $\gamma(s) = x(s)\eta_1 + z(s)\xi_3 + w(s)\xi_4$ profil eğrisinin bileşenlerinin aşağıdaki durumlardan birisi olmasıdır:*

i. Koordinat fonksiyonları

$$x(s) = \frac{\delta}{w_0}(w_0 s + w_1)(\ln(w_0 s + w_1) - 1) + x_0 s + x_1, \tag{3.140}$$

$$\begin{aligned} z(s) =& \frac{1}{2w_0^2}(w_0 s + w_1)\left(\ln^2(w_0 s + w_1) - 2\ln(w_0 s + w_1) + 2\right) \\ &+ \frac{\delta x_0}{w_0^2}(w_0 s + w_1)(\ln(w_0 s + w_1) - 1) + \frac{1}{2w_0}(x_0^2 - 1)s + z_0, \end{aligned} \tag{3.141}$$

$$w(s) = w_0 s + w_1 \tag{3.142}$$

ile verilir. Burada, $w_0 \neq 0$ ve $s > -\frac{w_1}{w_0}$ olmak üzere $x_0, z_0, w_0, x_1, w_1 \in \mathbb{R}$ ve $\delta = \pm 1$ dir.

ii. Koordinat fonksiyonları

$$x(s) = \delta s + x_0, \tag{3.143}$$

$$z(s) = z_0 s^2 + z_1 s + z_2, \tag{3.144}$$

$$w(s) = w_0 \tag{3.145}$$

ile verilir. Burada, $w_0 \neq 0$ *olmak üzere* $x_0, z_0, w_0, z_1, w_1, z_2 \in \mathbb{R}$ *ve* $\delta = \pm 1$ *dir.*

Ayrıca, bileşenleri (3.140)–(3.142) *veya* (3.143)–(3.145) *ile verilen profil eğrisine sahip* M_3 *dönel yüzeyi,* $\mathbb{E}^4_1$ *Minkowski uzayında, marjinlerde sıkışmış bir yüzey olur.*

İspat. M_3, $\mathbb{E}^4_1$ uzayında $\gamma(s) = x(s)\eta_1 + z(s)\xi_3 + w(s)\xi_4$, $s \in I$, profil eğrisine sahip, yer vektörü (3.123) ile verilen düz uzaysal bir dönel yüzey olsun.

1. Durum: $I_1 = \{s \in I : w'(s) \neq 0\}$ kümesinin I aralığı üzerinde yoğun olduğu varsayılsın. M_3 dönel yüzeyi düz ise, (3.132) denkleminden, $w'' = 0$ olur. Böylece, $w(s) = w_0 s + w_1$ olarak bulunur. Burada, $w_0 \neq 0$ ve $s > -w_1/w_0$ olmak üzere, $w_0, w_1 \in \mathbb{R}$ dır. (3.131) denkleminden, M_3 yüzeyinin ortalama eğrilik vektörü

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{w_0}{w}e_3 + x'' e_4\right)$$

olarak bulunur ve doğrudan hesaplama ile

$$D_{e_1}H = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{w_0^2}{w^2} - x''^2\right)e_3 + \left(x''' + \frac{w_0 x''}{w}\right)e_4\right] \quad \text{ve} \quad D_{e_2}H = 0$$

şeklinde elde edilir. H vektörü paralel olduğundan

$$x''^2 = \frac{w_0^2}{w^2} \quad \text{ve} \quad x''' + \frac{w_0 x''}{w} = 0 \tag{3.146}$$

sonucuna ulaşılır. İlk denklemden, $\delta = \pm 1$ olmak üzere, $x'' = \dfrac{\delta w_0}{w}$ elde edilir ve bu denklem yukarıdaki denklemin ikincisini de sağlar. Bu diferansiyel denklemin çözümü (3.140) şeklindedir. Ayrıca, $\gamma(s)$ profil eğrisinin koordinat fonksiyonları $x'^2(s) - 2z'(s)w'(s) = 1$ sağladığından, $z'(s) = \frac{1}{2w_0}((\delta \ln(w_0 s + w_1) + x_0)^2 - 1)$ bulunur. ve çözümü (3.141) şekildedir. Ayrıca, $\langle H, H\rangle = \frac{1}{4}\left(-\left(\frac{w_0}{w}\right)^2 + x''^2\right)$ olarak bulunur. (3.146) denkleminden, H ışıksal olduğu görülür. Yani, M_3 yüzeyi $\mathbb{E}^4_1$ Minkowski uzayında, uçlarından kıstırılmış parabolik tipten bir dönel yüzeydir.

2. Durum: $I_2 = \{s \in I : w'(s) = 0\}$ kümesi I aralığı üzerinde yoğun olduğu varsayılsın. (3.139) denkleminden, $K = 0$ olduğu görülür ve $w(s) = w_0 \neq 0$ ve $x(s) = \delta s + x_0$

şeklindedir. Burada, $\delta = \pm 1$ ve w_0, x_0 sabitlerdir. (3.139) denkleminden doğrudan hesaplama ile aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$D_{e_1} H = \frac{1}{2} z'''(s)(e_3 - e_4) = 0 \quad \text{ve} \quad D_{e_2} H = 0. \tag{3.147}$$

H paralel ise, $z'''(s) = 0$ olur. Bu durumda, $z(s)$ koordinat fonksiyonu (3.144) şeklinde elde edilir. Ayrıca, $\langle H, H \rangle = 0$ dır. Bu takdirde, M_3 yüzeyi marjinlerde sıkışmış bir yüzeydir. □

Teorem 3.12. $\mathbb{E}^4_1$ *Minkowski uzayında, yer vektörü* (3.123) *olan ve bileşenleri Teorem 3.11'de verilen eğrileri profil eğrisi kabul eden, parabolik tipten düz uzaysal dönel yüzeyi noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip yegane yüzeydir. Bu durumda,* ν *Gauss tasviri harmoniktir, yani,* ν *global 1–tipindendir.*

İspat. M_3, $\mathbb{E}^4_1$ Minkowski uzayında, yer vektörü (3.123) ile verilen noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip düz uzaysal bir yüzey olsun. I aralığının alt kümeleri I_1 ve I_2'ye göre iki ayrı durum incelenecektir.

1. Durum: $I_1 = \{s \in I : w'(s) \neq 0\}$ kümesi I aralığının yoğun bir alt kümesi ise, M_3 yüzeyi üzerinde (3.124)–(3.126) denklemleri ile verilen, $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ yönlendirilmiş ortonormal çatı alanı seçilebilir ve M_3 yüzeyi için (3.127)–(3.132) ifadeleri geçerlidir. M_3 düz bir yüzeyse, (3.132) denkleminden, $w''(s) = 0$ olur. Yani, $w_0 > 0$ ve $w_0, w_1 \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $w(s) = w_0 s + w_1$ şeklindedir. Dolayısıyla,

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{w_0}{w} e_3 + x''(s) e_4\right), \quad ||h||^2 = x''^2 - \frac{{w_0}^2}{w^2} \quad \text{ve } R^D \equiv 0$$

olur. Yukarıda elde edilen bilgiler göz önünde bulundurularak, (2.32) denkleminden M_3 yüzeyinin ν Gauss tasvirinin Laplasiyeni aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\Delta \nu = \left(x''^2 - \frac{w_0^2}{w^2}\right)\nu + \left(\frac{w_0^2}{w^2} - x''^2\right) e_1 \wedge e_4 - \left(x''' + \frac{w_0 x''}{w}\right) e_1 \wedge e_3. \tag{3.148}$$

ν tasviri birinci çeşit noktasal 1–tipinden ise

$$f = x''^2 - \frac{{w_0}^2}{w^2}, \quad \frac{w_0^2}{w^2} - x''^2 = 0 \quad \text{ve} \quad x''' + \frac{w_0}{w} x'' = 0$$

olmalıdır. Bu durumda, (3.146) denkleminden, ortalama eğrilik vektörü H'nin paralel olduğu söylenir. Dolayısıyla, Teorem 3.11'den, M_3 dönel yüzeyinin profil eğrisinin bileşenlerinin (3.140)–(3.142) ve $\Delta \nu = 0$ olduğu elde edilir. Yani, M_3 dönel yüzeyi harmonik Gauss tasvirine sahiptir.

ν tasviri ikinci çeşit noktasal 1–tipinden ise, (2.45) ile (3.148) denklemleri karşılaştırıldığında

$$f(1-C_{34}) = x''^2 - \frac{w_0^2}{w^2}, \tag{3.149}$$

$$fC_{13} = x''' + \frac{w_0}{w}x'', \tag{3.150}$$

$$fC_{14} = -\left(x''^2 - \frac{w_0^2}{w^2}\right), \tag{3.151}$$

$$C_{12} = C_{23} = C_{24} = 0 \tag{3.152}$$

elde edilir. Burada, $x''' + \frac{w_0}{w}x'' \neq 0$ veya $x''^2 - \frac{w_0^2}{w^2} \neq 0$ olmalıdır. Ancak, görüldüğü üzere, bu ifadelerden birinin sıfır olması diğerinin sıfır olmasını gerektirir. Bu durumda, (3.146) denkleminden, H ortalama eğrilik vektörünün paralel olmadığı görülür. Yani, profil eğrisinin bileşenleri (3.140)–(3.142) ile verilen M_3 dönel yüzeyi ikinci çeşit noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip olamaz.

Ayrıca, yer vektörü (3.123) ile verilen, düz ve paralel olmayan ortalama eğrilik vektörüne sahip M_3 dönel yüzeyi ikinci çeşit noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip olamaz.

Bunu göstermek için, C vektörünün sabit olması ile ilgili denklemlerden (2.51), $i = 2$ için hesaplanırsa

$$C_{14} - C_{34} = 0 \tag{3.153}$$

bulunur. I_1 kümesinin yoğun bir alt kümesi üzerinde $x''^2 - \dfrac{w_0^2}{w^2} \neq 0$ olduğundan, (3.149) ve (3.151) denklemlerinden

$$C_{14} - C_{34} = -1 \tag{3.154}$$

bulunur. Bu durumda, (3.153) ve (3.154) denklemleri birbiriyle çelişir. Yani, M_3 yüzeyi ikinci çeşit noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip olamaz.

2. *Durum:* $I_2 = \{s \in I : w'(s) = 0\}$ kümesi I aralığının yoğun bir alt kümesi ise, w_0 sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere, $w(s) = w_0$ olur. Bu durumda, M_3 yüzeyi üzerinde (3.133)–(3.135) denklemleri ile verilen $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ yönlendirilmiş ortonormal çatı alanı seçilebilir ve M_3 yüzeyi için (3.136)–(3.139) ifadeleri geçerlidir. Dolayısıyla,

$$H = \frac{1}{2}\left(z''(s) + \frac{1}{w_0}\right)(e_3 - e_4), \ \ ||h||^2 = 0 \ \text{ ve } \ R^D \equiv 0$$

olarak bulunur. Bu bilgiler göz önünde bulundurulduğunda, (2.32) denkleminden M_3 yüzeyinin ν Gauss tasvirinin Laplasiyeni

$$\Delta\nu = z'''(s)(e_1 \wedge e_3 - e_1 \wedge e_4) \tag{3.155}$$

şeklindedir. ν tasviri birinci çeşit noktasal 1–tipinden ise, $z'''(s) = 0$ olmalıdır. Bu durumda, (3.147) denkleminden, M_3 yüzeyinin H ortalama eğrilik vektörünün paralel olduğu ve dolayısıyla Teorem 3.11'den M_3 dönel yüzeyinin profil eğrisinin koordinat bileşenleri (3.143)–(3.145) denklemleri ile verildiği görülür. M_3 dönel yüzeyinin Gauss tasviri harmoniktir.

ν tasviri ikinci çeşit noktasal 1–tipinden ise, ν Gauss tasviri (2.45) ile verilen denklemi bir düzgün f tasviri ve sıfırdan farklı C sabit vektörü için sağlar. (2.45) ile (3.155) denklemi karşılaştırıldığında,

$$f(1 - C_{34}) = 0, \tag{3.156}$$

$$fC_{13} = -z'''(s), \tag{3.157}$$

$$fC_{14} = -z'''(s), \tag{3.158}$$

$$C_{12} = C_{23} = C_{24} = 0 \tag{3.159}$$

elde edilir. Burada, $z'''(s) \neq 0$ ve $f \neq 0$ olmalıdır. Dolayısıyla, (3.147) denkleminden, H vektörünün paralel olmadığı görülür. (3.156) denkleminden, $C_{34} = 1$ olarak bulunur. Diğer taraftan, (2.51) denklemi $i = 2$ için yazılırsa $h^3_{22}C_{34} = 0$ eşitliği elde edilir. Ancak, $h^3_{22} = \frac{1}{w_0}$ ve $C_{34} = 1$ olduğundan bu denklem hiçbir zaman sağlanmaz. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla, ν tasviri ikinci çeşit noktasal 1–tipinden olamaz.

1. durum ve 2. durumda elde edilenler düzenlendiğinde istenilen sonuca ulaşılır. $\square$

Yukarıda verilen teoremin ispatından aşağıdaki sonuç verilir:

Sonuç 3.5. $\mathbb{E}^4_1$ *Minkowski uzayında, yer vektörü* (3.123) *ile verilen, ikinci çeşit noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip, parabolik tipten düz uzaysal bir dönel yüzey yoktur.*

3.2.3.2 Noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip parabolik tipten zamansal dönel yüzeyler

M_3, $\mathbb{E}^4_1$ Minkowski uzayında, yer vektörü (3.123) ile verilen, regüler zamansal $\gamma(s)$ profil eğrisine sahip bir dönel yüzey olsun. Genelliği bozmaksızın, zamansal $\gamma(s)$ profil eğrisi yay uzunluğuna göre parametrelenebilir. Yani, $x'^2(s) - 2z'(s)w'(s) = -1$ dir. Bu denklemden, $w'(s) = 0$ ise $x'^2(s) = -1$ olur. Dolayısıyla, her $s \in I$ için $w'(s)$ sıfırdan farklıdır.

$\mathbb{E}_1^4$ uzayında, M_3 yüzeyi üzerinde tanımlı e_1, e_2 vektörleri M_3'e teğet ve e_3, e_4 vektörleri M_3'e normal olacak şekilde $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ yönlendirilmiş ortonormal çatı alanı aşağıdaki şekilde seçilebilir:

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial s}, \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}w(s)}\frac{\partial}{\partial t}, \quad w(s) > 0, \, \forall s \in I \tag{3.160}$$

$$e_3 = x'(s)\eta_1 + \sqrt{2}tw'(s)\eta_2 + \left(-\frac{1}{w'(s)} + t^2 w'(s) + z'(s)\right)\xi_3 + w'(s)\xi_4, \tag{3.161}$$

$$e_4 = \frac{x'(s)}{w'(s)}\xi_3 + \eta_1. \tag{3.162}$$

Burada, $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = -1$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 1$ şeklindedir. Dolayısıyla, zamansal $\gamma(s)$ profil eğrisine sahip M_3 dönel yüzeyi zamansaldır.

Gerekli hesaplamalar yapılarak, M_3 yüzeyine ait ikinci esas formun katsayıları ve konneksiyon formları aşağıdaki şekilde bulunur:

$$h_{11}^3 = \frac{w''}{w'}, \qquad h_{22}^3 = -\frac{w'}{w}, \qquad h_{12}^3 = h_{21}^3 = 0, \tag{3.163}$$

$$h_{11}^4 = \frac{w'x'' - x'w''}{w'}, \qquad h_{22}^4 = h_{12}^4 = h_{21}^4 = 0, \tag{3.164}$$

$$\omega_{12}(e_1) = 0, \qquad \omega_{12}(e_2) = \frac{w'}{w}, \tag{3.165}$$

$$\omega_{34}(e_1) = \frac{w'x'' - x'w''}{w'}, \qquad \omega_{34}(e_2) = 0. \tag{3.166}$$

M_3 yüzeyinin H ortalama eğrilik vektörü ve K Gauss eğriliği, sırasıyla,

$$H = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{w''}{w'} + \frac{w'}{w}\right)e_3 + \left(\frac{x''w' - x'w''}{w'}\right)e_4\right] \tag{3.167}$$

ve

$$K = -\frac{w''}{w} \tag{3.168}$$

ile verilir. Ayrıca, (2.17) Codazzi denklemleri kullanılarak

$$e_1(h_{22}^3) = -\omega_{12}(e_2)\left(h_{11}^3 + h_{22}^3\right), \tag{3.169}$$

$$h_{11}^4\omega_{12}(e_2) + h_{22}^3\omega_{34}(e_1) = 0 \tag{3.170}$$

elde edilir.

Teorem 3.13. *$\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayında, yer vektörü* (3.123) *ile verilen, parabolik tipten düz zamansal dönel yüzey noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip olamaz.*

İspat. M_3, $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayında, yer vektörü (3.123) ile verilen, düz zamansal bir dönel yüzey olsun. Bu durumda, M_3 yüzeyi üzerinde (3.160)–(3.162) denklemleri ile verilen $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ yönlendirilmiş ortonormal çatı alanı seçilebilir ve M_3 yüzeyi için (3.163)–(3.168) ifadeleri geçerlidir. M_3 düz bir yüzey olduğundan, (3.168) denkleminden $w''(s) = 0$, yani, $w(s) = w_0 s + w_1$ olarak bulunur. Burada, $w_0 \neq 0, w_1$ sabitlerdir.

Bu durumda, (3.163)–(3.166) ile verilen ifadeler

$$\begin{aligned} h_{11}^3 = 0, \quad h_{22}^3 = -\frac{w_0}{w}, \quad h_{12}^3 = h_{21}^3 = 0, \\ h_{11}^4 = x'', \quad h_{22}^4 = h_{12}^4 = h_{21}^4 = 0, \\ \omega_{12}(e_1) = 0, \quad \omega_{12}(e_2) = \frac{w_0}{w}, \\ \omega_{34}(e_1) = x'', \quad \omega_{34}(e_2) = 0 \end{aligned} \tag{3.171}$$

şeklinde olur.

(2.32) denkleminden, M_3 yüzeyinin ν Gauss tasvirinin Laplasiyeni

$$\begin{aligned} \Delta\nu =& ||h||^2\nu + ((h_{22}^3 - h_{11}^3)\omega_{34}(e_1) - e_1(h_{11}^4))e_1 \wedge e_3 \\ &+ (e_1(h_{11}^3 - h_{22}^3) - \omega_{34}(e_1)h_{11}^4))e_1 \wedge e_4 \end{aligned}$$

olarak bulunur. (3.169) denklemi ile verilen ifade göz önünde bulundurulursa, bu ifade

$$\begin{aligned} \Delta\nu =& ||h||^2\nu - (e_1(h_{11}^4) - (h_{22}^3 - h_{11}^3)\omega_{34}(e_1))e_1 \wedge e_3 \\ &+ (e_1(h_{11}^3) + \omega_{12}(e_2)(h_{11}^3 + h_{22}^3) - h_{11}^4\omega_{34}(e_1))e_1 \wedge e_4 \end{aligned} \tag{3.172}$$

biçimini alır. (3.171) denklemindeki M_3 yüzeyine ait büyüklükler düşünüldüğünde, M_3 yüzeyinin ν Gauss tasvirinin Laplasiyeni

$$\Delta\nu = \left(x''^2 + \frac{w_0^2}{w^2}\right)\nu - \left(x''' + \frac{w_0}{w}x''\right)e_1 \wedge e_3 - \left(x''^2 + \frac{w_0^2}{w^2}\right)e_1 \wedge e_4 \tag{3.173}$$

şeklini alır. (2.45) ile (3.173) denklemleri kıyaslandığında, aşağıdaki denklem sistemi elde edilir:

$$f(1 + C_{34}) = \frac{w_0^2}{w^2} + x''^2, \tag{3.174}$$

$$fC_{13} = x''' + \frac{w_0}{w}x'', \tag{3.175}$$

$$fC_{14} = \frac{w_0^2}{w^2} + x''^2, \tag{3.176}$$

$$C_{12} = C_{23} = C_{24} = 0. \tag{3.177}$$

$w_0 \neq 0$ olduğundan, (3.176) denkleminden, $C_{14} \neq 0$ olduğu görülür. Dolayısıyla, M_3 yüzeyinin Gauss tasviri ν birinci çeşit noktasal 1–tipinden olamaz.

Şimdi, ν Gauss tasvirinin ikinci çeşit noktasal 1–tipinden olamayacağı gösterilecektir. (2.47) ve (2.51) denklemleri $i = 2$ için yazılırsa, sırasıyla,

$$w_0 C_{13} = 0, \tag{3.178}$$

$$w_0(C_{14} - C_{34}) = 0 \tag{3.179}$$

denklemleri elde edilir. $w_0 \neq 0$ olduğundan, bu denklemlerden $C_{13} = 0$ ve $C_{14} = C_{34}$ olarak bulunur. Diğer taraftan, (3.174) ve (3.176) denklemlerinden

$$C_{14} - C_{34} = 1$$

elde edilir. Bu ise, $C_{14} = C_{34}$ ile çelişmektedir. Dolayısıyla, ν Gauss tasviri ikinci çeşit noktasal 1–tipinden olamaz. Yani, yer vektörü (3.123) ile verilen parabolik tipten düz zamansal dönel yüzey, noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip değildir. $\square$

3.3 $\mathbb{E}^4_2$ Yarı–Euclid Uzayında Genel Dönel Yüzeyler

Bu bölümde, $\mathbb{E}^4_2$ yarı–Euclid uzayının bazı dönme matrisleri ve onların oluşturduğu dönel yüzeyler üzerine çalışılacaktır.

$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $\mathbb{E}^4_2$ yarı–Euclid uzayının standart ortonormal bir bazı olsun. $\mathbb{E}^4_2$ yarı–Euclid uzayının

$$G = \left\{ T_1 = \begin{pmatrix} \cosh v & 0 & 0 & \sinh v \\ 0 & \cosh(bv) & \sinh(bv) & 0 \\ 0 & \sinh(bv) & \cosh(bv) & 0 \\ \sinh v & 0 & 0 & \cosh v \end{pmatrix} : v \in \mathbb{R}, b > 0 \right\} \tag{3.180}$$

şeklinde bir dönüşüm alt grubu göz önüne alınabilir. Bu durumda, T_1 dönüşüm matrisi için $T_1(e_1) = \cosh v e_1 + \sinh v e_4$, $T_1(e_2) = \cosh(bv)e_2 + \sinh(bv)e_3$, $T_1(e_3) = \sinh(bv)e_2 + \cosh(bv)e_3$ ve $T_1(e_4) = \sinh v e_1 + \cosh v e_4$ olur ve bu matris $\mathbb{E}^4_2$ uzayında ortogonal bir matristir. Yani, $T_1 \in O_2(4)$ dır.

$\mathbb{E}^2_1$ Minkowski uzayında, düzgün ve regüler

$$\alpha(u) = (y(u), w(u)),\ u \in I \subset \mathbb{R},$$

eğrisi göz önüne alınsın. Bu eğri $\mathbb{E}^4_2$ uzayına *yw*–düzleminde kalacak şekilde

$$\alpha(u) = (0, y(u), 0, w(u))$$

olarak daldırılabilir. $\alpha(u)$ eğrisinin $\mathbb{E}_2^4$ uzayındaki T_1 dönme matrisi altındaki yörüngesi

$$M_1(b): r_1(u,v) = (w(u)\sinh v, y(u)\cosh(bv), y(u)\sinh(bv), w(u)\cosh v)\ u\in I, v\in\mathbb{R} \tag{3.181}$$

şeklindedir. Bu durumda, $M_1(b)$ yüzeyi profil eğrisi $\alpha(u)$ olan ve T_1 dönme matrisi altında değişmez kalan bir dönel yüzeydir.

$\mathbb{E}_2^4$ yarı–Euclid uzayında, $M_1(b)$ yüzeyi üzerinde tanımlı e_1, e_2 vektörleri $M_1(b)$'ye teğet ve e_3, e_4 vektörleri $M_1(b)$'ye normal olacak şekilde, $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ yönlendirilmiş ortonormal çatı alanı

$$e_1 = \frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial v}, \quad e_2 = \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial u}, \tag{3.182}$$

$$e_3 = \frac{1}{A}(y'(u)\sinh v, w'(u)\cosh(bv), w'(u)\sinh(bv), y'(u)\cosh v), \tag{3.183}$$

$$e_4 = -\frac{\varepsilon\varepsilon^*}{q}(by(u)\cosh v, w(u)\sinh(bv), w(u)\cosh(bv), by(u)\sinh v) \tag{3.184}$$

şeklinde seçilebilir. Burada, $\varepsilon = \operatorname{sgn}(y'^2(u) - w'^2(u))$ ve $\varepsilon^* = \operatorname{sgn}(w^2(u) - b^2y^2(u))$ olmak üzere, $A = \sqrt{\varepsilon(y'^2(u) - w'^2(u))} \neq 0$ ve $q = \sqrt{\varepsilon^*(w^2(u) - b^2y^2(u))} \neq 0$ şeklindedir. $\varepsilon_1 = -\varepsilon_4 = \varepsilon^*$ ve $\varepsilon_2 = -\varepsilon_3 = \varepsilon$ olur. Gerekli hesaplamalar yapılarak $M_1(b)$ yüzeyine ait ikinci esas formunun katsayıları ve konneksiyon formları

$$h_{11}^3 = \frac{1}{Aq^2}(b^2y(u)w'(u) - w(u)y'(u)), \quad h_{22}^3 = \frac{1}{A^3}(w'(u)y''(u) - y'(u)w''(u)), \tag{3.185}$$

$$h_{12}^4 = \frac{\varepsilon\varepsilon^* b}{Aq^2}(w(u)y'(u) - y(u)w'(u)), \quad h_{12}^3 = h_{11}^4 = h_{22}^4 = 0, \tag{3.186}$$

$$\omega_{12}(e_1) = \frac{1}{Aq^2}(b^2y(u)y'(u) - w(u)w'(u)), \quad \omega_{12}(e_2) = 0, \tag{3.187}$$

$$\omega_{34}(e_1) = \frac{\varepsilon\varepsilon^* b}{Aq^2}(w(u)w'(u) - y(u)y'(u)), \quad \omega_{34}(e_2) = 0 \tag{3.188}$$

olarak bulunur.

Şimdi, $\mathbb{E}_2^4$ yarı–Euclid uzayında

$$G = \left\{ T_2 = \begin{pmatrix} \cos v & \sin v & 0 & 0 \\ -\sin v & \cos v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(bv) & \sin(bv) \\ 0 & 0 & -\sin(bv) & \cos(bv) \end{pmatrix} : v \in (0, 2\pi), b > 0 \right\} \tag{3.189}$$

şeklinde başka bir alt grup ele alınabilir. T_2 dönüşüm matrisi için, $T_2(e_1) = \cos v e_1 - \sin v e_2$, $T_2(e_2) = \sin v e_1 + \cos v e_2$, $T_2(e_3) = \cos(bv)e_3 - \sin(bv)e_4$ ve $T_2(e_4) =$

$\sin(bv)e_3 + \cos(bv)e_4$ şeklindedir. T_2 matrisi $\mathbb{E}^4_2$ uzayının ortogonal bir dönüşümüdür, yani, $T_2 \in O_2(4)$ dır.

Benzer şekilde, $\mathbb{E}^2_1$ uzayında bulunan

$$\beta(u) = (x(u), z(u)) \ \ u \in I \subset \mathbb{R}$$

eğrisi $\mathbb{E}^4_2$ uzayı içinde xz–düzleminde kalacak şekilde

$$\beta(u) = (x(u), 0, z(u), 0)$$

olarak daldırılabilir. $\beta(u)$ eğrisinin $\mathbb{E}^4_2$ uzayındaki T_2 dönme matrisi altındaki yörüngesi

$$M_2(b) : r_2(u,v) = (x(u)\cos v, x(u)\sin v, z(u)\cos(bv), z(u)\sin(bv)) \ \ u \in I, \ v \in (0, 2\pi) \tag{3.190}$$

ile verilir. Bu durumda, $M_2(b)$ yüzeyi profil eğrisi β olan ve T_2 dönme matrisi altında değişmez kalan bir dönel yüzeydir.

$\mathbb{E}^4_2$ yarı–Euclid uzayında, $M_2(b)$ yüzeyi üzerinde tanımlı e_1, e_2 vektörleri $M_2(b)$'ye teğet ve e_3, e_4 vektörleri $M_2(b)$'ye normal olacak şekilde, $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ yönlendirilmiş ortonormal çatı alanı

$$e_1 = \frac{1}{\bar{q}}\frac{\partial}{\partial v}, \quad e_2 = \frac{1}{\bar{A}}\frac{\partial}{\partial u}, \tag{3.191}$$

$$e_3 = \frac{1}{\bar{A}}(z'(u)\cos v, z'(u)\sin v, x'(u)\cos(bv), x'(u)\sin(bv)), \tag{3.192}$$

$$e_4 = -\frac{\varepsilon\varepsilon^*}{\bar{q}}(bz(u)\sin v, -bz(u)\cos v, x(u)\sin(bv), -x(u)\cos(bv)), \tag{3.193}$$

şeklinde seçilebilir. Burada, $\varepsilon = \operatorname{sgn}(x'^2(u) - z'^2(u))$ ve $\varepsilon^* = \operatorname{sgn}(x^2(u) - b^2z^2(u))$ olmak üzere, $\bar{A} = \sqrt{\varepsilon(x'^2(u) - z'^2(u))} \neq 0$ ve $\bar{q} = \sqrt{\varepsilon^*(x^2(u) - b^2z^2(u))} \neq 0$ şeklindedir. $\varepsilon_1 = -\varepsilon_4 = \varepsilon^*$, $\varepsilon_2 = -\varepsilon_3 = \varepsilon$ olur. Gerekli hesaplamalar yapılarak, $M_2(b)$ yüzeyine ait ikinci esas formunun katsayıları ve konneksiyon formları aşağıdaki denklemlerle verilir:

$$h^3_{11} = \frac{1}{\bar{A}\bar{q}^2}(b^2z(u)x'(u) - x(u)z'(u)), \quad h^3_{22} = \frac{1}{\bar{A}^3}(z'(u)x''(u) - x'(u)z''(u)), \tag{3.194}$$

$$h^4_{12} = \frac{\varepsilon\varepsilon^* b}{\bar{A}\bar{q}^2}(z(u)x'(u) - x(u)z'(u)), \quad h^3_{12} = h^4_{11} = h^4_{22} = 0, \tag{3.195}$$

$$\omega_{12}(e_1) = \frac{1}{\bar{A}\bar{q}^2}(b^2z(u)z'(u) - x(u)x'(u)), \quad \omega_{12}(e_2) = 0, \tag{3.196}$$

$$\omega_{34}(e_1) = \frac{\varepsilon\varepsilon^* b}{\bar{A}\bar{q}^2}(z(u)z'(u) - x(u)x'(u)), \quad \omega_{34}(e_2) = 0. \tag{3.197}$$

$M_1(b)$ ve $M_2(b)$ dönel yüzeylerinin H ortalama eğrilik vektörü, K Gauss eğriliği ve R^D normal eğrilik tensörü, sırasıyla,

$$H = -\frac{1}{2}(\varepsilon\varepsilon^* h_{11}^3 + h_{22}^3)e_3, \tag{3.198}$$

$$K = \varepsilon^*(h_{12}^4)^2 - \varepsilon h_{11}^3 h_{22}^3, \tag{3.199}$$

$$R^D(e_1, e_2; e_3, e_4) = h_{12}^4(\varepsilon h_{22}^3 - \varepsilon^* h_{11}^3) \tag{3.200}$$

olarak elde edilir. Ayrıca, (2.17) Codazzi denkleminden, $M_1(b)$ ve $M_2(b)$ yüzeyleri için aşağıdaki ifadeler verilir:

$$e_2(h_{11}^3) = \varepsilon^* h_{12}^4 \omega_{34}(e_1) + \omega_{12}(e_1)(\varepsilon^* h_{11}^3 - \varepsilon h_{22}^3), \tag{3.201}$$

$$e_2(h_{12}^4) = -\varepsilon h_{22}^3 \omega_{34}(e_1) + 2\varepsilon^* h_{12}^4 \omega_{12}(e_1). \tag{3.202}$$

Yer vektörleri (3.181) ve (3.190) ile verilen dönel yüzeyler için, $b = 1$ ve profil eğrileri α ve β'nın bileşenleri $f(u)$ düzgün bir fonksiyon olmak üzere, $x(u) = y(u) = f(u)\sinh u$ ve $z(u) = w(u) = f(u)\cosh u$ olarak seçilirse, [39] ve [12] çalışmalarındaki dönel yüzeyler elde edilir. Bu dönel yüzeyler *Vranceanu tipi dönel yüzeyleri* olarak isimlendirilmektedir.

3.3.1 Sıfır ortalama eğriliğe sahip dönel yüzeyler

Bu bölümde, $\mathbb{E}_2^4$ yarı–Euclid uzayında, yer vektörü (3.181) ve (3.190) ile verilen, $M_1(b)$ ve $M_2(b)$ dönel yüzeylerinden sıfır ortalama eğriliğe sahip olanlar sınıflandırılacaktır.

İlk olarak, yer vektörü (3.181) ile verilen $M_1(b)$ yüzeyi için sınıflandırılma yapılacaktır. (3.185) ve (3.198) denklemleri göz önünde bulundurulursa aşağıdaki sonuç elde edilir:

$M_1(b)$ yüzeyinin sıfır ortalama eğriliğe sahip olması için gerek ve yeter koşul, α profil eğrisinin bileşenleri $y(u)$ ve $w(u)$ fonksiyonlarının

$$w'(u)y''(u) - y'(u)w''(u) + (y'^2(u) - w'^2(u))\frac{b^2 y(u)w'(u) - w(u)y'(u)}{w^2(u) - b^2 y^2(u)} = 0 \tag{3.203}$$

diferansiyel denklemi sağlamasıdır. Bu diferansiyel denklemin çözümü, sırasıyla, $b = 1$ ve $b \neq 1$ durumlarına göre incelenecektir.

1. Durum: $b = 1$. (3.203) diferansiyel denklemi

$$w'(u)y''(u) - y'(u)w''(u) + (y'^2(u) - w'^2(u))\frac{y(u)w'(u) - w(u)y'(u)}{w^2(u) - y^2(u)} = 0 \tag{3.204}$$

halini alır.

$c_0^2 \neq 1$ sabit olmak üzere, $y(u) = c_0 w(u)$ denklemi (3.204) diferansiyel denkleminin bir çözümüdür. Ancak, $\alpha(u)$ profil eğrisinin bileşenleri bu eşitliği sağlayan $M_1(1)$ dönel yüzeyi, $\mathbb{E}_2^4$ uzayında, zamansal bir düzlemin açık parçası olur. Bu nedenle, bu çözüm göz ardı edilmiştir.

Önerme 3.1. *$b = 1$ için, $\mathbb{E}_2^4$ yarı–Euclid uzayında, yer vektörü* (3.181) *ile verilen düzlemsel olmayan dönel yüzeyin sıfır ortalama eğriliğe sahip olabilmesi için gerek ve yeter koşul, bu dönel yüzeyin profil eğrisinin bileşenlerinin*

$$(y(u) + w(u))^2 + \lambda_0 (y(u) - w(u))^2 = \mu_0 \tag{3.205}$$

ile verilmesidir. Burada, $\lambda_0 \neq 0$ ve μ_0 sabitlerdir.

İspat. $M_1(1)$, yer vektörü (3.181) ile verilen, $\mathbb{E}_2^4$ yarı–Euclid uzayında, sıfır ortalama eğriliğe sahip, düzlemsel olmayan bir dönel yüzey olsun. Gerekli düzenlemeler yapılarak, (3.204) denklemi

$$\frac{\left(\frac{y'(u)}{w'(u)}\right)'}{1 - \left(\frac{y'(u)}{w'(u)}\right)^2} + \frac{\left(\frac{w(u)}{y(u)}\right)'}{1 - \left(\frac{w(u)}{y(u)}\right)^2} = 0 \tag{3.206}$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklem bir kez integre edilirse,

$$\tanh^{-1}\left(\frac{y'(u)}{w'(u)}\right) + \tanh^{-1}\left(\frac{w(u)}{y(u)}\right) = c$$

bulunur. Burada, c integrasyon sabitidir. Ters tanjant hiperbolik fonksiyonun logaritmik ifadesi kullanılırsa,

$$(y(u) + w(u))(y'(u) + w'(u)) \pm e^{2c}(y(u) - w(u))(y'(u) - w'(u)) = 0$$

elde edilir. $\lambda_0 = \pm e^{2c} \neq 0$ olarak isimlendirilip, yukarıdaki denklem bir kez daha integre edilirse, bir μ_0 sabiti için (3.205) ifadesine ulaşılır.

Yeter koşulun ispatı için, doğrudan hesaplama ile $M_1(1)$ dönel yüzeyinin $\alpha(u)$ profil eğrisinin bileşenleri (3.204) denklemini sağladığı gösterilir. □

Görüldüğü üzere, (3.205) ile verilen (3.204) diferansiyel denklemin çözümü kapalı formdadır ve kuadratik bir eğriyi ifade eder. Yani, λ_0 ve μ_0 sabitlerinin bazı uygun değerleri için, elips ve hiperbol elde edilir.

- $\lambda_0 = 1$ ve $\mu_0 = 2$ ise, (3.205) denkleminden, $w^2(u) + y^2(u) = 1$ elde edilir. Yani, α profil eğrisi $w^2 + y^2 = 1$ ile verilen bir birim çemberin parçasıdır. Bu birim çemberin bir parametrizasyonu $y(u) = \sin u$ ve $w(u) = \cos u$ olarak seçilirse, $\varepsilon = \varepsilon^* = \mathrm{sgn}(\cos 2u)$ bulunur. Bu durumda, $|u| < \frac{\pi}{4}$ için $M_1(1)$ maksimal bir yüzeydir ve $M_1(1)$ yüzeyinin parametrizasyonu

$$M_1(1) : r_1(u,v) = (\cos u \sinh v, \sin u \cosh v, \sin u \sinh v, \cos u \cosh v)$$

ile verilir. Burada, $u \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ ve $v \in \mathbb{R}$ dir. Birim çemberin başka bir parametrizasyonu $y(u) = \cos u$ ve $w(u) = \sin u$ olarak alınabilir. Bu durumda, $\varepsilon = \varepsilon^* = -\mathrm{sgn}(\cos 2u)$ şeklinde bulunur. Dolayısıyla, $\frac{\pi}{4} < u < \frac{3\pi}{4}$ için $M_1(1)$ yüzeyi pozitif tanımlı metriğe sahip ve $|u| < \frac{\pi}{4}$ için ise, $M_1(1)$ yüzeyi negatif tanımlı metriğe sahip maksimal bir yüzey olur.

- $\lambda_0 = -1$ ve $\mu_0 = 4$ ise, (3.205) denkleminden, $y(u)w(u) = 1$ elde edilir. Diğer bir deyişle, α profil eğrisi, $yw = 1$ ile verilen hiperbolün bir parçasıdır. Bu hiperbolün bir parametrizasyonu olarak, $y(u) = u$ ve $w(u) = \frac{1}{u}$ alınırsa, $M_1(1)$ dönel yüzeyinin yer vektörü için bir parametrizasyon

$$M_1(1) : r_1(u,v) = \left(\frac{\sinh v}{u}, u\cosh v, u\sinh v, \frac{\cosh v}{u}\right),\ u > 0, v \in \mathbb{R}$$

olarak verilir. Bu parametrizasyon için, $\varepsilon = -\varepsilon^* = \mathrm{sgn}(u^4 - 1)$ olduğundan, bu yüzey $0 < u < 1$ veya $u > 1$ aralıkları için, regüler sıfır ortalama eğriliğe sahip zamansal bir dönel yüzeydir.

[39] numaralı çalışmada, Vranceanu tipi dönel yüzeylerin, a ve c sabit olmak üzere, $f(u) = a(\cosh(2u + c))^{-1/2}$ fonksiyonu için maksimal olduğu gösterilmiştir. $f(u)$ fonksiyonu için, $y(u)$ ve $w(u)$ bileşenlerinin (3.205) denklemini sağladığı görülür.

Sonraki kısımda genelliği bozmaksızın, $M_1(b)$ dönel yüzeyinin α profil eğrisinin yay uzunluğuna göre parametrelendiği varsayılacaktır. Yani, α eğrisinin bileşenleri $y(u)$ ve $w(u)$ fonksiyonları, $y'^2(u) - w'^2(u) = \varepsilon$ denklemini sağlar.

2. Durum: $b \neq 1$ için, (3.203) diferansiyel denkleminin genel çözümü elde edilecektir. Bunun için, ilk olarak, aşağıdaki yardımcı teorem verilecektir.

Yardımcı Teorem 3.1. *$b \neq 1$ olmak üzere, $M_1(b)$, $\mathbb{E}^4_2$ yarı–Euclid uzayında yer vektörü* (3.181) *ile verilen düzlemsel olmayan bir dönel yüzey olsun. $M_1(b)$ yüzeyinin* *sıfır ortalama eğriliğe sahip olması için gerek ve yeter koşul, yay uzunluğuna göre parametrelenmiş α profil eğrisinin $y(u)$ ve $w(u)$ bileşenlerinin*

$$(b^2-1)(b^2y^2(u)w'^2(u)-w^2(u)y'^2(u))=a_0 \tag{3.207}$$

diferansiyel denklemini bazı a_0 sabitleri için sağlaması ve $J\subset I$ açık alt aralığı üzerinde $y'(u)w'(u)\neq 0$ olmasıdır.

İspat. $b\neq 1$ olmak üzere, $M_1(b)$, $\mathbb{E}_2^4$ uzayında yer vektörü (3.181) ile verilen, yay uzunluğuna göre parametrelenmiş α profil eğrisine sahip, düzlemsel olmayan bir dönel yüzey olsun. Bu dönel yüzeyin ortalama eğrilik vektörünün sıfır olduğu varsayılsın. İlk olarak, I'nın J gibi açık alt aralığında, $y'(u)w'(u)\neq 0$ olduğu gösterilecektir. Bunun için, J üzerinde, α eğrisinin bileşenlerinden en az birinin sabit olduğu varsayılsın. Bu durumda, $M_1(b)$ yüzeyi $\mathbb{E}_2^4$ uzayında düzlemsel bir dönel yüzeydir ve bu yüzeyin ortalama eğrilik vektörü sıfırdan farklıdır. Bu ise, teoremin varsayımı ile çelişmektedir. Yani, $y'(u)w'(u)\neq 0$ olduğu $J\subset I$ açık aralığı vardır.

$M_1(b)$ sıfır ortalama eğriliğe sahip olduğundan, (3.198) denkleminden, $\varepsilon\varepsilon^*h_{11}^3=-h_{22}^3$ dir. Bu ilişki (3.201) ve (3.202) ile verilen denklemlerde kullanıldığında

$$e_2(h_{11}^3)=\varepsilon^*h_{12}^4\omega_{34}(e_1)+2\varepsilon^*h_{11}^3\omega_{12}(e_1), \tag{3.208}$$

$$e_2(h_{12}^4)=\varepsilon^*h_{11}^3\omega_{34}(e_1)+2\varepsilon^*h_{12}^4\omega_{12}(e_1) \tag{3.209}$$

bulunur. (3.208) ve (3.209) denklemleri, sırasıyla, h_{11}^3 ve $-h_{12}^4$ ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa

$$h_{11}^3e_2(h_{11}^3)-h_{12}^4e_2(h_{12}^4)=2\varepsilon^*\left((h_{11}^3)^2-(h_{12}^4)^2\right)\omega_{12}(e_1) \tag{3.210}$$

elde edilir.

Görüldüğü üzere, $(h_{11}^3)^2-(h_{12}^4)^2=0$ ifadesi (3.210) denkleminin bir çözümüdür. $M_1(b)$ yüzeyinin (3.185) ve (3.186) ile verilen ikinci esas formunun bileşenleri ve $b\neq 1$ düşünüldüğünde, bu çözüm $a_0=0$ için (3.207) ifadesini verir.

$J\subset I$ açık alt aralığı üzerinde, $(h_{11}^3)^2-(h_{12}^4)^2\neq 0$ ise, (3.187) ve (3.210) denklemlerinden aşağıdaki ifadeye ulaşılır:

$$\frac{e_2((h_{11}^3)^2-(h_{12}^4)^2)}{4((h_{11}^3)^2-(h_{12}^4)^2)}+\frac{w(u)w'(u)-b^2y(u)y'(u)}{w^2(u)-b^2y^2(u)}=0. \tag{3.211}$$

$e_2=\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial u}$ olduğundan, bu denklem integre edilirse

$$((h_{11}^3)^2-(h_{12}^4)^2)(w^2(u)-b^2y^2(u))^2=a_0 \tag{3.212}$$

elde edilir. Burada, a_0 sıfırdan farklı bir sabittir. (3.185) ve (3.186) denklemleri ile verilen h^3_{11}, h^4_{12} yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapıldığında, (3.207) denklemine ulaşılır.

Yeter koşulun ispatı için, $\mathbb{E}^4_2$ uzayındaki $M_1(b)$ dönel yüzeyinin yay uzunluğuna göre parametrelenmiş α profil eğrisinin bileşenlerinin (3.207) denklemini sağladığı ve $J \subset I$ açık aralığı üzerinde $y'(u)w'(u) \neq 0$ varsayılsın. Bu durumda, $y'^2(u) - w'^2(u) = \varepsilon$ ve (3.207) denklemlerinden

$$y'^2(u) = \frac{\tilde{a}_0 + \varepsilon b^2 y^2(u)}{b^2 y^2(u) - w^2(u)} \text{ ve } w'^2(u) = \frac{\tilde{a}_0 + \varepsilon w^2(u)}{b^2 y^2(u) - w^2(u)} \tag{3.213}$$

bulunur. Burada, $\tilde{a}_0 = \dfrac{a_0}{b^2 - 1}$ olur. (3.213)'deki denklemlerin u bağımsız değişkenine göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} y'(u)y''(u) &= \frac{\varepsilon b^2 y(u) y'(u)}{b^2 y^2(u) - w^2(u)} - y'^2(u) \frac{b^2 y(u) y'(u) - w(u) w'(u)}{b^2 y^2(u) - w^2(u)}, \\ w'(u)w''(u) &= \frac{\varepsilon w(u) w'(u)}{b^2 y^2(u) - w^2(u)} - w'^2(u) \frac{b^2 y(u) y'(u) - w(u) w'(u)}{b^2 y^2(u) - w^2(u)} \end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir. Bu eşitlikler, sırasıyla, $-w'^2(u)$ ve $y'^2(u)$ çarpılıp, toplandığında aşağıdaki denklem bulunur:

$$y'(u)w'(u)\left(w'(u)y''(u) - y'(u)w''(u) + \varepsilon \, \frac{b^2 y(u) w'(u) - w(u) y'(u)}{w^2(u) - b^2 y^2(u)} \right) = 0. \tag{3.214}$$

$J \subset I$ aralığı üzerinde, $y'(u)w'(u) \neq 0$ olduğundan,

$$w'(u)y''(u) - y'(u)w''(u) + \varepsilon \, \frac{b^2 y(u) w'(u) - w(u) y'(u)}{w^2(u) - b^2 y^2(u)} = 0$$

olur. Yani, $J \subset I$ alt aralığı üzerind,e $H = 0$ dır. Ancak, ortalama eğrilik sürekli olduğundan, yüzeyin ortalama eğriliğinin sıfır olduğu sonucuna ulaşılır. □

Teorem 3.14. *$b \neq 1$ olmak üzere, $M_1(b)$, $\mathbb{E}^4_2$ yarı–Euclid uzayında, yer vektörü* (3.181) *ile verilen, düzlemsel olmayan bir dönel yüzey olsun. $M_1(b)$ yüzeyinin ortalama eğriliğinin sıfır olması için gerek ve yeter koşul, yay uzunluğuna göre parametrelenmiş α profil eğrisinin, $y(u)$ ve $w(u)$ bileşenlerinin aşağıdaki şekilde verilen regüler eğrilerden biri olmasıdır:*

i. $\dfrac{\varepsilon^* a_0}{1 - b^2} > 0$ *koşulunu sağlayan* $a_0 \neq 0$ *ve* c_0 *sabitler olmak üzere,*

$$\sin^{-1}\left(\frac{w(u)}{\mu_0}\right) = \pm \frac{1}{b} \sin^{-1}\left(\frac{b y(u)}{\mu_0}\right) + c_0, \quad \mu_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon^* a_0}{1 - b^2}}. \tag{3.215}$$

Bu durumda, $\varepsilon\varepsilon^* = 1$ olur, yani, $M_1(b)$ yüzeyi pozitif veya negatif tanımlı metriğe sahip uzaysal bir yüzeydir.

ii. *a_0 ve $d_0 \neq 0$ sabitler olmak üzere,*

$$\left(w(u)+\sqrt{w^2(u)-\mu_0^2}\right)^{\pm b} = d_0\left(by(u)+\sqrt{b^2y^2(u)-\mu_0^2}\right), \quad \mu_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon^* a_0}{b^2-1}}. \tag{3.216}$$

Özel olarak, $a_0 = 0$ için $b_0 \neq 0$ sabit olmak üzere, $y(u) = b_0(w(u))^{\pm b}$ elde edilir. Bu durumda, $\varepsilon\varepsilon^* = -1$, yani, $M_1(b)$ yüzeyi zamansal bir dönel yüzeydir.

İspat. $b \neq 1$ olmak üzere, $M_1(b)$, $\mathbb{E}_2^4$ uzayında, yer vektörü (3.181) ile verilen, yay uzunluğuna göre parametrelenmiş α profil eğrisine sahip düzlemsel olmayan bir dönel yüzey ve $H = 0$ olsun. Bu durumda, Yardımcı Teorem 3.1'den, bazı a_0 sabitleri için $y'(u)w'(u) \neq 0$ olduğu $J \subset I$ bir açık alt aralığı üzerinde, α profil eğrisinin bileşenlerinin (3.207) denklemini sağladığı görülür. Dolayısıyla, $y'^2(u) - w'^2(u) = \varepsilon$ ve (3.207) denklemlerinden

$$\sqrt{-\varepsilon^*(\tilde{a}_0+\varepsilon b^2y^2(u))}\, w'(u) = \pm\sqrt{-\varepsilon^*(\tilde{a}_0+\varepsilon w^2(u))}\, y'(u) \tag{3.217}$$

elde edilir. Burada, $\tilde{a}_0 = \frac{a_0}{b^2-1}$ dir. (3.217) diferansiyel denkleminin çözümü $\varepsilon\varepsilon^* = 1$ ve $\varepsilon\varepsilon^* = -1$ durumlarına göre ayrı ayrı incelenecektir.

1. Durum: $\varepsilon\varepsilon^* = 1$ ise (3.217) denklemi

$$\frac{dw}{\sqrt{-w^2(u)-\varepsilon^*\tilde{a}_0}} = \pm\frac{dy}{\sqrt{-b^2y^2(u)-\varepsilon^*\tilde{a}_0}} \tag{3.218}$$

şeklini alır. $a_0 = 0$ ise $\tilde{a}_0 = 0$ olur. Ancak, $-w^2(u) < 0$ ve $-b^2y^2(u) < 0$ olduğundan, (3.218) diferansiyel denkleminin reel çözümü yoktur. Dolayısıyla, $a_0 \neq 0$, yani, $\tilde{a}_0 \neq 0$ olmalıdır. $\varepsilon^*\tilde{a}_0 = \mu_0^2 > 0$ ise $-(w^2(u)+\mu_0^2) < 0$ ve $-(b^2y^2(u)+\mu_0^2) < 0$ olur. Bu durumda, (3.218) denkleminin reel bir çözümü yoktur. $\varepsilon^*\tilde{a}_0 = -\mu_0^2 < 0$, yani, $\mu_0^2 = \frac{\varepsilon^* a_0}{1-b^2} > 0$ ise, (3.218) denkleminin çözümü bir c_0 sabiti için

$$\sin^{-1}\left(\frac{w(u)}{\mu_0}\right) = \pm\frac{1}{b}\sin^{-1}\left(\frac{by(u)}{\mu_0}\right)+c_0, \quad \mu_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon^* a_0}{1-b^2}}$$

olarak bulunur. $\varepsilon\varepsilon^* = 1$ olduğundan, $M_1(b)$ yüzeyi $\mathbb{E}_2^4$ yarı–Euclid uzayında, pozitif veya negatif tanımlı metriğe sahip, maksimal uzaysal bir dönel yüzeydir.

2. Durum: $\varepsilon\varepsilon^* = -1$ ise (3.217) denklemi

$$\frac{dw}{\sqrt{w^2(u)-\varepsilon^*\tilde{a}_0}} = \pm\frac{dy}{\sqrt{b^2y^2(u)-\varepsilon^*\tilde{a}_0}} \tag{3.219}$$

olur. $a_0 = 0$ ise $\tilde{a}_0 = 0$ olur. Bu durumda, (3.219) denkleminden, $y(u) = b_0(w(u))^{\pm b}$ elde edilir. Burada, $b_0 \neq 0$ bir sabittir. $a_0 \neq 0$ ise $\tilde{a}_0 \neq 0$ olur. $\varepsilon^* \tilde{a}_0 = \mu_0^2 > 0$ ise, (3.219) denkleminin genel çözümü aşağıdaki formdadır:

$$\left(w(u) + \sqrt{w^2(u) - \mu_0^2} \right)^{\pm b} = d_0 \left(by(u) + \sqrt{b^2 y^2(u) - \mu_0^2} \right). \qquad (3.220)$$

Burada, d_0 sıfırdan farklı bir sabittir. $\varepsilon^* \tilde{a}_0 = -\mu_0^2 < 0$ durumunda, (3.219) denkleminin çözümü yeniden parametrelendirme ile yukarıdaki formda yazılabileceği gösterilir. $\varepsilon\varepsilon^* = -1$ olduğundan, $M_1(b)$ yüzeyi $\mathbb{E}_2^4$ yarı–Euclid uzayında, sıfır ortalama eğriliğe sahip, zamansal bir dönel yüzeydir.

Yeter koşulun ispatı için, ilk olarak, $M_1(b)$, $\mathbb{E}_2^4$ uzayında profil eğrisi α (3.215) denklemi ile verilen bir dönel yüzey olsun. (3.215) eşitliğinin u'ya göre türevi alınırsa, (3.217) denklemi elde edilir. Bu durumda, $y'(u)w'(u) \neq 0$ olur. $y'^2(u) - w'^2(u) = \varepsilon$ ve (3.218) denklemlerinden

$$y'^2(u) = \frac{\tilde{a}_0 + \varepsilon b^2 y^2(u)}{b^2 y^2(u) - w^2(u)} \quad \text{ve} \quad w'^2(u) = \frac{\tilde{a}_0 + \varepsilon w^2(u)}{b^2 y^2(u) - w^2(u)}$$

ifadelerine ulaşılır. Bu denklemler (3.207) eşitliğini sağlar. Dolayısıyla, Yardımcı Teorem 3.1'den, $M_1(b)$ dönel yüzeyinin sıfır ortalama eğriliğe sahip olduğu söylenir.

α profil eğrisi, (3.216) denklemi ile verilen, regüler bir eğri olması durumunda yukarıdakine benzer şekilde, $M_1(b)$ dönel yüzeyinin sıfır ortalama eğriliğe sahip olduğu gösterilir. $\square$

Teorem 3.14'de, $M_1(b)$ dönel yüzeyinin profil eğrileri kapalı formda elde edilmiştir. Bu nedenle, aşağıdaki örnekler verilecektir.

Örnek 3.1. $\varepsilon = \varepsilon^* = 1$ için, $a_0 = \frac{3}{4}$, $b = \frac{1}{2}$ ve $c_0 = 0$ seçildiğinde, (3.215) denkleminden, α profil eğrisinin bileşenlerinin $\sin^{-1}(w(u)) = 2\sin^{-1}\left(\frac{y(u)}{2}\right)$ sağladığı görülür. $y(u) = 2\sin u$ ve $w(u) = \sin(2u)$ olarak alınabilir. Bu durumda, $M_1(b)$ dönel yüzeyinin bir parametrizasyonu aşağıdaki şekilde verilebilir:

$$M_1(1/2) : r_1(u,v) = \left(\sin(2u)\sinh v, 2\sin u \cosh\left(\frac{v}{2}\right), 2\sin u \sinh\left(\frac{v}{2}\right), \sin(2u)\cosh v \right).$$

$M_1(1/2)$ yüzeyi, $0 < u < \frac{\pi}{4}$ ve $v \in \mathbb{R}$ için pozitif tanımlı metriğe sahip maksimal uzaysal bir yüzey olur.

Örnek 3.2. $\varepsilon = -\varepsilon^* = 1$ için, $a_0 = -3$, $b = 2$ ve $d_0 = 1$ olarak alındığında, (3.216) denkleminden, α profil eğrisinin bileşenleri $y(u) = \frac{1}{2}\cosh(2u)$ ve $w(u) = \cosh u$ şeklinde seçilebilir. Bu durumda, $M_1(b)$ dönel yüzeyinin yer vektörü

$$M_1(2) : r_1(u,v) = \left(\cosh u \sinh v, \frac{1}{2}\cosh(2u)\cosh(2v), \frac{1}{2}\cosh(2u)\sinh(2v), \cosh u \cosh v\right)$$

ile verilir. Bu durumda, $M_1(2)$ yüzeyi sıfır ortalama eğriliğe sahip zamansal bir dönel yüzeydir.

Örnek 3.3. $a_0 = 0$ için, $b_0 = 1$ ve $b = 2$ olarak alınırsa, $y(u) = (w(u))^2$ elde edilir. Yani, $y = w^2$ parabolüdür. Bu parabol için, $y(u) = u^2$ ve $w(u) = u$, $u > 0$, parametrizasyonu yapılırsa, $M_1(b)$ dönel yüzeyinin yer vektörü aşağıdaki şekilde olur:

$$M_1(2) : r_1(u,v) = \left(u \sinh v, u^2\cosh(2v), u^2\sinh(2v), u\cosh v\right).$$

Bu durumda, $0 < u < \frac{1}{2}$ veya $u > \frac{1}{2}$ ve $v \in \mathbb{R}$ için, $M_1(2)$ ortalama eğriliği sıfır olan zamansal bir dönel yüzey olur.

$\mathbb{E}^4_2$ yarı–Euclid uzayında, yer vektörü (3.190) ile verilen $M_2(b)$ dönel yüzeyinden ortalama eğriliği sıfır olanların sınıflandırması $M_1(b)$ dönel yüzeyine benzer şekilde yapılabilir. Çünkü, $y(u)$ ve $w(u)$ fonksiyonlarının yerine, sırasıyla, $z(u)$ ve $x(u)$ fonksiyonları alınırsa, $M_1(b)$ dönel yüzeyi için geçerli olan ikinci esas formun bileşenleri ve sıfır ortalama eğriliğe sahip yüzeyi karakterize eden diferansiyel denklemlerin $M_2(b)$ dönel yüzeyi için de geçerli olduğu görülür. Sadece $x'^2(u) - z'^2(u)$ ifadesinin işareti değişir, yani, $y'^2(u) - w'^2(u) = \varepsilon$ denklemi $x'^2(u) - z'^2(u) = -\varepsilon$ dönüşür. Bu nedenle, aşağıdaki ifadelerin ispatlarının detayları verilmeyecektir.

(3.194) ve (3.198) denklemleri göz önünde bulundurulursa, aşağıdaki sonuç elde edilir: $M_2(b)$ dönel yüzeyinin sıfır ortalama eğriliğe sahip olması için gerek ve yeter koşul, β profil eğrisinin bileşenleri $x(u)$ ve $z(u)$ fonksiyonlarının aşağıda belirtilen diferansiyel denklemi sağlamasıdır:

$$z'(u)x''(u) - x'(u)z''(u) + (x'^2(u) - z'^2(u))\frac{b^2 z(u)x'(u) - x(u)z'(u)}{x^2(u) - b^2 z^2(u)} = 0. \qquad (3.221)$$

Bu diferansiyel denklemin çözümü, sırasıyla, $b = 1$ ve $b \neq 1$ durumlarına göre incelenecektir.

1. Durum: $b = 1$ ise, (3.221) diferansiyel denklemi

$$z'(u)x''(u) - x'(u)z''(u) + (x'^2(u) - z'^2(u))\frac{z(u)x'(u) - x(u)z'(u)}{x^2(u) - z^2(u)} = 0 \qquad (3.222)$$

halini alır.

$c^2 \neq 1$ sabit olmak üzere, $x(u) = cz(u)$ denklemi (3.222) diferansiyel denkleminin bir çözümüdür. Ancak, $\beta(u)$ profil eğrisinin bileşenleri bu eşitliği sağlayan $M_2(1)$ dönel yüzeyi, $\mathbb{E}_2^4$ uzayında, uzaysal bir düzlemin açık parçası olur. Bu nedenle, bu çözüm göz ardı edilmiştir.

Önerme 3.2. *$b = 1$ için, $\mathbb{E}_2^4$ yarı–Euclid uzayında, yer vektörü* (3.190) *ile verilen, düzlemsel olmayan dönel yüzeyin sıfır ortalama eğriliğe sahip olabilmesi için gerek ve yeter koşul, profil eğrisinin*

$$(x(u) + z(u))^2 + \lambda_0 (x(u) - z(u))^2 = \mu_0 \tag{3.223}$$

ile verilmesidir. Burada, $\lambda_0 \neq 0$ ve μ_0 sabitlerdir.

Görüldüğü üzere, (3.223) ile verilen (3.222) diferansiyel denklemin çözümü kapalı formdadır ve kuadratik bir eğriyi ifade eder. Yani, λ_0 ve μ_0 sabitlerinin bazı uygun değerleri için elips ve hiperbol elde edilir.

- $\lambda_0 = 1$ ve $\mu_0 = 2$ ise, (3.223) denkleminden, $x^2(u) + z^2(u) = 1$ elde edilir. Yani, β profil eğrisi $x^2 + z^2 = 1$ ile verilen birim çemberin bir parçasıdır. Bu birim çemberin bir parametrizasyonu olarak $x(u) = \cos u$ ve $z(u) = \sin u$ alınırsa, $\varepsilon^* = -\varepsilon = \mathrm{sgn}(\cos 2u)$ elde edilir. $M_2(1)$ yüzeyi sıfır ortalama eğrilikli zamansal bir yüzeydir ve $M_2(1)$ dönel yüzeyinin bir parametrizasyonu

  $$M_2(1) : r_2(u,v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u \cos v, \sin u \sin v)$$

  ile verilir. Burada, $u \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ ve $v \in (0, 2\pi)$ aralığındadır. Benzer şekilde, β profil eğrisinin parametrizasyonu olarak $x(u) = \sin u$ ve $z(u) = \cos u$ seçilebilir. Bu durumda, $|u| < \frac{\pi}{4}$ için, $M_2(1)$ dönel yüzeyi sıfır ortalama eğriliğe sahip zamansal bir yüzey olur.

- $\lambda_0 = -1$ ve $\mu_0 = 4$ için, (3.223) denkleminden, $x(u)z(u) = 1$ elde edilir. Dolayısıyla, β eğrisi $xz = 1$ ile verilen hiperbolün bir parçasıdır. $x(u) = u$ ve $z(u) = \frac{1}{u}$ olarak seçilirse, $M_2(1)$ dönel yüzeyinin parametrizasyonu

  $$M_2(1) : r_2(u,v) = \left(u \cos v, u \sin v, \frac{\cos v}{u}, \frac{\sin v}{u}\right), \; u > 0, v \in (0, 2\pi)$$

olarak verilir. $\varepsilon = \varepsilon^* = \operatorname{sgn}(u^4 - 1)$ olduğundan, $0 < u < 1$ veya $u > 1$ için $M_2(1)$ yüzeyi, sırasıyla, pozitif veya negatif tanımlı metriğe sahip maksimal bir dönel yüzeydir.

[39] numaralı çalışmada, Vranceanu tipi dönel yüzeylerin a ve c sabit olmak üzere, $f(u) = a(\cosh(2u + c))^{-1/2}$ fonksiyonu için sıfır ortalama eğriliğe sahip zamansal bir yüzey olduğu gösterilmiştir. $f(u)$ fonksiyonu için β profil eğrisinin $x(u)$ ve $z(u)$ bileşenlerinin (3.223) denklemini sağladığı görülür.

Buradan sonraki kısımda, genelliği bozmaksızın, $M_2(b)$ dönel yüzeyinin β profil eğrisinin yay uzunluğuna göre parametrelendiği, yani, β eğrisinin bileşenleri $x(u)$ ve $z(u)$ fonksiyonlarının ${x'}^2(u) - {z'}^2(u) = \varepsilon$ sağladığı kabul edilecektir.

2. Durum: $b \neq 1$ için, (3.221) diferansiyel denkleminin genel çözümü elde edilecektir. Bunun için, ilk olarak, aşağıdaki yardımcı teorem verilecektir.

Yardımcı Teorem 3.2. *$b \neq 1$ olmak üzere, $M_2(b)$, $\mathbb{E}^4_2$ yarı–Euclid uzayında, yer vektörü* (3.190) *ile verilen, düzlemsel olmayan bir dönel yüzey olsun. $M_2(b)$ yüzeyinin sıfır ortalama eğriliğe sahip olması için gerek ve yeter koşul, yay uzunluğuna göre parametrelenen β profil eğrisinin $x(u)$ ve $z(u)$ bileşenlerinin*

$$(b^2-1)(b^2 z^2(u){x'}^2(u) - x^2(u){z'}^2(u)) = \bar{a}_0 \tag{3.224}$$

denklemini bazı $\bar{a}_0$ sabiti için sağlaması ve $J \subset I$ açık alt aralığı üzerinde $x'(u)z'(u) \neq 0$ olmasıdır.

Teorem 3.15. *$b \neq 1$ olmak üzere, $M_2(b)$, $\mathbb{E}^4_2$ yarı–Euclid uzayında, yer vektörü* (3.190) *ile verilen, düzlemsel olmayan bir dönel yüzey olsun. $M_2(b)$ yüzeyinin ortalama eğriliğinin sıfır olması için gerek ve yeter koşul, yay uzunluğuna göre parametrelenmiş β profil eğrisinin, $x(u)$ ve $z(u)$ bileşenlerinin aşağıdaki şekilde verilen regüler eğrilerden biri olmasıdır:*

i. $\bar{a}_0$ ve $\bar{c}_0 \neq 0$ sabitler olmak üzere,

$$\left(x(u) + \sqrt{x^2(u) - \bar{\mu}_0^2}\right)^{\pm b} = \bar{c}_0 \left(bz(u) + \sqrt{b^2 z^2(u) - \bar{\mu}_0^2}\right), \quad \bar{\mu}_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon^* \bar{a}_0}{b^2-1}}. \tag{3.225}$$

Özel olarak, $\bar{a}_0 = 0$ için, $\bar{b}_0$ sıfırdan farklı sabit olmak üzere, $z(u) = \bar{b}_0(x(u))^{\pm b}$ elde edilir. Bu durumda, $\varepsilon\varepsilon^* = 1$ olur, yani, $M_2(b)$ yüzeyi pozitif veya negatif tanımlı metriğe sahip uzaysal bir yüzeydir.

ii. $\dfrac{\varepsilon^* \bar{a}_0}{1-b^2} > 0$ *şartını sağlayan* $\bar{a}_0 \neq 0$ *ve* $\bar{d}_0$ *sabitler olmak üzere,*

$$\sin^{-1}\left(\frac{x(u)}{\bar{\mu}_0}\right) = \pm\frac{1}{b}\sin^{-1}\left(\frac{bz(u)}{\bar{\mu}_0}\right) + \bar{d}_0, \quad \bar{\mu}_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon^* \bar{a}_0}{1-b^2}}. \qquad (3.226)$$

Bu durumda, $\varepsilon\varepsilon^* = -1$*, yani,* $M_2(b)$ *yüzeyi zamansal bir dönel yüzeydir.*

Teorem 3.15'de profil eğrileri kapalı formda verilen, sıfır ortalama eğrilikli $M_2(b)$ dönel yüzeyler ilgili aşağıdaki örnekler verilecektir.

Örnek 3.4. $\bar{a}_0 = 3$, $b = 2$ ve $\bar{c}_0 = e$ sabitleri (3.225) denkleminde yerine konulduğunda β profil eğrisinin bileşenleri $x(u) = \cosh u$ ve $z(u) = \frac{1}{2}\cosh(2u-1)$ olarak alınır. Bu durumda, $M_2(b)$ dönel yüzeyinin yer vektörü

$$r_2(u,v) = \left(\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, \frac{1}{2}\cosh(2u-1)\cos(2v), \frac{1}{2}\cosh(2u-1)\sin(2v)\right)$$

ile verilir. $0 < u < 1$ ve $v \in (0, 2\pi)$ için $\varepsilon = \varepsilon^* = 1$ olur, yani, $M_2(b)$ yüzeyi maksimal uzaysal bir dönel yüzeydir.

Örnek 3.5. $\bar{a}_0 = 0$, $\bar{b}_0 = 1$ ve $b = 2$ alınırsa, $z(u) = (x(u))^2$ olarak bulunur. $z = x^2$ parabolünün $z(u) = u^2$ ve $x(u) = u$, $u > 0$, parametrizasyonu seçilirse, $M_2(b)$ dönel yüzeyinin yer vektörü

$$M_2(2) : r_2(u,v) = \left(u\cos v, u \sin v, u^2\cos(2v), u^2 \sin(2v)\right)$$

elde edilir.

Bu durumda, $0 < u < \frac{1}{2}$ veya $u > \frac{1}{2}$ ve $v \in (0, 2\pi)$ için, $M_2(b)$, sırasıyla, pozitif veya negatif tanımlı metriğe sahip maksimal uzaysal bir yüzeydir.

Örnek 3.6. $\bar{a}_0 = -\frac{3}{4}$, $b = \frac{1}{2}$ ve $\bar{d}_0 = -\frac{\pi}{4}$ seçildiğinde, (3.226) denkleminden β profil eğrisinin bileşenlerinin $\sin^{-1}(x(u)) = 2\sin^{-1}\left(\dfrac{z(u)}{2}\right) - \dfrac{\pi}{4}$ ifadesini sağladığı görülür. Bu eşitlik için, $z(u) = 2\sin u$ ve $x(u) = \sin(2u - \frac{\pi}{4})$ olarak alınabilir.

Bu durumda, $M_2(b)$ dönel yüzeyinin bir parametrizasyonu aşağıdaki şekilde verilebilir:

$$r_2(u,v) = \left(\sin\left(2u - \frac{\pi}{4}\right)\cos v, \sin\left(2u - \frac{\pi}{4}\right)\sin v, 2\sin u \cos\left(\frac{v}{2}\right), 2\sin u \sin\left(\frac{v}{2}\right)\right).$$

Bu yüzey, $\frac{\pi}{8} < u < \frac{\pi}{4}$ ve $v \in (0, 2\pi)$ için zamansal bir yüzeydir.

3.3.1.1 Noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip sıfır ortalama eğrilikli genel dönel yüzeyler

Önceki bölümde, yer vektörü sırasıyla (3.181) ve (3.190) denklemleri ile verilen $M_1(b)$ ve $M_2(b)$ dönel yüzeylerinden sıfır ortalama eğrilikli olanlar sınıflandırılmıştı. Bu bölümde ise, bu dönel yüzeylerden Gauss tasviri noktasal 1–tipinden olanlar incelenecektir.

Teorem 3.16. *$M_1(b)$, $\mathbb{E}^4_2$ yarı–Euclid uzayında yer vektörü* (3.181) *ile verilen, sıfır ortalama eğrilikli, düzlemsel olmayan bir dönel yüzey olsun.*

i. *Profil eğrisinin bileşenleri* (3.205) *denklemini sağlayan $M_1(1)$ dönel yüzeyi ikinci çeşit noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahiptir.*

ii. *$b \neq 1$ olmak üzere, zamansal $M_1(b)$ dönel yüzeyinin ikinci çeşit noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul, profil eğrisinin bileşenlerinin $b_0 \neq 0$ sabit olmak üzere, $y(u) = b_0(w(u))^{\pm b}$ sağlamasıdır.*

İspat. $M_1(b)$, $\mathbb{E}^4_2$ yarı–Euclid uzayında, yer vektörü (3.181) ile verilen α profil eğrisine sahip, sıfır ortalama eğrilikli düzlemsel olmayan bir dönel yüzey olsun. (2.32) denkleminden $M_1(b)$ yüzeyinin ν Gauss tasvirinin Laplasiyeni

$$\begin{aligned}\Delta\nu =& ||h||^2\nu + 2h^4_{12}(\varepsilon^* h^3_{22} - \varepsilon h^3_{11})e_1 \wedge e_2 + \omega_{34}(e_1)(\varepsilon h^3_{11} + \varepsilon^* h^3_{22})e_1 \wedge e_3 \\ &+ (\varepsilon\varepsilon^* e_2(h^3_{11}) + e_2(h^3_{22}))e_2 \wedge e_4\end{aligned} \tag{3.227}$$

şeklinde hesaplanır. $H = 0$ olduğundan, (3.198) denkleminden, $\varepsilon\varepsilon^* h^3_{11} = -h^3_{22}$ ilişkisi vardır. Bu durumda, (3.227) denklemi aşağıdaki denkleme dönüşür:

$$\Delta\nu = ||h||^2\nu - 4\varepsilon h^3_{11}h^4_{12}e_1 \wedge e_2. \tag{3.228}$$

(2.45) denklemi ile (3.228) ifadeleri karşılaştırıldığında

$$f(1+\varepsilon\varepsilon^* C_{34}) = ||h||^2, \tag{3.229}$$

$$fC_{12} = -4\varepsilon^* h^3_{11}h^4_{12}, \tag{3.230}$$

$$C_{13} = C_{14} = C_{23} = C_{24} = 0 \tag{3.231}$$

denklemleri elde edilir. ν Gauss tasviri ikinci çeşit noktasal 1–tipinden ise, $C_{12} \neq 0$ olmalıdır. (2.48) denklemi $i = 1$ ve (2.49) denklemi $i = 2$ için yazılırsa,

$$h^3_{11}C_{12} + h^4_{12}C_{34} = 0, \tag{3.232}$$

$$h^4_{12}C_{12} + h^3_{11}C_{34} = 0 \tag{3.233}$$

denklem sistemi elde edilir ve bu sistemin sıfırdan farklı çözümü olmalıdır. Dolayısıyla, $(h^3_{11})^2 - (h^4_{12})^2 = 0$ dır. (3.185) ve (3.186) denklemlerindeki h^3_{11} ve h^4_{12} ifadeleri göz önünde bulundurulduğunda

$$(b^2-1)(b^2y^2(u)w'^2(u) - w^2(u)y'^2(u)) = 0$$

elde edilir. Bu durumda, $b = 1$ veya $b^2y^2(u)w'^2(u) - w^2(u)y'^2(u) = 0$ olabilir.

1. Durum: $b = 1$ ise, Önerme 3.1'den, $M_1(b)$ dönel yüzeyinin profil eğrisi α'nın koordinat fonksiyonları $y(u), w(u)$'nun (3.205) denklemini sağladığı söylenir. Ayrıca, (3.185) ve (3.186) denklemlerinden, $M_1(b)$ yüzeyinin ikinci esas formunun bileşenleri arasında, $h^4_{12} = -\varepsilon\varepsilon^* h^3_{11}$ ilişkisinin olduğu görülür. Bu durumda, (4.52) ve (3.232) denklemlerinden, $C_{12} = -\frac{1}{2}, C_{34} = -\frac{\varepsilon\varepsilon^*}{2}$ ve $f = -8\varepsilon(h^3_{22})^2$ olarak bulunur. Diğer taraftan, α profil eğrisi düzlemsel olduğundan, $h^3_{22} = \kappa$ dır. Dolayısıyla, $f = -8\varepsilon\kappa^2$ dir. Sonuç olarak, bileşenleri (3.205) denklemi ile verilen α profil eğrisine sahip $M_1(1)$ dönel yüzeyinin ν Gauss tasviri ikinci çeşit noktasal 1–tipindendir ve (2.45) eşitliğini

$$f = -8\varepsilon\kappa^2$$

fonksiyonu ve

$$C = -\frac{\varepsilon\varepsilon^*}{2}e_1 \wedge e_2 - \frac{1}{2}e_3 \wedge e_4$$

sabit vektörü için sağlar.

2. Durum: $b \neq 1$ olmak üzere, $b^2y^2(u)w'^2(u) - w^2(u)y'^2(u) = 0$ ise, bu diferansiyel denklemin çözümü sıfırdan farklı b_0 sabiti için, $y(u) = b_0(w(u))^{\pm b}$ şeklindedir. Teorem 3.14'de, profil eğrisinin bileşenleri bu eşitliği sağlayan dönel yüzeylerinin zamansal olması gerektiği gösterilmişti, yani, $\varepsilon\varepsilon^* = -1$ dir. Bu durumda, (3.185) ve (3.186) denklemlerinde,n $h^4_{12} = \pm h^3_{11}$ olduğu görülür. Yukarıdakine benzer şekilde, (4.52) ve (3.232) denklemlerinden, ν Gauss tasvirinin (2.45) denklemini

$$f = -8\varepsilon\kappa^2$$

fonksiyonu ve

$$C = \pm\frac{1}{2}e_1 \wedge e_2 - \frac{1}{2}e_3 \wedge e_4$$

sabit vektörü için sağladığı bulunur.

2. Durumun yeter koşulunun ispatı doğrudan hesaplama ile gösterilir. $\square$

$\mathbb{E}_2^4$ yarı–Euclid uzayında, yer vektörü (3.190) ile verilen, sıfır ortalama eğrilikli $M_2(b)$ dönel yüzeylerinden noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip olanların sınıflandırılması yukarıdakine benzer şekilde yapılabilir. Bu nedenle, Teorem 3.17'nin ispatı verilmeyecektir.

Teorem 3.17. *$M_2(b)$, $\mathbb{E}_2^4$ yarı–Euclid uzayında, yer vektörü* (3.190) *ile verilen, sıfır ortalama eğrilikli düzlemsel olmayan bir dönel yüzey olsun.*

i. *Profil eğrisinin bileşenleri* (3.223) *denklemini sağlayan $M_2(1)$ dönel yüzeyi, ikinci çeşit noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahiptir.*

ii. *$b \neq 1$ için, uzaysal $M_2(b)$ dönel yüzeyinin ikinci çeşit noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul, profil eğrisinin bileşenlerinin $\bar{b}_0 \neq 0$ sabit olmak üzere, $z(u) = \bar{b}_0(x(u))^{\pm b}$ sağlamasıdır.*

Teorem 3.16'nın ispatından görüldüğü üzere, $M_1(b)$ dönel yüzeyinin birinci çeşit noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip olması için, $h_{11}^3 = 0$ veya $h_{12}^4 = 0$ olmalıdır. Bu durumda, $M_1(b)$ yüzeyi, 3–boyutlu yarı–Euclid uzayı içinde kalır.

Benzer durum, $M_2(b)$ dönel yüzeyi içinde geçerlidir. Dolayısıyla, aşağıdaki sonuç ifade edilir.

Sonuç 3.6. *$\mathbb{E}_2^4$ yarı–Euclid uzayında, yer vektörü* (3.181) *veya* (3.190) *ile verilen, sıfır ortalama eğriliğe sahip dönel yüzeyin Gauss tasviri birinci çeşit noktasal 1–tipinden olamaz.*

3.3.2 Yarı–ombilik dönel yüzeyler

Bu bölümde, $\mathbb{E}_2^4$ yarı–Euclid uzayında, yer vektörü, sırasıyla, (3.181) ve (3.190) ile verilen, $M_1(b)$ ve $M_2(b)$ dönel yüzeylerinden yarı–ombilik olanlar sınıflandırılacaktır. Yarı–ombilik tanımı ve (3.198) denklemi kullanılırsa, $M_1(b)$ veya $M_2(b)$ yüzeylerinin yarı–ombilik olması için gerek ve yeter koşul, bu yüzeylerin ikinci esas formunun katsayıları arasında $\varepsilon^* h_{11}^3 = \varepsilon h_{22}^3$ ilişkisi olmasıdır sonucuna ulaşılır.

İlk olarak, $\mathbb{E}_2^4$ yarı–Euclid uzayında, yer vektörü (3.181) ile verilen $M_1(b)$ dönel yüzeylerinden yarı–ombilik olanların sınıflandırılması yapılacaktır.

(3.185) denklemi ile verilen ifadeler $\varepsilon^* h_{11}^3 = \varepsilon h_{22}^3$ denkleminde yerine yazılırsa, aşağıdaki sonuca ulaşılır:

$M_1(b)$ yüzeyinin yarı–ombilik olması için gerek ve yeter koşul, α profil eğrisinin bileşenleri $y(u)$ ve $w(u)$'nun

$$w'(u)y''(u) - y'(u)w''(u) - (y'^2(u) - w'^2(u))\frac{b^2y(u)w'(u) - w(u)y'(u)}{w^2(u) - b^2y^2(u)} = 0 \quad (3.234)$$

diferansiyel denklemini sağlamasıdır.

$b = 1$ için, (3.234) diferansiyel denklemi aşağıdaki hali alır:

$$w'(u)y''(u) - y'(u)w''(u) - (y'^2(u) - w'^2(u))\frac{y(u)w'(u) - w(u)y'(u)}{w^2(u) - y^2(u)} = 0 \quad (3.235)$$

ve gerekli düzenlemeler yapılırsa, (3.235) denkleminin çözümü

$$w(u) + y(u) = \lambda_0(w(u) - y(u))^{\mu_0} \quad (3.236)$$

şeklindedir. Burada, λ_0 ve μ_0 sıfırdan farklı sabitler olmak üzere, $(w(u) - y(u))^{\mu_0}$ reel değerli bir fonksiyondur. (3.236) ile verilen çözüm kapalı formdadır. Bu nedenle, α profil eğrisinin bileşenlerinin daha iyi anlaşılabilmesi için μ_0 sabitinin bazı değerleri için inceleme yapılacaktır.

- $\lambda_0^2 \neq 1$ olmak üzere, $\mu_0 = 1$ ise, (3.236) denklemi $y(u) = \frac{\lambda_0 - 1}{\lambda_0 + 1}w(u)$ şeklinde yazılır. Yani, α eğrisi orjinden geçen bir doğrunun parçasıdır. Bu durumda, $M_1(1)$ dönel yüzeyi $\mathbb{E}_2^4$ yarı–Euclid uzayında zamansal bir düzlemin açık parçası olur.
- $\mu_0 = -1$ ise, (3.236) denklemi $w^2(u) - y^2(u) = \lambda_0$ olur. Bu durum Teorem 3.18'in (a–5) ve (a–6) şıklarında görülmektedir.

Ayrıca, $b = 1$ ise, (3.185) ve (3.186) denklemlerinden, $h_{12}^4 = -\varepsilon\varepsilon^* h_{11}^3$ dir. Bununla birlikte, $\varepsilon^* h_{11}^3 = \varepsilon h_{22}^3$ göz önüne alınırsa, (3.199) denkleminden aşağıdaki ifadeye ulaşılır.

Önerme 3.3. *$b = 1$ durumunda, $\mathbb{E}_2^4$ yarı–Euclid uzayında, yer vektörü* (3.181) *ile verilen yüzeyin yarı–ombilik olması için gerek ve yeter koşul, bu yüzeyin düz olmasıdır.*

[12] numaralı çalışmada, $\mathbb{E}_2^4$ yarı–Euclid uzayında, Vranceanu tipi dönel yüzeylerden düz olanlar çalışılmış ve bu yüzeyin düz olabilmesi için gerek ve yeter koşul, λ ve μ sabitler olmak üzere, $f(u) = \lambda e^{\mu u}$ olmasıdır sonucu elde edilmiştir. Bu $f(u)$ fonksiyonu için,

$$\varepsilon^* = \mathrm{sgn}(\lambda^2 e^{2\mu u}) \text{ ve } \varepsilon = \mathrm{sgn}(\lambda^2(1 - \mu^2)e^{2\mu u})$$

olarak hesaplanır. Her λ ve μ sabiti için, $\varepsilon^* = 1$ iken, $|\mu| < 1$ ise $\varepsilon = 1$ veya $|\mu| > 1$ ise $\varepsilon = -1$ olur. Dolayısıyla, $\mathbb{E}^4_2$ yarı–Euclid uzayında, Vranceanu tipi yarı–ombilik yüzeyler $|\mu| < 1$ için uzaysal ve $|\mu| > 1$ için ise zamansal bir dönel yüzey olur.

Şimdi, $\mathbb{E}^4_2$ yarı–Euclid uzayında, yarı–ombilik $M_1(b)$ dönel yüzeylerinin sınıflandırılması yapılacaktır. $\Phi(\theta, b, \varepsilon, \varepsilon^*)$ ve $\Omega(\theta, b, \varepsilon, \varepsilon^*)$ aşağıdaki şekilde tanımlanan fonksiyonlar olsun:

$$\Phi(\theta, b, \varepsilon, \varepsilon^*) = \int_0^\theta \sqrt{\frac{\varepsilon^* c_0^2(\sinh^2\eta - b^2\cosh^2\eta)}{\varepsilon^* c_0^2(\sinh^2\eta - b^2\cosh^2\eta) - \varepsilon}} d\eta \tag{3.237}$$

$$\Omega(\theta, b, \varepsilon, \varepsilon^*) = \int_0^\theta \sqrt{\frac{\varepsilon^* c_0^2(\cosh^2\eta - b^2\sinh^2\eta)}{\varepsilon^* c_0^2(\cosh^2\eta - b^2\sinh^2\eta) + \varepsilon}} d\eta. \tag{3.238}$$

Burada, $c_0 \neq 0$, $\theta > 0$ ve integrallerdeki integrandlar reel değerli fonksiyonlardır.

Bundan sonraki kısım için genelliği bozmaksızın, $M_1(b)$ dönel yüzeyinin α profil eğrisinin yay uzunluğuna göre parametrelendiği varsayılacaktır, yani, $y'^2(u) - w'^2(u) = \varepsilon$ olur.

Teorem 3.18. *$M_1(b)$, $\mathbb{E}^4_2$ yarı–Euclid uzayında, yer vektörü* (3.181) *ile verilen, düzlemsel olmayan bir dönel yüzey olsun.*

(a) $M_1(b)$ yüzeyinin yarı–ombilik uzaysal bir yüzey olması için gerek ve yeter koşul yay uzunluğuna göre parametrelenmiş α profil eğrisinin bileşenlerinin aşağıdaki durumlardan biri olmasıdır:

(a–1) $c \in \mathbb{R}_+$, $c_0^2(\sinh^2\theta - b^2\cosh^2\theta) > 1$ koşulunu sağlayan bazı $c_0 \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{cases} y(\theta) = ce^{\psi(\theta)}\cosh\theta, & w(\theta) = ce^{\psi(\theta)}\sinh\theta \\ \psi(\theta) = \Phi(\theta, b, 1, 1), & 0 < b < 1. \end{cases}$$

(a–2) $c \in \mathbb{R}_+$ için

$$\begin{cases} y(\theta) = ce^{\psi(\theta)}\cosh\theta, & w(\theta) = ce^{\psi(\theta)}\sinh\theta \\ \psi(\theta) = \Phi(\theta, b, -1, -1), & b \geq 1. \end{cases}$$

Bu durumda, $M_1(b)$ yüzeyi negatif tanımlı metriğe sahip uzaysal bir dönel yüzeydir.

(a–3) $c \in \mathbb{R}_+$ için

$$\begin{cases} y(\theta) = ce^{\varphi(\theta)}\sinh\theta, & w(\theta) = ce^{\varphi(\theta)}\cosh\theta \\ \varphi(\theta) = \Omega(\theta, b, 1, 1), & 0 < b \leq 1. \end{cases}$$

(a–4) $c \in \mathbb{R}_+$ ve $c_0^2(b^2 \sinh^2\theta - \cosh^2\theta) > 1$ koşulunu sağlayan bazı $c_0 \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{cases} y(\theta) = ce^{\varphi(\theta)} \sinh\theta, & w(\theta) = ce^{\varphi(\theta)} \cosh\theta \\ \varphi(\theta) = \Omega(\theta, b, -1, -1), & b > 1. \end{cases}$$

Bu durumda, $M_1(b)$ yüzeyi negatif tanımlı metriğe sahip uzaysal bir dönel yüzeydir.

(a–5) r_0 sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere,

$$y(\theta) = r_0 \sinh\theta, \;\; w(\theta) = r_0 \cosh\theta, \;\; 0 < b \leq 1.$$

Bu durumda, $M_1(b)$ yüzeyi tamamiyle $\mathbb{H}_1^3(-r_0^{-2}) \subset \mathbb{E}_2^4$ anti de Sitter uzayı içinde kalır.

(a–6) r_0 sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere,

$$y(\theta) = r_0 \cosh\theta, \;\; w(\theta) = r_0 \sinh\theta, \;\; b \geq 1.$$

Bu durumda, $M_1(b)$ yüzeyi negatif tanımlı metriğe sahip tamamiyle $\mathbb{S}_2^3(r_0^{-2}) \subset \mathbb{E}_2^4$ yarı–küresi içinde kalan uzaysal bir dönel yüzeydir.

(b) $M_1(b)$ yüzeyinin yarı–ombilik zamansal bir yüzey olması için gerek ve yeter koşul, yay uzunluğuna göre parametrelenmiş α profil eğrisinin bileşenlerinin aşağıdaki durumlardan biri olmasıdır:

(b–1) $c \in \mathbb{R}_+$ ve $c_0^2(b^2 \cosh^2\theta - \sinh^2\theta) > 1$ koşulunu sağlayan bazı $c_0 \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{cases} y(\theta) = ce^{\psi(\theta)} \cosh\theta, & w(\theta) = ce^{\psi(\theta)} \sinh\theta \\ \psi(\theta) = \Phi(\theta, b, 1, -1), & b \geq 1. \end{cases}$$

(b–2) $c \in \mathbb{R}_+$ için

$$\begin{cases} y(\theta) = ce^{\psi(\theta)} \cosh\theta, & w(\theta) = ce^{\psi(\theta)} \sinh\theta \\ \psi(\theta) = \Phi(\theta, b, -1, 1), & 0 < b < 1. \end{cases}$$

(b–3) $c \in \mathbb{R}_+$ için

$$\begin{cases} y(\theta) = ce^{\varphi(\theta)} \sinh\theta, & w(\theta) = ce^{\varphi(\theta)} \cosh\theta \\ \varphi(\theta) = \Omega(\theta, b, 1, -1), & b > 1. \end{cases}$$

(b–4) $c \in \mathbb{R}_+$ ve $c_0^2(\cosh^2\theta - b^2 \sinh^2\theta) > 1$ koşulunu sağlayan bazı $c_0 \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{cases} y(\theta) = ce^{\varphi(\theta)} \sinh\theta, & w(\theta) = ce^{\varphi(\theta)} \cosh\theta \\ \varphi(\theta) = \Omega(\theta, b, -1, 1), & 0 < b \leq 1. \end{cases}$$

(b–5) r_0 sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere,

$$y(\theta) = r_0 \sinh\theta,\;\; w(\theta) = r_0 \cosh\theta,\;\; b > 1.$$

Bu durumda, $M_1(b)$ yüzeyi tamamiyle $\mathbb{H}^3_1(-r_0^{-2}) \subset \mathbb{E}^4_2$ anti De Sitter uzayının içinde kalır.

(b–6) r_0 sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere,

$$y(\theta) = r_0 \cosh\theta,\;\; w(\theta) = r_0 \sinh\theta,\;\; 0 < b < 1.$$

Bu durumda, $M_1(b)$ yüzeyi tamamiyle $\mathbb{S}^3_2(r_0^{-2}) \subset \mathbb{E}^4_2$ yarı–küresi içinde kalır.

İspat. $M_1(b)$, $\mathbb{E}^4_2$ yarı–Euclid uzayında, yer vektörü (3.181) ile verilen, yay uzunluğuna göre parametrelenmiş α profil eğrisine sahip, düzlemsel olmayan yarı–ombilik bir dönel yüzey olsun. (3.187) ve (3.188) denklemlerinde görüldüğü üzere, $\omega_{12}(e_1), \omega_{34}(e_1)$ konneksiyon formları yalnızca, u'ya bağlı fonksiyonlar ve $\omega_{12}(e_2) = \omega_{34}(e_2) = 0$ dır. Bu durumda, R^D normal eğrilik tensörünün tanımı ve (3.200) denklemi kullanılırsa

$$-e_2(\omega_{34}(e_1)) + \varepsilon^* \omega_{12}(e_1)\omega_{34}(e_1) = h^4_{12}(\varepsilon h^3_{22} - \varepsilon^* h^3_{11}) \tag{3.239}$$

elde edilir. Diğer taraftan, $M_1(b)$ yarı–ombilik yüzey olduğundan, ikinci esas formu katsayıları arasında, $\varepsilon^* h^3_{11} = \varepsilon h^3_{22}$ şeklinde bir ilişki bulunmaktadır. Bu nedenle, (3.239) denklemi

$$e_2(\omega_{34}(e_1)) - \varepsilon^* \omega_{12}(e_1)\omega_{34}(e_1) = 0 \tag{3.240}$$

halini alır. (3.182) ve (3.187) ifadeleri yukarıdaki denklemde yerine yazıldığında,

$$\frac{d}{du}(\omega_{34}(e_1)) = -\frac{w(u)w'(u) - b^2 y(u)y'(u)}{w^2(u) - b^2 y^2(u)}\omega_{34}(e_1) \tag{3.241}$$

diferansiyel denklemine ulaşılır. Şimdi bu diferansiyel denklemin çözümü incelenecektir.

Görüldüğü üzere, $\omega_{34}(e_1) = 0$, bu denklemin aşikar bir çözümüdür. (3.188) denkleminden

$$w(u)w'(u) - y(u)y'(u) = 0$$

olur. $\lambda_0 \neq 0$ sabiti için bu denklemin çözümü ise, $w^2(u) - y^2(u) = \lambda_0$ şeklindedir. λ_0 sabitinin işaretine göre iki ayrı durum incelenecektir.

1. Durum: $\lambda_0 = r_0^2 > 0$ için, $w^2(u) - y^2(u) = r_0^2$ eğrisinin bir parametrizasyonu

$$y(u) = r_0 \sinh\theta(u) \text{ ve } w(u) = r_0 \cosh\theta(u)$$

şeklinde seçilebilir. Burada, $\theta(u)$, $\theta'(u) \neq 0$ şartını sağlayan, her mertebeden türevlenebilir bir fonksiyondur. Bu parametrizasyon için,

$$\varepsilon = \operatorname{sgn}(r_0^2 \theta'^2(u)) \text{ ve } \varepsilon^* = \operatorname{sgn}(r_0^2(\cosh^2\theta(u) - b^2 \sinh^2\theta(u)))$$

şeklinde hesaplanır. Dolayısıyla, her b için $\varepsilon = 1$ olurken, $0 < b \leq 1$ için $\varepsilon^* = 1$, $b > 1$ için ise $\varepsilon^* = -1$ olur. Sonuç olarak, $0 < b \leq 1$ için, $M_1(b)$ dönel yüzeyi α profil eğrisi (a–5) ile verilen uzaysal bir yüzey ve $b > 1$ için, $M_1(b)$ dönel yüzeyi α profil eğrisi (b–5) ile verilen zamansal bir yüzey olur. Ayrıca,

$$\langle r_1(u,v), r_1(u,v)\rangle = y^2(u) - w^2(u) = -r_0^2 < 0$$

olduğundan $M_1(b)$ dönel yüzeyi tamamiyle $\mathbb{H}_1^3(-r_0^{-2}) \subset \mathbb{E}_2^4$ anti de Sitter uzayı içinde kalır.

2. Durum: $\lambda_0 = -r_0^2 < 0$ için, $w^2(u) - y^2(u) = -r_0^2$ eğrisinin bir parametrizasyonu

$$y(u) = r_0 \cosh\theta(u) \text{ ve } w(u) = r_0 \sinh\theta(u)$$

olarak alınabilir. Burada, $\theta(u)$, $\theta'(u) \neq 0$ şartını sağlayan, her mertebeden türevlenebilir bir fonksiyondur. Bu parametrizasyon için

$$\varepsilon = \operatorname{sgn}(-r_0^2 \theta'^2(u)) \text{ ve } \varepsilon^* = \operatorname{sgn}(r_0^2(\sinh^2\theta(u) - b^2 \cosh^2\theta(u)))$$

şeklinde bulunur. Dolayısıyla, her b için $\varepsilon = -1$ olurken, $0 < b < 1$ için $\varepsilon^* = 1$, $b \geq 1$ için, $\varepsilon^* = -1$ olur. Bu durumda, $b \geq 1$ için $M_1(b)$ dönel yüzeyi, α profil eğrisi (a–6) ile verilen negatif tanımlı metriğe göre uzaysal bir yüzey ve $0 < b < 1$ için, $M_1(b)$ dönel yüzeyi, α profil eğrisi (b–6) ile verilen zamansal bir yüzey olur. Ayrıca,

$$\langle r_1(u,v), r_1(u,v)\rangle = y^2(u) - w^2(u) = r_0^2$$

olduğundan, $M_1(b)$ dönel yüzeyi tamamiyle $\mathbb{S}_2^3(r_0^{-2}) \subset \mathbb{E}_2^4$ yarı–küresi içinde kalır.

$\omega_{34} \neq 0$ olması durumunda, (3.241) diferansiyel denkleminin genel çözümü aşağıdaki şekilde bulunur. (3.188) denklemi ile verilen $\omega_{34}(e_1)$ normal konneksiyonun ifadesi (3.241) denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{\varepsilon\varepsilon^* b(w(u)w'(u) - y(u)y'(u))}{\sqrt{\varepsilon^*(w^2(u) - b^2 y^2(u))}\sqrt{\varepsilon(y'^2(u) - w'^2(u))}} = b_0 \tag{3.242}$$

elde edilir. Burada, $b_0 \neq 0$ bir sabittir. $y'^2(u) - w'^2(u) = \varepsilon$ olduğundan

$$\frac{w(u)w'(u) - y(u)y'(u)}{\sqrt{\varepsilon^*(w^2(u) - b^2y^2(u))}} = c_0 \tag{3.243}$$

şekline dönüşür. Burada, $c_0 = \frac{\varepsilon\varepsilon^* b_0}{b} \neq 0$ sabittir. Bu diferansiyel denklemin genel çözümünü elde edebilmek için aşağıdaki şekilde değişken dönüşümü yapılacaktır. İlk olarak,

$$y(u) = r(u)\cosh\theta(u) \text{ ve } w(u) = r(u)\sinh\theta(u)$$

değişken dönüşümü düşünülürse, $y'^2(u) - w'^2(u) = \varepsilon$ ve (3.243) diferansiyel denklemi sırasıyla aşağıdaki ifadelere dönüşür:

$$\varepsilon du^2 = dr^2 - r^2 d\theta^2 \text{ ve } du = -\frac{dr}{c_0\sqrt{\varepsilon^*(\sinh^2\theta - b^2\cosh^2\theta)}}.$$

Bu denklemlerden

$$\frac{dr}{r} = \sqrt{\frac{\varepsilon^* c_0^2(\sinh^2\theta - b^2\cosh^2\theta)}{\varepsilon^* c_0^2(\sinh^2\theta - b^2\cosh^2\theta) - \varepsilon}}d\theta \tag{3.244}$$

elde edilir. İntegrandın tanımlı olabilmesi için, $\varepsilon^* c_0^2(\sinh^2\theta - b^2\cosh^2\theta) > \varepsilon$ olmalıdır. Bu durumda, (3.244) diferansiyel denkleminin çözümü

$$r(\theta) = ce^{\Phi(\theta,b,\varepsilon,\varepsilon^*)} \tag{3.245}$$

şeklindedir. Burada, $c \in \mathbb{R}_+$ ve $\Phi(\theta,b,\varepsilon,\varepsilon^*)$ tanımı (3.237) denklemiyle verilen bir fonksiyondur. Bunun için,

$$\varepsilon^* = \operatorname{sgn}(r^2(u)(\sinh^2\theta(u) - b^2\cosh^2\theta(u)))$$

şeklindedir. Dolayısıyla, $0 < b < 1$ için $\varepsilon^* = 1$ ve $b \geq 1$ için $\varepsilon^* = -1$ olur. ε işaretine göre, yani α profil eğrisinin karakterine göre, farklı durumlar oluşur.

i. $\varepsilon = \varepsilon^* = 1$ ise, (3.237) denklemindeki integrandın tanımlı olabilmesi $c_0^2(\sinh^2\theta - b^2\cosh^2\theta) > 1$ olmalıdır. Bu durumda, $M_1(b)$ dönel yüzeyi (a–1) şıkkında verilen profil eğrisine sahip bir yüzeydir.

ii. $\varepsilon = \varepsilon^* = -1$ ise, $M_1(b)$ dönel yüzeyi profil eğrisi (a–2) şıkkında verilen bir yüzeydir.

iii. $\varepsilon = -1$ ve $\varepsilon^* = 1$ ise, $M_1(b)$ dönel yüzeyinin profil eğrisi (b–2) ile verilen bir yüzeydir.

iv. $\varepsilon = -\varepsilon^* = 1$ ise, (3.237) ile verilen fonksiyonun tanımlı olabilmesi $c_0^2(b^2\cosh^2\theta - \sinh^2\theta) > 1$ şartı olmalıdır ve (b–1) ile verilen yüzeydir.

$$y(u) = r(u)\sinh\theta(u) \text{ ve } w(u) = r(u)\cosh\theta(u)$$

değişken dönüşümü de seçilebilir. Değişken dönüşümü sonrasında elde edilen diferansiyel denklemin çözümü yukarıdakine benzer şekilde

$$r(\theta) = ce^{\Omega(\theta,b,\varepsilon,\varepsilon^*)} \tag{3.246}$$

olarak bulunur. Burada, $c \in \mathbb{R}_+$ ve $\Omega(\theta,b,\varepsilon,\varepsilon^*)$ tanımı (3.238) ile verilen bir fonksiyondur. Bunun için

$$\varepsilon^* = \operatorname{sgn}(r^2(u)(\cosh^2\theta(u) - b^2\sinh^2\theta(u)))$$

şeklindedir. $0 < b \leq 1$ için, $\varepsilon^* = 1$ ve $b > 1$ için $\varepsilon^* = -1$ olur. ε işaretine göre aşağıdaki durumlar oluşur:

i. $\varepsilon = \varepsilon^* = 1$ ise, $M_1(b)$ dönel yüzeyi profil eğrisi (a–3) ile verilen yüzeydir;

ii. $\varepsilon = -\varepsilon^* = 1$ ise, $M_1(b)$ dönel yüzeyi profil eğrisi (b–3) ile verilen yüzeydir;

iii. $\varepsilon = \varepsilon^* = -1$ ise, (3.238) denklemindeki fonksiyonun tanımlı olabilmesi için $c_0^2(b^2\sinh^2\theta - \cosh^2\theta) > 1$ olmalı ve $M_1(b)$ dönel yüzeyinin profil eğrisi (a–4) şıkkında verilen şekildedir;

iv. $\varepsilon^* = -\varepsilon = 1$ ise, (3.238)denklemindeki fonksiyonun tanımlı olabilmesi için $c_0^2(\cosh^2\theta - b^2\sinh^2\theta) > 1$ koşulu altında, $M_1(b)$ dönel yüzeyinin profil eğrisi (b–4)'deki gibidir.

Teoremin tersinin ispatı için, $\mathbb{E}_2^4$ yarı–Euclid uzayında, $M_1(b)$ dönel yüzeyinin α profil eğrisininin bileşenleri $c \in \mathbb{R}_+$ ve $\Phi(\theta,b,\varepsilon,\varepsilon^*)$, (3.237) ile verilen bir fonksiyon olmak üzere,

$$y(\theta) = ce^{\Phi(\theta,b,\varepsilon,\varepsilon^*)}\cosh\theta \text{ ve } w(\theta) = ce^{\Phi(\theta,b,\varepsilon,\varepsilon^*)}\sinh\theta$$

olsun. Bu durumda, $M_1(b)$ dönel yüzeyi (3.239) ve (3.240) denklemlerini sağlar. Bu denklemler karşılaştırıldığında, $h_{12}^4(\varepsilon h_{22}^3 - \varepsilon^* h_{11}^3) = 0$ olduğu görülür. Dolayısıyla, $h_{12}^4 = 0$ ve $\varepsilon^* h_{11}^3 = \varepsilon h_{22}^3$ olmalıdır. (3.186) denkleminden, $h_{12}^4 = 0$ ise, $\theta'(u) = 0$ olur.

Bu ise, $\theta'(u) \neq 0$ olması ile çelişmektedir. Dolayısıyla, $\varepsilon^* h^3_{11} = \varepsilon h^3_{22}$, yani, $M_1(b)$ yüzeyi yarı–ombilik bir yüzeydir.

Benzer şekilde, $c \in \mathbb{R}_+$ ve $\Omega(\theta, b, \varepsilon, \varepsilon^*)$, (3.238) ile verilen bir fonksiyon olmak üzere,

$$y(\theta) = ce^{\Omega(\theta,b,\varepsilon,\varepsilon^*)} \sinh\theta \quad \text{ve} \quad w(\theta) = ce^{\Omega(\theta,b,\varepsilon,\varepsilon^*)} \cosh\theta$$

için de $M_1(b)$ dönel yüzeyi yarı–ombiliktir. $\square$

Benzer şekilde, yer vektörü (3.190) ile verilen $M_2(b)$ dönel yüzeylerinden yarı–ombilik olanlar sınıflandırılır.

(3.194) denklemi ile verilen ifadeler $\varepsilon^* h^3_{11} = \varepsilon h^3_{22}$ denkleminde yerine yazılırsa aşağıdaki sonuca ulaşılır:

$M_2(b)$ yüzeyinin yarı–ombilik olması için gerek ve yeter koşul, β profil eğrisinin bileşenleri $x(u)$ ve $z(u)$'nun

$$z'(u)x''(u) - x'(u)z''(u) - (x'^2(u) - z'^2(u))\frac{b^2 z(u)x'(u) - x(u)z'(u)}{x^2(u) - b^2 z^2(u)} = 0 \tag{3.247}$$

diferansiyel denklemini sağlamasıdır.

$b = 1$ için (3.247) diferansiyel denklemi aşağıdaki hali alır:

$$z'(u)x''(u) - x'(u)z''(u) - (x'^2(u) - z'^2(u))\frac{z(u)x'(u) - x(u)z'(u)}{x^2(u) - z^2(u)} = 0 \tag{3.248}$$

ve bu diferansiyel denklemin çözümü gerekli

$$z(u) - x(u) = \lambda_0 (z(u) + x(u))^{\mu_0} \tag{3.249}$$

şeklindedir. Burada, λ_0 ve μ_0 sıfırdan farklı sabitler olmak üzere, $(z(u) + x(u))^{\mu_0}$ reel değerli bir fonksiyondur. (3.249) ile verilen çözüm kapalı formdadır. Bu nedenle, β profil eğrisinin bileşenlerinin daha iyi anlaşılabilmesi için, μ_0 sabitinin bazı değerleri için inceleme yapılacaktır.

- $\lambda_0^2 \neq 1$ olmak üzere, $\mu_0 = 1$ ise, (3.249) denklemi $x(u) = \frac{1-\lambda_0}{1+\lambda_0} z(u)$ şeklinde yazılır. Yani, β orjinden geçen bir doğrunun parçasıdır. Bu durumda, $M_2(1)$ dönel yüzeyi $\mathbb{E}^4_2$ yarı–Euclid uzayında uzaysal bir düzlemin açık parçasıdır.

- $\mu_0 = -1$ ise, (3.249) ifadesi $z^2(u) - x^2(u) = \lambda_0$ şekline dönüşür. Bu durum Teorem 3.18'in (b–5) ve (b–6) şıklarında verilen profil eğrisine sahip dönel yüzey ile aynıdır.

Ayrıca, $b = 1$ ise, (3.194) ve (3.195) denklemlerinden, $h^4_{12} = \varepsilon\varepsilon^* h^3_{11}$ dir. Bununla birlikte $\varepsilon^* h^3_{11} = \varepsilon h^3_{22}$ göz önüne alınırsa, (3.199) denkleminden aşağıdaki ifadeye ulaşılır.

Önerme 3.4. *$b = 1$ için, $\mathbb{E}^4_2$ yarı–Euclid uzayında, yer vektörü* (3.190) *ile verilen yüzeyin yarı–ombilik olması için gerek ve yeter koşul, bu yüzeyin düz olmasıdır.*

Yarı–ombilik Vranceanu tipi dönel yüzeyler için

$$\varepsilon^* = \operatorname{sgn}(-\lambda^2 e^{2\mu u}) \text{ ve } \varepsilon = \operatorname{sgn}(\lambda^2(1-\mu^2)e^{2\mu u})$$

olarak bulunur. Her μ sabiti $\varepsilon^* = -1$ iken, $|\mu| < 1$ ise $\varepsilon = 1$ veya $|\mu| > 1$ ise $\varepsilon = -1$ olur. Dolayısıyla, $|\mu| < 1$ için zamansal ve $|\mu| > 1$ için ise, negatif tanımlı metriğe sahip uzaysal bir dönel yüzey olur.

Bundan sonra, genelliği bozmaksızın, $M_2(b)$ dönel yüzeyinin $\beta(u)$ profil eğrisinin yay uzunluğuna göre parametrelendiği varsayılacaktır, yani, $x'^2(u) - z'^2(u) = \varepsilon$ olur.

$\bar{c}_0 \neq 0$ ve $\theta > 0$ olmak üzere,

$$\bar{\Phi}(\theta, b, \varepsilon, \varepsilon^*) = \int_0^\theta \sqrt{\frac{\varepsilon^* \bar{c}_0{}^2(\cosh^2\eta - b^2\sinh^2\eta)}{\varepsilon^* \bar{c}_0{}^2(\cosh^2\eta - b^2\sinh^2\eta) - \varepsilon}}\, d\eta \tag{3.250}$$

ve

$$\bar{\Omega}(\theta, b, \varepsilon, \varepsilon^*) = \int_0^\theta \sqrt{\frac{\varepsilon^* \bar{c}_0{}^2(\sinh^2\eta - b^2\cosh^2\eta)}{\varepsilon^* \bar{c}_0{}^2(\sinh^2\eta - b^2\cosh^2\eta) + \varepsilon}}\, d\eta \tag{3.251}$$

olarak tanımlansın. Bu integrallerdeki integrandlar reel değerli fonksiyonlardır.

Teorem 3.19. *$M_2(b)$, $\mathbb{E}^4_2$ yarı–Euclid uzayında, yer vektörü* (3.190) *ile verilen, düzlemsel olmayan bir dönel yüzey olsun.*

(a) $M_2(b)$ yüzeyinin yarı–ombilik uzaysal bir yüzey olması için gerek ve yeter koşul, yay uzunluğuna göre parametrelenmiş β profil eğrisinin bileşenlerinin aşağıdaki durumlardan biri olmasıdır:

(a–1) $\bar{c} \in \mathbb{R}_+$ ve $\bar{c}_0^2(\cosh^2\theta - b^2\sinh^2\theta) > 1$ koşulunu sağlayan bazı $\bar{c}_0 \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{cases} x(\theta) = \bar{c}e^{\psi(\theta)}\cosh\theta, \quad z(\theta) = \bar{c}e^{\psi(\theta)}\sinh\theta \\ \psi(\theta) = \bar{\Phi}(\theta, b, 1, 1), \quad 0 < b \leq 1. \end{cases}$$

(a–2) $\bar{c} \in \mathbb{R}_+$ için

$$\begin{cases} x(\theta) = \bar{c}e^{\psi(\theta)} \cosh\theta, & z(\theta) = \bar{c}e^{\psi(\theta)} \sinh\theta \\ \psi(\theta) = \bar{\Phi}(\theta, b, -1, -1), & b > 1. \end{cases}$$

Bu durumda, $M_2(b)$ yüzeyi negatif tanımlı metriğe sahip uzaysal bir dönel yüzeydir.

(a–3) $\bar{c} \in \mathbb{R}_+$ için

$$\begin{cases} x(\theta) = \bar{c}e^{\varphi(\theta)} \sinh\theta, & z(\theta) = \bar{c}e^{\varphi(\theta)} \cosh\theta \\ \varphi(\theta) = \bar{\Omega}(\theta, b, 1, 1), & 0 < b < 1. \end{cases}$$

(a–4) $\bar{c} \in \mathbb{R}_+$ ve $\bar{c}_0^2(b^2\cosh^2\theta - \sinh^2\theta) > 1$ koşulunu sağlayan bazı $\bar{c}_0 \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{cases} x(\theta) = \bar{c}e^{\varphi(\theta)} \sinh\theta, & z(\theta) = \bar{c}e^{\varphi(\theta)} \cosh\theta \\ \varphi(\theta) = \bar{\Omega}(\theta, b, -1, -1), & b \geq 1. \end{cases}$$

Bu durumda, $M_2(b)$ yüzeyi negatif tanımlı metriğe sahip uzaysal bir dönel yüzeydir.

(a–5) r_0 sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere,

$$x(\theta) = r_0 \sinh\theta, \ z(\theta) = r_0 \cosh\theta, \ 0 < b < 1.$$

Bu durumda, $M_2(b)$ yüzeyi tamamiyle $\mathbb{H}_1^3(-r_0^{-2}) \subset \mathbb{E}_2^4$ anti de Sitter uzayı içinde kalır.

(a–6) r_0 sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere,

$$x(\theta) = r_0 \cosh\theta, \ z(\theta) = r_0 \sinh\theta, \ b > 1.$$

Bu durumda, $M_2(b)$ yüzeyi negatif tanımlı metriğe sahip tamamiyle $\mathbb{S}_2^3(r_0^{-2}) \subset \mathbb{E}_2^4$ yarı–küresi içinde kalan uzaysal bir dönel yüzeydir.

(b) $M_2(b)$ yüzeyinin yarı–ombilik zamansal bir yüzey olması için gerek ve yeter koşul, yay uzunluğuna göre parametrelenmiş β profil eğrisinin bileşenlerinin aşağıdaki durumlardan biri olmasıdır:

(b–1) $\bar{c} \in \mathbb{R}_+$ ve $\bar{c}_0^2(b^2\sinh^2\theta - \cosh^2\theta) > 1$ koşulunu sağlayan bazı $\bar{c}_0 \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{cases} x(\theta) = \bar{c}e^{\psi(\theta)} \cosh\theta, & z(\theta) = \bar{c}e^{\psi(\theta)} \sinh\theta \\ \psi(\theta) = \bar{\Phi}(\theta, b, 1, -1), & b > 1. \end{cases}$$

(b–2) $\bar{c} \in \mathbb{R}_+$ için

$$\begin{cases} x(\theta) = \bar{c}e^{\psi(\theta)} \cosh\theta, & z(\theta) = \bar{c}e^{\psi(\theta)} \sinh\theta \\ \psi(\theta) = \bar{\Phi}(\theta, b, -1, 1), & 0 < b \leq 1. \end{cases}$$

(b–3) $\bar{c} \in \mathbb{R}_+$ *için*

$$\begin{cases} x(\theta) = \bar{c}e^{\varphi(\theta)} \sinh\theta, & z(\theta) = \bar{c}e^{\varphi(\theta)} \cosh\theta \\ \varphi(\theta) = \bar{\Omega}(\theta, b, 1, -1), & b \geq 1. \end{cases}$$

(b–4) $\bar{c} \in \mathbb{R}_+$ *ve* $\bar{c}_0^2(\sinh^2\theta - b^2\cosh^2\theta) > 1$ *koşulunu sağlayan bazı* $\bar{c}_0 \in \mathbb{R}$ *için*

$$\begin{cases} x(\theta) = \bar{c}e^{\varphi(\theta)} \sinh\theta, & z(\theta) = \bar{c}e^{\varphi(\theta)} \cosh\theta \\ \varphi(\theta) = \bar{\Omega}(\theta, b, -1, 1), & 0 < b < 1. \end{cases}$$

(b–5) r_0 *sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere,*

$$x(\theta) = r_0 \sinh\theta,\ z(\theta) = r_0 \cosh\theta,\ b \geq 1.$$

Bu durumda, $M_2(b)$ *yüzeyi tamamiyle* $\mathbb{H}_1^3(-r_0^{-2}) \subset \mathbb{E}_2^4$ *anti de Sitter uzayının içinde kalır.*

(b–6) r_0 *sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere,*

$$x(\theta) = r_0 \cosh\theta,\ z(\theta) = r_0 \sinh\theta,\ 0 < b \leq 1.$$

Bu durumda, $M_2(b)$ *yüzeyi tamamiyle* $\mathbb{S}_2^3(r_0^{-2}) \subset \mathbb{E}_2^4$ *yarı–küresi içinde kalır.*

3.3.2.1 Noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip yarı–ombilik dönel yüzeyler

Bu bölümde, yer vektörü sırasıyla (3.181) ve (3.190) ile verilen $M_1(b)$ ve $M_2(b)$ yarı–ombilik dönel yüzeylerinden Gauss tasviri noktasal 1–tipinden olanlar sınıflandırılacaktır.

Teorem 3.20. $\mathbb{E}_2^4$ *yarı–Euclid uzayında, yer vektörü* (3.181) *ile verilen, düzlemsel olmayan yarı–ombilik bir dönel yüzeyin Gauss tasviri ikinci çeşit noktasal 1–tipinden olamaz.*

İspat. $M_1(b)$, $\mathbb{E}_2^4$ yarı–Euclid uzayında yer vektörü (3.181) ile verilen düzlemsel olmayan yarı–ombilik bir dönel yüzey olsun. $M_1(b)$ yüzeyinin ν Gauss tasvirinin Laplasiyeni (3.227) denklemi ile verilir. $\varepsilon^* h_{11}^3 = \varepsilon h_{22}^3$ olduğundan, bu ifade

$$\Delta\nu = \|h\|^2\nu + 2\varepsilon h_{11}^3 \omega_{34}(e_1) e_1 \wedge e_3 + 2\varepsilon h_{12}^4 \omega_{34}(e_1) e_2 \wedge e_4 \tag{3.252}$$

şekline dönüşür. (2.45) ve (3.252) denklemleri karşılaştırıldığında

$$f(1+\varepsilon\varepsilon^* C_{34}) = ||h||^2, \tag{3.253}$$

$$fC_{13} = -2\varepsilon^* h^3_{11}\omega_{34}(e_1), \tag{3.254}$$

$$fC_{24} = -2\varepsilon^* h^4_{12}\omega_{34}(e_1), \tag{3.255}$$

$$C_{12} = C_{14} = C_{23} = 0 \tag{3.256}$$

sistemi elde edilir. $M_1(b)$ yüzeyinin ν Gauss tasviri ikinci çeşit noktasal 1–tipinden ise, $C_{13} \neq 0$ veya $C_{24} \neq 0$ olmalıdır. Teorem 3.18'in yeter koşulunun ispatından görüldüğü üzere, $h^4_{12} \neq 0$ dır. $h^3_{11} = 0$ ise, $h^3_{22} = 0$ olur ve yüzey sıfır ortalama eğriliğe sahip olur. Bu nedenle, $h^3_{11} \neq 0$ dır. Dolayısıyla, (3.254) ve (3.255) denklemlerinden

$$h^4_{12}C_{13} - h^3_{11}C_{24} = 0 \tag{3.257}$$

elde edilir. Diğer taraftan, (2.47) denklemi $i = 2$ için yazılırsa

$$h^3_{11}C_{13} - h^4_{12}C_{24} = 0 \tag{3.258}$$

bulunur. (3.257) ve (3.258) denklemlerinin oluşturduğu sistemin sıfırdan farklı çözümü olmaldır, yani, $(h^3_{11})^2 - (h^4_{12})^2 = 0$ dır. (3.185) ve (3.186) denklemleri ile verilen yüzeyin ikinci esas formunun bileşenleri h^3_{11} ve h^4_{12} yerine konulduğunda

$$(b^2-1)(b^2y^2(u)w'^2(u) - w^2(u)y'^2(u)) = 0$$

ifadesine ulaşılır. Ancak $b^2y^2(u)w'^2(u) - w^2(u)y'^2(u) = 0$ ise, Yardımcı Teorem 3.1'den görüldüğü üzere, $M_1(b)$ yüzeyinin ortalama eğrilik vektörü sıfırdır. Dolayısıyla, $b = 1$ olmalıdır. Bu durumda, $M_1(b)$ yüzeyinin ikinci esas formunun katsayıları ve konneksiyon formları arasında

$$h^4_{12} = -\varepsilon\varepsilon^* h^3_{11} \quad \text{ve} \quad \omega_{34}(e_1) = -\varepsilon\varepsilon^*\omega_{12}(e_1)$$

ilişkileri bulunmaktadır. Böylece, (3.257) denkleminden, $C_{13} = -\varepsilon\varepsilon^* C_{24}$ elde edilir. Ayrıca, (2.48) ve (2.51) denklemleri $i = 2$ için yazılırsa, $C_{34} = 0$ olduğu görülür. $i = 1$ için, (2.49) denklemini hesaplanırsa, $\omega_{34}(e_1) = 0$ elde edilir. Bu, ν Gauss tasvirinin ikinci çeşit noktasal 1–tipinden olması ile çelişir. Dolayısıyla, $M_1(b)$ yarı–ombilik dönel yüzeyi ikinci çeşit noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip olamaz. □

Benzer şekilde, yer vektörü (3.190) ile verilen $M_2(b)$ dönel yüzeyi için de aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 3.21. $\mathbb{E}_2^4$ *yarı–Euclid uzayında yer vektörü* (3.190) *ile verilen düzlemsel olmayan yarı–ombilik bir dönel yüzeyin Gauss tasviri ikinci çeşit noktasal 1–tipinden olamaz.*

Ayrıca, Teorem 3.20'nin ispatından görüldüğü üzere, $M_1(b)$ yüzeyi birinci çeşit noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahipse, $\omega_{34}(e_1) = 0$ dır. Dolayısıyla, Teorem 3.18'den, $M_1(b)$ yüzeyinin profil eğrisinin bileşenleri (a–5), (b–5), (a–6) veya (b–6) durumlarından biri olduğu görülür. Bu durum, $M_2(b)$ dönel yüzeyi için de geçerlidir. Böylece, birinci çeşit noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip, yarı–ombilik $M_1(b)$ ve $M_2(b)$ dönel yüzeyleri ile ilgili aşağıdaki sonuçlar verilir.

Sonuç 3.7. $M_1(b)$, $\mathbb{E}_2^4$ *yarı–Euclid uzayının yer vektörü* (3.181) *ile verilen, yay uzunluğuna göre parametrelenmiş* α *profil eğrisine sahip, düzlemsel olmayan yarı–ombilik bir dönel yüzeyi olsun. Bu durumda,* $M_1(b)$ *yüzeyinin birinci çeşit noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip olabilmesi için gerek ve yeter koşul* α *profil eğrisinin bileşenlerinin aşağıdaki durumlardan biri olmasıdır:*

i. r_0 *sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere,*

$$y(\theta) = r_0 \sinh\theta, \;\; w(\theta) = r_0 \cosh\theta, \;\; 0 < b \leq 1.$$

Bu durumda, $M_1(b)$ *yüzeyi tamamiyle* $\mathbb{H}_1^3(-r_0^{-2}) \subset \mathbb{E}_2^4$ *anti de Sitter uzayı içinde kalır.*

ii. r_0 *sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere,*

$$y(\theta) = r_0 \cosh\theta, \;\; w(\theta) = r_0 \sinh\theta, \;\; b \geq 1.$$

Bu durumda, $M_1(b)$ *yüzeyi negatif tanımlı metriğe sahip tamamiyle* $\mathbb{S}_2^3(r_0^{-2}) \subset \mathbb{E}_2^4$ *yarı–küresi içinde kalan uzaysal bir dönel yüzeydir.*

iii. r_0 *sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere,*

$$y(\theta) = r_0 \sinh\theta, \;\; w(\theta) = r_0 \cosh\theta, \;\; b > 1.$$

Bu durumda, $M_1(b)$ *yüzeyi tamamiyle* $\mathbb{H}_1^3(-r_0^{-2}) \subset \mathbb{E}_2^4$ *anti de Sitter uzayının içinde kalır.*

iv. *r_0 sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere,*

$$y(\theta) = r_0 \cosh\theta,\ \ w(\theta) = r_0 \sinh\theta,\ \ 0 < b < 1.$$

Bu durumda, $M_1(b)$ yüzeyi tamamiyle $\mathbb{S}^3_2(r_0^{-2}) \subset \mathbb{E}^4_2$ yarı–küresi içinde kalır.

Sonuç 3.8. *$M_2(b)$, $\mathbb{E}^4_2$ yarı–Euclid uzayının yer vektörü* (3.190) *ile verilen, yay uzunluğuna göre parametrelenmiş β profil eğrisine sahip, düzlemsel olmayan yarı–ombilik bir dönel yüzeyi olsun. Bu durumda, $M_2(b)$ yüzeyinin birinci çeşit noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip olabilmesi için gerek ve yeter koşul β profil eğrisinin bileşenlerinin aşağıdaki durumlardan biri olmasıdır:*

i. *r_0 sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere,*

$$x(\theta) = r_0 \sinh\theta,\ \ z(\theta) = r_0 \cosh\theta,\ \ 0 < b < 1.$$

Bu durumda, $M_2(b)$ yüzeyi tamamiyle $\mathbb{H}^3_1(-r_0^{-2}) \subset \mathbb{E}^4_2$ anti de Sitter uzayı içinde kalır.

ii. *r_0 sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere,*

$$x(\theta) = r_0 \cosh\theta,\ \ z(\theta) = r_0 \sinh\theta,\ \ b > 1.$$

Bu durumda, $M_2(b)$ yüzeyi negatif tanımlı metriğe sahip tamamiyle $\mathbb{S}^3_2(r_0^{-2}) \subset \mathbb{E}^4_2$ yarı–küresi içinde kalan uzaysal bir dönel yüzeydir.

iii. *r_0 sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere,*

$$x(\theta) = r_0 \sinh\theta,\ \ z(\theta) = r_0 \cosh\theta,\ \ b \geq 1.$$

Bu durumda, $M_2(b)$ yüzeyi tamamiyle $\mathbb{H}^3_1(-r_0^{-2}) \subset \mathbb{E}^4_2$ anti de Sitter uzayının içinde kalır.

iv. *r_0 sıfırdan farkllı bir sabit olmak üzere,*

$$x(\theta) = r_0 \cosh\theta,\ \ z(\theta) = r_0 \sinh\theta,\ \ 0 < b \leq 1.$$

Bu durumda, $M_2(b)$ yüzeyi tamamiyle $\mathbb{S}^3_2(r_0^{-2}) \subset \mathbb{E}^4_2$ yarı–küresi içinde kalır.

[12] makalesinde, $\mathbb{E}^4_2$ uzayında, düz Vranceanu tipi dönel yüzeylerden noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip olanlar sınıflandırılmıştır. Elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Teorem 3.22. *[12] $\mathbb{E}_2^4$ yarı–Euclid uzayında, $M_1(1)$ düz dönel yüzeyi global 1–tipinden Gauss tasvirine sahiptir ve $M_1(1)$ yüzeyi, iki düzlem hiperbolünün çarpımıdır.*

Teorem 3.23. *[12] $\mathbb{E}_2^4$ yarı–Euclid uzayında, $M_2(1)$ düz dönel yüzeyi, global 1–tipinden Gauss tasvirine sahiptir ve $M_2(1)$ yüzeyi, bir düzlem çemberi ile bir düzlem hiperbolünün çarpımıdır.*

Yukarıdaki teoremde bahsedilen yüzeyler Sonuç (3.7) ve Sonuç (3.8)'de görülmektedir

4. SONLU TİPTEN YARI–KÜRESEL GAUSS TASVİRİNE SAHİP YARI–KÜRESEL ALT MANİFOLDLAR

4.1 Harmonik Yarı–Küresel Gauss Tasvirine Sahip Yarı–Küresel Alt Manifoldlar

Bu bölümde, yarı–kürenin harmonik yarı–küresel Gauss tasvirine sahip alt manifoldları için karakterizasyon teoremleri verilecektir.

Tanım 4.1. *$\tilde{\nu}$ yarı–küresel Gauss tasviri $\Delta\tilde{\nu} = 0$ sağlıyorsa, $\tilde{\nu}$ tasvirine harmonik yarı–küresel Gauss tasviri denir.*

Önerme 4.1. $\mathbf{x} : (M_t, g) \longrightarrow \mathbb{S}^{m-1}_s \subset \mathbb{E}^m_s$*, indeksi t olan n–boyutlu M_t yarı–Riemann alt manifoldundan $\mathbb{S}^{m-1}_s$ yarı–küresine izometrik bir daldırma olsun.*

i. *$\hat{\nu} : (M_t, g) \longrightarrow G(n+1, m)$ Obata anlamında yarı–küresel Gauss tasvirinin harmonik olması için gerek ve yeter koşul, M_t yarı–Riemann alt manifoldunun $\mathbb{S}^{m-1}_s$ uzayı içinde sıfır ortalama eğrilik vektörüne sahip olmasıdır.*

ii. *$N = \binom{m}{n+1}$ ve q pozitif tamsayısı için, $\tilde{\nu} : (M_t, g) \longrightarrow \mathbb{E}^N_q$ yarı–küresel Gauss tasvirinin harmonik olması için gerek ve yeter koşul, M_t yarı–Riemann alt manifoldunun $\mathbb{S}^{m-1}_s$ uzayı içinde ortalama eğrilik vektörünün sıfır, normal konneksiyonun düz, skaler eğriliği $S = n(n-1)$ olmasıdır.*

İspat. $\mathbf{x} : (M_t, g) \longrightarrow \mathbb{S}^{m-1}_s \subset \mathbb{E}^m_s$, indeksi t olan n–boyutlu M_t yarı–Riemann alt manifoldundan $\mathbb{S}^{m-1}_s$ yarı–küresine izometrik bir daldırma olsun.

i. $e_r \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$ ve $\mathbf{x} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_r \wedge \cdots \wedge e_n$ vektörleri $G(n+1, m)$ Grasmaniyen manifoldunun baz vektörleridir. Bu nedenle, $\hat{\nu}$ tasvirinin harmonik olması $\Delta\tilde{\nu}$'nin $G(n+1, m)$ manifoldunun baz vektörleri doğrultusundaki ifadelerinin sıfır olması demektir. Bu durumda, (2.41) denkleminden, $\hat{\nu}$ tasvirinin harmonik olması için gerek ve yeter koşul, $\hat{H} = 0$, yani, M yarı–Riemann alt manifoldunun $\mathbb{S}^{m-1}_s$ yarı–küresi içinde sıfır ortalama eğrilik vektörüne sahip olmasıdır.

ii. $\tilde{\nu}$ yarı–küresel Gauss tasvirinin harmonik olması için gerek ve yeter koşul, (2.41) denkleminden kolaylıkla görülür.

Açıklama 4.1. (2.19) denkleminden görüldüğü üzere, $\|\hat{h}\|^2$ ifadesi $\hat{h} \neq 0$ olduğu halde sıfır olabilir. Dolayısıyla, bir yarı–Riemann alt manifoldunun harmonik yarı–küresel Gauss tasvirine sahip olması, o alt manifoldun tümden jeodezik olmasını gerektirmez.

Teorem 4.1. *$\mathbf{x} : (M,g) \longrightarrow \mathbb{S}_s^{m-1} \subset \mathbb{E}_s^m$, tümden jeodezik olmayan, uzaysal M yüzeyinden $\mathbb{S}_s^{m-1}$ yarı–küresine izometrik bir daldırma olsun. M yüzeyinin yarı–küresel Gauss tasvirinin harmonik olması için gerek ve yeter koşul,* $\mathbf{x}$ *izometrik daldırmasının aşağıdaki denklem sisteminin çözümü ve $g = \mu^2(du^2 + dv^2)$ olacak şekilde, M yüzeyi üzerinde, $\{u,v\}$ yerel izotermal koordinat takımının var olmasıdır.*

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{uu} &= \frac{\mu_u}{\mu}\mathbf{x}_u - \frac{\mu_v}{\mu}\mathbf{x}_v - \mu^2\mathbf{x} + \tilde{c}, \\
\mathbf{x}_{uv} &= \frac{\mu_v}{\mu}\mathbf{x}_u + \frac{\mu_u}{\mu}\mathbf{x}_v, \\
\mathbf{x}_{vv} &= -\frac{\mu_u}{\mu}\mathbf{x}_u + \frac{\mu_v}{\mu}\mathbf{x}_v - \mu^2\mathbf{x} - \tilde{c}.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Burada, μ fonksiyonu $(\ln\mu)_{uu} + (\ln\mu)_{vv} = -\mu^2$ diferansiyel denkleminin bir çözümüdür ve $\tilde{c}$, $\mathbb{E}_s^m$ yarı–Euclid uzayında ışıksal sabit bir vektördür.

İspat. $\mathbf{x} : M \longrightarrow \mathbb{S}_s^{m-1}$, tümden jeodezik olmayan, uzaysal M yüzeyinden $\mathbb{S}_s^{m-1}$ uzayına izometrik bir daldırma olsun. M yüzeyi harmonik $\tilde{\nu}$ yarı–küresel Gauss tasvirine sahip ise, Önerme 4.1'den, bu yüzeyin $\mathbb{S}_s^{m-1}$ uzayında içindeki ortalama eğrilik vektörü sıfır, normal konneksiyonu düz ve $K = 1$ olur. Normal konneksiyonu düz ise, (2.14) denkleminden herhangi bir ξ ve η normal vektörleri için, $[A_\xi, A_\eta] = 0$ olur. M yüzeyi pozitif tanımlı bir metriğe sahip olduğundan, bu durumda, A_ξ, A_η matrisleri aynı anda köşegenleştirilebilir. Dolayısıyla, $\mathbb{E}_s^m$ uzayında, M yüzeyi üzerinde, e_1, e_2 vektörleri M'ye teğet, $e_3, \ldots, e_m$ vektörleri M'ye normal ve $h(e_1,e_2) = 0$ olacak şekilde, $\{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_{m-1}, e_m = \mathbf{x}\}$ ortonormal çatı alanı seçilebilir. $\hat{H} = 0$ olduğundan, $\hat{h}(e_1,e_1) = -\hat{h}(e_2,e_2)$ şeklindedir. $\xi = \hat{h}(e_1,e_1)$ olarak isimlendirilirse, (2.9) Gauss denkleminden M yüzeyinin K Gauss eğriliği

$$K = 1 - \langle \xi, \xi \rangle \tag{4.2}$$

olarak hesaplanır. Diğer taraftan, $K = 1$ olduğundan, $\langle \xi, \xi \rangle = 0$, yani, ξ ışıksal bir vektördür.

M yüzeyine ait Levi–Civita konneksiyonları

$$\nabla_{e_1} e_1 = \alpha e_2, \qquad \nabla_{e_1} e_2 = -\alpha e_1, \qquad \nabla_{e_2} e_1 = -\beta e_2, \qquad \nabla_{e_2} e_2 = \beta e_1$$

şeklinde verilir. Burada, $\alpha = \omega_{12}(e_1)$ ve $\beta = -\omega_{12}(e_2)$ dir. Diğer taraftan, yukarıda verilen M yüzeyine ait konneksiyon formları kullanılarak

$$[e_1, e_2] = \nabla_{e_1} e_2 - \nabla_{e_2} e_1 = -\alpha e_1 + \beta e_2$$

ve

$$\begin{aligned} R(e_1, e_2)e_2 &= \nabla_{e_1} \nabla_{e_2} e_2 - \nabla_{e_2} \nabla_{e_1} e_2 - \nabla_{[e_1,e_2]} e_2 \\ &= \nabla_{e_1}(\beta e_1) + \nabla_{e_2}(\alpha e_1) - (\alpha^2 + \beta^2) e_1 \\ &= (e_1(\beta) + e_2(\alpha) - (\alpha^2 + \beta^2)) e_1 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. $R(e_1, e_2; e_2, e_1) = e_1(\beta) + e_2(\alpha) - (\alpha^2 + \beta^2)$ şeklindedir. M yüzeyinin Gauss eğriliği $K = 1$ olduğundan

$$e_1(\beta) + e_2(\alpha) - \alpha^2 - \beta^2 = 1 \tag{4.3}$$

olur. Ayrıca, (2.13) Codazzi denklemi $X = Z = e_1, Y = e_2$ ve $X = e_1, Y = Z = e_2$ vektör alanları için hesaplanırsa, sırasıyla,

$$D_{e_1} \xi = 2\beta \xi, \qquad D_{e_2} \xi = 2\alpha \xi \tag{4.4}$$

ifadeleri elde edilir. R^D normal eğrilik tensörü

$$\begin{aligned} R^D(e_1, e_2)\xi &= D_{e_1} D_{e_2} \xi - D_{e_2} D_{e_1} \xi - D_{[e_1,e_2]} \xi \\ &= 2D_{e_1}(\alpha \xi) - 2D_{e_2}(\beta \xi) \\ &= 2(e_1(\alpha) - e_2(\beta))\xi \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. M uzaysal yüzeyinin normal konneksiyonu düz olduğundan, yani, $R^D \equiv 0$, yukarıdaki denklemden, $e_1(\alpha) = e_2(\beta)$ olarak bulunur.

Şimdi, M uzaysal yüzeyi üzerinde

$$e_1(\ln \mu) = -\beta, \qquad e_2(\ln \mu) = -\alpha \tag{4.5}$$

denklem sistemini sağlayan, düzgün bir μ fonksiyonu göz önüne alınsın. Böyle bir düzgün μ fonksiyonunun varlığı aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

$$[e_1, e_2](\ln \mu) = e_1 e_2(\ln \mu) - e_2 e_1(\ln \mu) = -e_1(\alpha) + e_2(\beta)$$

olur. $e_1(\alpha) = e_2(\beta)$ olduğundan, $[e_1, e_2](\ln\mu) = 0$ dır. Diğer taraftan, M yüzeyine ait Levi–Civita konneksiyonları kullanılarak

$$(\nabla_{e_1} e_2 - \nabla_{e_2} e_1)(\ln\mu) = -\alpha e_1(\ln\mu) + \beta e_2(\ln\mu) = 0$$

hesaplanır. Dolayısıyla, $[e_1, e_2](\ln\mu) = 0 = (\nabla_{e_1} e_2 - \nabla_{e_2} e_1)(\ln\mu)$ dir. Yani, (4.5) denklem sistemini sağlayan M uzaysal yüzeyi üzerinde bir μ düzgün fonksiyonu vardır. Ayrıca, $[\mu e_1, \mu e_2] = 0$ dır. Bu nedenle, M üzerinde, $\partial_u = \mu e_1$ ve $\partial_v = \mu e_2$ olacak şekilde $\{u, v\}$ yerel koordinat sistemi seçilebilir ve M yüzeyine ait metrik tensörü $g = \mu^2(du^2 + dv^2)$ şeklindedir. Burada, ∂_u, ∂_v ile, sırasıyla, $\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}$ gösterilmiştir. Bu durumda, (4.5) denklemi (4.3) ifadesinde kullandığında

$$(\ln\mu)_{uu} + (\ln\mu)_{vv} = -\mu^2$$

elde edilir. Weingarten formülünden, ξ normal vektörünün u ve v'ye türevleri

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{\partial_u}\xi = \xi_u = -A_\xi(\partial_u) + D_{\partial_u}\xi - \langle \partial_u, \xi \rangle \mathbf{x} \\
\widetilde{\nabla}_{\partial_v}\xi = \xi_v = -A_\xi(\partial_v) + D_{\partial_v}\xi - \langle \partial_v, \xi \rangle \mathbf{x}
\end{aligned}$$

olarak yazılır. Diğer taraftan, $\langle \partial_u, \xi \rangle = \langle \partial_v, \xi \rangle = 0$ dır. (2.8) denkleminden ise, $A_\xi(e_1) = A_\xi(e_2) = 0$, yani, $A_\xi(\partial_u) = A_\xi(\partial_v) = 0$ olarak bulunur. Bu durumda,

$$\xi_u = 2\beta\mu\xi \qquad \text{ve} \qquad \xi_v = 2\alpha\mu\xi \tag{4.6}$$

şeklinde olur. (4.5) ifadesi (4.6) denkleminde kullanılırsa, $\xi = \frac{\tilde{c}}{\mu^2}$ olarak bulunur. ξ ışıksal bir vektör olduğundan, sabit $\tilde{c}$ vektörü de ışıksaldır. $\{u, v\}$ koordinat takımına göre, M yüzeyine ait Levi–Civita konneksiyonu ve ikinci esas formu

$$\begin{aligned}
&\nabla_{\partial_u}\partial_u = \frac{1}{\mu}(\mu_u\partial_u - \mu_v\partial_v), && \nabla_{\partial_v}\partial_u = \frac{1}{\mu}(\mu_v\partial_u + \mu_u\partial_v), \\
&\nabla_{\partial_v}\partial_v = \frac{1}{\mu}(\mu_v\partial_v - \mu_u\partial_u), && \hat{h}(\partial_u, \partial_u) = -\hat{h}(\partial_v, \partial_v) = \tilde{c},\ \hat{h}(\partial_u, \partial_v) = 0
\end{aligned} \tag{4.7}$$

olarak yazılır. Bu ifadeler göz önünde bulundurularak, Gauss formülünden, $\mathbf{x}$ izometrik daldırmasının (4.1) denklem sisteminin bir çözümü olması gerektiği görülür.

Tersine, $\mathbf{x}$ izometrik daldırması (4.1) ile verilen denklem sistemini sağlayan ve M yüzeyi $g = \mu^2(du^2 + dv^2)$ metriğine sahip $\mathbb{S}^{m-1}_s$ yarı–küresinin tümden jeodezik olmayan, uzaysal bir yüzeyi olsun. Bu durumda, M yüzeyine teğet ∂_u, ∂_v vektörleri için, $\langle \partial_u, \partial_u \rangle = \langle \partial_v, \partial_v \rangle = \mu^2$, $\langle \partial_u, \partial_v \rangle = 0$ olur. Dolayısıyla, M yüzeyi üzerinde,

$e_1 = \frac{1}{\mu}\partial_u$, $e_2 = \frac{1}{\mu}\partial_v$ olacak şekilde, bir e_1, e_2 teğet ortonormal çatı alanı seçilebilir. Diğer taraftan, (4.1) denklemindeki ifadeler ile Gauss formülü karşılaştırıldığında

$$h(\partial_u, \partial_u) = -\mu^2\mathbf{x} + \tilde{c},\ \ h(\partial_u, \partial_v) = 0,\ \ h(\partial_v, \partial_v) = -\mu^2\mathbf{x} - \tilde{c},$$

veya

$$h(e_1, e_1) = -\mathbf{x} + \frac{\tilde{c}}{\mu^2},\ \ h(e_1, e_2) = 0,\ \ h(e_2, e_2) = -\mathbf{x} - \frac{\tilde{c}}{\mu^2}$$

elde edilir. Bu durumda, $\hat{H} = 0$ olur. Ayrıca, $\|\hat{h}\| = 0$ ve $R^D \equiv 0$ olur. Dolayısıyla, (2.41) denkleminden, $\Delta\tilde{v} = 0$ dır. Yani, uzaysal M yüzeyi harmonik yarı–küresel Gauss tasvirine sahiptir. □

Açıklama 4.2. Teorem 4.1'de μ fonksiyonun sağladığı $(\ln\mu)_{uu} + (\ln\mu)_{vv} = -\mu^2$ diferansiyel denklemi $\Delta(\ln\mu) = -1$ veya $\Delta_0(\ln\mu) = -\mu^2$ şeklinde yazılabilir. Burada, Δ ve Δ_0, sırasıyla, M yüzeyinin üzerinde g metriğine ve standart Euclid metriğine göre olan Laplasiyen operatörünü ifade etmektedir. Bu diferansiyel denklem *Liouville denklemi* olarak adlandırılır ve Gauss eğriliği 1 olan yüzeyin konformal katsayısını gösterir.

Teorem 4.2. *$\mathbb{S}^{m-1}_s$ yarı–küresinin tümden jeodezik olmayan M_1 Lorentziyen yüzeyinin harmonik yarı–küresel Gauss tasvirine sahip olabilmesi için gerek yeter koşul $\mathbf{x} : M_1 \longrightarrow \mathbb{S}^{m-1}_s \subset \mathbb{E}^m_s$ yer vektörünün*

$$\mathbf{x}(u, v) = \frac{z(u)}{u+v} - \frac{z'(u)}{2}, \tag{4.8}$$

ile verilmesidir. Burada, z, $\mathscr{LC}$ ışık konisi içinde kalan, hızı 2, $\langle z'', z''\rangle = 0$, $z''' \neq 0$ şartlarını sağlayan uzaysal bir eğridir.

İspat. M_1, $\mathbb{S}^{m-1}_s$ yarı–küresinin tümden jeodezik olmayan, harmonik yarı–küresel Gauss tasvirine sahip Lorentziyen bir yüzeyi olsun. Bu durumda, Önerme 4.1'den M_1 yüzeyi $\mathbb{S}^{m-1}_s$ yarı–küresi içinde sıfır ortalama eğrilik vektörüne ve düz normal konneksiyona sahip olduğu söylenir. Ayrıca, M_1 yüzeyinin skaler eğriliği 2, yani, Gauss eğriliği 1 dir. [40] numaralı çalışmadaki Teorem 5.1 ise ortalama eğrilik vektörü sıfır ve Gauss eğriliği 1 olan yarı–kürenin Lorentziyen yüzeyleri sınıflandırılmıştır. Bu sınıflandırma teoreminde verilen yüzey ailelerinden tümden jeodezik olmayan, düz normal konneksiyona sahip yegane yüzey yer vektörü (4.8) denklemi ile verilen yüzey ailesidir. Böylelikle istenilen sonuca ulaşılır. □

Teorem 4.2'de bahsedilen Lorentziyen yüzey ailesi ilgili aşağıdaki örnek verilir:

Örnek 4.1. $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayında

$$z(u) = (\cos(\sqrt{2}u), \sin(\sqrt{2}u), \sinh(\sqrt{2}u), \cosh(\sqrt{2}u))$$

uzaysal eğrisi göz önüne alınsın. $\langle z, z \rangle = \langle z'', z'' \rangle = 0$ ve $\langle z', z' \rangle = 4$ olur. Dolayısıyla, Teorem 4.2'den z eğrisi yukarıda bahsedilen uzaysal eğri olmak üzere, $\mathbb{S}_1^3$ yarı–küresinin yer vektörü $\mathbf{x}(u,v) = \frac{z(u)}{u+v} - \frac{z'(u)}{2}$ şeklinde verilen M_1 Lorentziyen yüzeyinin yarı–küresel Gauss tasviri harmoniktir.

Ayrıca, Önerme 4.1'in ii. şıkkından aşağıdaki sonuç verilir:

Sonuç 4.1. *$\mathbb{S}_2^4$ yarı–küresi içindeki uzaysal bir yüzeyin harmonik yarı–küresel Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul, bu yüzeyin $\mathbb{S}_2^4$ yarı–küresinin tümden jeodezik bir yüzeyi olmasıdır.*

4.2 1–Tipinden Yarı–Küresel Tasvirine Sahip Yarı–Küresel Alt Manifoldlar

Bu bölümde, $\mathbb{S}_s^{m-1} \subset \mathbb{E}_s^m$ yarı–küresinin yarı–Riemann alt manifoldlarından 1–tipinden yarı–küresel Gauss tasvirine sahip olanların karakterizasyonu ve sınıflandırması yapılacaktır.

4.2.1 Spektral açılımda sabit terimi sıfır olanlar

Teorem 4.3. *$\mathbb{S}_s^{m-1}$ yarı–küresinin bir yarı–Riemann alt manifoldunun 1–tipinden yarı–küresel Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul, bu yarı–Riemann alt manifoldunun skaler eğriliklİğinin sabit, normal konneksiyonunun düz ve $\mathbb{S}_s^{m-1}$ yarı–küresi içindeki ortalama eğrilik vektörünün sıfır olmasıdır.*

İspat. M, $\mathbb{S}_s^{m-1}$ yarı–küresinin bir yarı–Riemann alt manifoldu olsun. M alt manifoldu 1–tipinden yarı–küresel Gauss tasvirine sahip ise, λ_p sabit olmak üzere, $\tilde{\nu}$ tasviri $\Delta\tilde{\nu} = \lambda_p \tilde{\nu}$ denklemini sağlar. Bu ifade ile (2.41) denklemi karşılaştırıldığında M alt manifoldunun 1–tipinden yarı–küresel Gauss tasvirine sahip olabilmesi için gerek ve yeter koşul, $\|\hat{h}\|^2$ sabit ve $\hat{H} = R^r_{sjk} = 0$ sonucuna ulaşılır. (2.23) denkleminden, M'nin skaler eğriliği sabittir. Dolayısıyla, istenilen sonuca ulaşılır. □

Şimdi $\mathbb{S}_s^{m-1}$ yarı–küresinin uzaysal veya Lorentziyen yüzeylerinden 1–tipinden yarı–küresel Gauss tasvirine sahip olanlar sınıflandırılacaktır. Bunun için, öncellikle, aşağıdaki yüzeylerden bahsedilecektir.

Örnek 4.2. $\mathbb{S}^3$ küresi içindeki $\mathbb{S}^1(2)\times\mathbb{S}^1(2)$'in standart daldırmasına *Clifford tor yüzeyi* denir.

$\mathbb{S}_1^4$ de Sitter uzayı içinde yer vektörü

$$M: r(u,v)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos u,\sin u,\cos v,\sin v,0) \tag{4.9}$$

ile verilen M uzaysal yüzeyi göz önüne alınsın. $\mathbb{E}_1^5$ yarı–Euclid uzayında e_1,e_2 vektörleri M'ye teğet, e_3,e_4,e_5 vektörleri M'ye normal olmak üzere, M yüzeyi üzerinde $e_1,e_2,\ldots,e_5$ yerel ortonormal çatı alanı aşağıdaki şekilde seçilebilir:

$$\begin{aligned}
&e_1=\sqrt{2}\frac{\partial}{\partial u},\quad e_2=\sqrt{2}\frac{\partial}{\partial v},\\
&e_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos u,-\sin u,\cos v,\sin v,0),\\
&e_4=(0,0,0,0,1),\quad e_5=\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Burada, $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=-\varepsilon_4=\varepsilon_5=1$ olur. Doğrudan hesaplama ile M yüzeyine ait ikinci esas formun katsayıları ve konneksiyon formları

$$\begin{aligned}
&h_{11}^3=-h_{22}^3=1,\ h_{11}^5=h_{22}^5=1,\ h_{12}^3=h_{11}^4=h_{22}^4=h_{12}^4=h_{12}^5=0,\\
&\omega_{12}=\omega_{34}=\omega_{35}=\omega_{45}=0
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Ayrıca, M yüzeyinin $\mathbb{S}_1^4$ yarı–küresi içindeki ortalama eğrilik vektörü, Gauss ve normal eğrilikleri sıfırdır. (2.41) denkleminden $\Delta\tilde{\nu}=2\tilde{\nu}$ elde edilir. Yani, M yüzeyinin $\tilde{\nu}$ tasviri 1–tipindendir.

Örnek 4.3. [41] $\mathbb{S}_1^3$ de Sitter uzayı içindeki $\mathbb{S}^1(2)\times\mathbb{S}_1^1(2)$ bu standart daldırmaya *yarı–Riemann Clifford tor yüzeyi* denir.

$\mathbb{S}_1^4$ de Sitter uzayı içinde yer vektörü

$$M_1: r_1(u,v)=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,cosu,\sin u,\cosh v,\sinh v) \tag{4.10}$$

ile verilen M_1 zamansal yüzeyi göz önüne alınsın. $\mathbb{E}_1^5$ yarı–Euclid uzayında e_1,e_2 vektörleri M'ye teğet, e_3,e_4,e_5 vektörleri M'ye normal olmak üzere, M yüzeyi üzerinde $e_1, e_2, \ldots, e_5$ yerel ortonormal çatı alanı aşağıdaki şekilde seçilebilir:

$$\begin{aligned}
&e_1 = \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial u}, \quad e_2 = \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial v}, \\
&e_3 = (1,0,0,0,0), \\
&e_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -\cos u, -\sin u, \cosh v, \sinh v, 0), \quad e_5 = \mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Burada, $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 1$ olur. Doğrudan hesaplama ile M_1 yüzeyine ait ikinci esas formun katsayıları ve konneksiyon formları

$$\begin{aligned}
&h_{11}^4 = h_{22}^4 = 1, \; h_{22}^5 = -h_{11}^5 = 1, \; h_{12}^3 = h_{11}^3 = h_{22}^3 = h_{12}^4 = h_{12}^5 = 0, \\
&\omega_{12} = \omega_{34} = \omega_{35} = \omega_{45} = 0
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Ayrıca, M_1 yüzeyinin $\mathbb{S}_1^4$ yarı–küresi içindeki ortalama eğrilik vektörü, Gauss ve normal eğrilikleri sıfırdır. (2.41) denkleminden $\Delta\tilde{v} = 2\tilde{v}$ elde edilir. Yani, M_1 yüzeyinin $\tilde{v}$ tasviri 1–tipindendir.

Örnek 4.4. [42] $\mathbb{S}_2^4$ yarı–küresi içindeki parametrizasyonu aşağıdaki şekilde verilen bir Lorentziyen yüzey göz önüne alınsın:

$$M_1 : \mathbf{x}(u,v) = (0, \cosh u \cos v, \cosh u \sin v, \sinh u \cos v, \sinh u \sin v) \tag{4.11}$$

$\mathbb{E}_2^4$ yarı–Euclid uzayında e_1, e_2 vektörleri M_1'e teğet, e_3, e_4 vektörleri M_1'e normal olmak üzere, M_1 yüzeyi üzerinde $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ortonormal çatı alanı

$$\begin{aligned}
&e_1 = \frac{\partial}{\partial u}, \; e_2 = \frac{\partial}{\partial v}, \\
&e_3 = (1,0,0,0,0), \\
&e_4 = (0, -\sin u \sinh v, \cos u \sinh v, -\sin u \cosh v, \cos u \cosh v), \; e_5 = \mathbf{x}
\end{aligned}$$

şeklinde seçilebilir. Burada, $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 1$ olarak hesaplanır. Doğrudan hesaplama ile M_1 yüzeyine ait ikinci esas formun katsayıları ve konneksiyon formları

$$\begin{aligned}
&h_{12}^4 = -1, \; h_{11}^5 = -h_{22}^5 = -1, \; h_{11}^3 = h_{12}^3 = h_{11}^4 = h_{22}^4 = h_{12}^5 = 0, \\
&\omega_{12} = \omega_{34} = \omega_{35} = \omega_{45} = 0
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Ayrıca, M_1 yüzeyinin $\mathbb{S}_2^4$ yarı–küresi içindeki ortalama eğrilik vektörü, Gauss ve normal eğrilikleri sıfırdır. (2.41) denkleminden $\Delta\tilde{v} = 2\tilde{v}$ elde edilir. Yani, M_1 yüzeyinin $\tilde{v}$ tasviri 1–tipindendir.

Teorem 4.4. *$\mathbb{S}_s^{m-1}$ yarı–küresinin uzaysal yüzeyinin 1–tipinden yarı–küresel Gauss tasvirine sahip olabilmesi için gerek ve yeter koşul, bu yüzeyin tamamiyle tümden jeodezik $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{S}_s^{m-1}$ küresinin içinde kalan Clifford tor yüzeyinin açık bir parçası olmasıdır.*

İspat. $\mathbf{x} : M \longrightarrow \mathbb{S}_s^{m-1}$, uzaysal M yüzeyinden $\mathbb{S}_s^{m-1}$ yarı–küresine izometrik bir daldırma olsun. M yüzeyi 1–tipinden yarı–küresel Gauss tasvirine sahipse Teorem 4.3'den bu yüzeyin sabit skaler eğriliğe, düz normal konneksiyona ve $\mathbb{S}_s^{m-1}$ uzayında sıfır ortalama eğriliğe sahip olduğu söylenir. M yüzeyi düz normal konneksiyona sahipse, R^D özdeş olarak sıfırdır. Dolayısıyla, (2.14) denkleminden herhangi bir ξ ve η normal vektörleri için $[A_\xi, A_\eta] = 0$ olur. M yüzeyi pozitif tanımlı metriğe sahip olduğundan, $[A_\xi, A_\eta] = 0$ olması A_ξ, A_η matrislerinin aynı anda köşegenleştirilebileceğini gösterir. Dolayısıyla, $\mathbb{E}_s^m$ yarı–Euclid uzayında, M yüzeyi üzerinde, e_1, e_2 vektörleri M'ye teğet, $e_3, \ldots, e_m$ vektörleri M'ye normal ve $h(e_1, e_2) = 0$ olacak şekilde bir $\{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_{m-1}, e_m = \mathbf{x}\}$ ortonormal çatı alanı seçilebilir. Ayrıca, $\hat{H} = 0$ olduğundan $\hat{h}(e_1, e_1) = -\hat{h}(e_2, e_2)$ şeklindedir. $\xi = \hat{h}(e_1, e_1)$ olarak isimlendirildiğinde, M yüzeyinin K Gauss eğriliği (4.2) ile verilir. K sabit olduğundan $\langle \xi, \xi \rangle$ sabittir. ξ vektörünün karakterine göre aşağıdaki durumlar oluşur:

1. Durum: ξ sıfırdan farklı uzaysal bir vektör ise, $\xi = \lambda \overline{\xi}$ olacak şekilde bir $\overline{\xi}$ uzaysal birim vektörü seçilebilir. Dolayısıyla, birinci normal uzayı $\mathrm{Im}\, h = \mathrm{Span}\{\overline{\xi}\}$ ve $K = 1 - \lambda^2$ olur. (2.13) Codazzi denklemi $X = e_1$, $Y = Z = e_2$ ve $X = Z = e_1$, $Y = e_2$ vektörleri için hesaplanırsa, sırasıyla,

$$D_{e_1} \overline{\xi} = -2\omega_{12}(e_2) \overline{\xi} \quad \text{ve} \quad D_{e_2} \overline{\xi} = 2\omega_{12}(e_1) \overline{\xi}$$

elde edilir. Diğer taraftan, $\langle \overline{\xi}, \overline{\xi} \rangle = 1$ olduğundan $i = 1, 2$ için $\langle D_{e_i} \overline{\xi}, \overline{\xi} \rangle = 0$ dır. Dolayısıyla, $\omega_{12} = 0$, yani, $K = 0$ dır. Bu durumda, birinci normal uzayı $\mathrm{Im}\, h$ normal demette paralel olur. Erbacher–Magid İndirgeme Teoreminden M uzaysal yüzeyinin tamamiyle tümden jeodezik $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{S}_s^{m-1}$ küresinin içinde kaldığı söylenir. [43] numaralı çalışmada, $\mathbb{S}^3$ küresi içinde tümden jeodezik olmayan, sabit Gauss ve sıfır ortalama eğrilikli tek yüzey Clifford tor yüzeyi olduğu gösterilmiştir.

2. Durum: ξ zamansal vektör ise, $\xi = \lambda \overline{\xi}$ olacak şekilde bir $\overline{\xi}$ zamansal birim vektörü seçilebilir ve (4.2) denkleminden $K = 1 + \lambda^2 \neq 0$ olur. Diğer taraftan, 1. durumdakine benzer şekilde $K = 0$ olduğu gösterilir. Bu ise, bir çelişkidir. Dolayısıyla, ξ vektörü zamansal bir vektör olamaz.

3. Durum: $\xi = 0$ veya ξ ışıksal bir vektör ise, (4.2) denkleminden $K = 1$ elde edilir. Yani, $S = 2$ dir. Bu durumda, Önerme 4.1'den M yüzeyinin $\tilde{\nu}$ yarı–küresel Gauss tasviri harmoniktir. Bu durum teoremin varsayımı ile çeliştiğinden, ξ ışıksal olmayan ve sıfırdan farklı bir vektördür.

Dolayısıyla, 1. durumdan M yüzeyi Clifford tor yüzeyinin açık bir parçasıdır.

Yeter koşulun ispatı, Örnek 4.2'den görülür. □

$\mathbb{S}_s^{m-1}$ yarı–küresi içinde, 1–tipinden yarı–küresel Gauss tasvirine sahip Lorentziyen yüzeylerin sınıflandırması için öncelikle, $\mathbb{S}_1^3$ ve $\mathbb{S}_2^3$ yarı–küreleri içindeki sıfır ortalama eğrilikli, düz Lorentziyen yüzeylerin sınıflandırmasına ihtiyaç vardır. Bunun için aşağıdaki yardımcı teorem verilecektir.

Yardımcı Teorem 4.1. $\mathbb{S}_s^3$, $s = 1, 2$, *yarı–küresi içinde ortalama eğrilik vektörü sıfır ve düz Lorentziyen bir yüzey aşağıdaki yüzeylerinden birinin açık bir parçasına kongruenttir:*

i. $\mathbb{S}_1^3$ *de Sitter uzayı içinde kalan* $\mathbf{x}(u,v) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos u, \sin u, \cosh v, \sinh v)$ *ile verilen yüzey;*

ii. $\mathbb{S}_2^3$ *yarı–küresi içinde kalan* $\mathbf{x}(u,v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, \sinh u \cos v, \sinh u \sin v)$ *ile verilen yüzey.*

İspat. [41] numaralı çalışmada, $\mathbb{S}_1^3$ de Sitter uzayı içinde sıfır ortalama eğrilikli ve düz yüzeyin yarı–Riemann Clifford tor yüzeyinin açık bir parçasına kongruent olduğu ispatlanmıştır.

Şimdi ise $\mathbb{S}_2^3$ yarı–küresi içinde sıfır ortalama eğrilikli ve düz olan yüzeyler incelenecektir. $\mathbf{x} : M_1 \longrightarrow \mathbb{S}_2^3$, sıfır ortalama eğrilik vektörüne sahip, düz Lorentziyen M_1 yüzeyinden $\mathbb{S}_2^3$ yarı–küresine bir izometrik daldırma olsun. M_1 yüzeyi üzerinde

$$\langle \partial_u, \partial_u \rangle = \langle \partial_v, \partial_v \rangle = 0, \quad \langle \partial_u, \partial_v \rangle = -1$$

sağlayacak şekilde bir $\{u, v\}$ yarı–ortonormal koordinat takımı seçilebilir. Bu koordinat takımına göre, $\hat{H} = -\hat{h}(\partial_u, \partial_v)$ şeklindedir. Dolayısıyla, $\hat{h}(\partial_u, \partial_v) = 0$ dır.

Burada, $\partial_u = \frac{\partial}{\partial u}$ ve $\partial_v = \frac{\partial}{\partial v}$ göstermektedir. $K=0$ olduğundan, (2.12) denkleminden $\langle \hat{h}(\partial_u,\partial_u), \hat{h}(\partial_v,\partial_v)\rangle = 1$ olarak bulunur. Dolayısıyla,

$$\hat{h}(\partial_u,\partial_u) = a\xi \ \text{ ve } \ \hat{h}(\partial_v,\partial_v) = -\frac{1}{a}\xi$$

olacak şekilde M_1 Lorentziyen yüzeyine normal bir ξ zamansal birim vektörü ile sıfırdan farklı bir a fonksiyonu seçilebilir. Genelliği bozmaksızın, $a>0$ varsayılabilir. (2.13) Codazzi denklemi $X=\partial_u$, $Y=Z=\partial_v$ ve $X=\partial_v$, $Y=Z=\partial_u$ vektör alanları için hesaplanırsa, $a_u = a_v = 0$ bulunur. Dolayısıyla, a sıfırdan farklı pozitif bir sabittir.

Gauss ve Weingarten formüllerinden, sırasıyla, aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\mathbf{x}_{uu} = a\xi, \ \ \mathbf{x}_{uv} = \mathbf{x}, \ \ \mathbf{x}_{vv} = -\frac{1}{a}\xi \tag{4.12}$$

$$\xi_u = -a\mathbf{x}_v, \qquad \xi_v = \frac{1}{a}\mathbf{x}_u \tag{4.13}$$

$\alpha = \sqrt{\frac{a}{2}}$ ve $c_1,c_2,c_3,c_4 \in \mathbb{E}^4_2$ sabit vektörler olmak üzere, (4.12) denklem sisteminin çözümü

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(u,v) = e^{\alpha u+\frac{v}{2\alpha}}&\left(\cos\left(\alpha u-\frac{v}{2\alpha}\right)c_1+\sin\left(\alpha u-\frac{v}{2\alpha}\right)c_2\right)\\ &+e^{-\left(\alpha u+\frac{v}{2\alpha}\right)}\left(\cos\left(\alpha u-\frac{v}{2\alpha}\right)c_3+\sin\left(\alpha u-\frac{v}{2\alpha}\right)c_4\right)\end{aligned}$$

şeklindedir. $\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle = -\langle \mathbf{x}_u,\mathbf{x}_v\rangle = 1$ ve $\langle \mathbf{x}_u,\mathbf{x}_u\rangle = \langle \mathbf{x}_v,\mathbf{x}_v\rangle = 0$ olduğundan c_1,c_2,c_3,c_4 vektörleri aşağıdaki şartları sağlar:

$$\begin{aligned}&\langle c_1,c_1\rangle = \langle c_2,c_2\rangle = \langle c_3,c_3\rangle = \langle c_4,c_4\rangle = 0,\\ &\langle c_1,c_2\rangle = \langle c_1,c_4\rangle = \langle c_2,c_3\rangle = \langle c_3,c_4\rangle = 0,\\ &\langle c_1,c_3\rangle = \langle c_2,c_4\rangle = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Bu durumda, genelliği bozmaksızın c_1,c_2,c_3,c_4 sabit vektörleri

$$c_1 = \frac{1}{2}(1,0,1,0), \quad c_2 = \frac{1}{2}(0,1,0,1), \quad c_3 = \frac{1}{2}(1,0,-1,0), \quad c_4 = \frac{1}{2}(0,1,0,-1)$$

şeklinde seçilebilir. Ayrıca, $\alpha u + \frac{v}{2\alpha} \mapsto u$, $\alpha u - \frac{v}{2\alpha} \mapsto v$ olarak yeniden parametrelendirilirse istenilen sonuca ulaşılır. □

Açıklama 4.3. Yardımcı Teorem 4.1'de ii. şıkkında verilen Lorentziyen yüzey $\mathbb{E}^2_1$ Minkowski uzayındaki $c_1(u) = (\cosh u, \sinh u)$ ile $\mathbb{E}^2$ Euclid uzayındaki $c_2(v) = (\cos v, \sin v)$ birim çemberlerinin tensörel çarpımı şeklinde ifade edilebilir. Ayrıca, $c(z) = (\cos z, \sin z)$ şeklinde bir kompleks eğri olarak da düşünülebilinir.

Teorem 4.5. $\mathbb{S}_s^{m-1}$ *yarı–küresinin Lorentziyen yüzeyinin 1–tipinden yarı–küresel Gauss tasvirine sahip olabilmesi için gerek ve yeter koşul, bu Lorentziyen yüzeyin aşağıdaki yüzeylerden birinin açık bir parçasına kongruent olmasıdır:*

i. *Tümden jeodezik* $\mathbb{S}_1^3 \subset \mathbb{S}_s^{m-1}$ *yarı–küresinin içinde kalan*

$$\mathbf{x}(u,v) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos u, \sin u, \cosh v, \sinh v)$$

ile verilen yüzey,

ii. *Tümden jeodezik* $\mathbb{S}_2^3 \subset \mathbb{S}_s^{m-1}$ *yarı–küresinin içinde kalan*

$$\mathbf{x}(u,v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, \sinh u \cos v, \sinh u \sin v)$$

ile verilen yüzey.

İspat. M_1, $\mathbb{S}_s^{m-1}$ yarı–küresinin 1–tipinden $\tilde{v}$ yarı–küresel Gauss tasvirine sahip Lorentziyen yüzeyi olsun. M_1 yüzeyi üzerinde teğet uzayı için e_1, e_2 yerel yarı–ortonormal çatı alanı seçilebilir, yani,

$$\langle e_1, e_1 \rangle = \langle e_2, e_2 \rangle = 0, \text{ ve } \langle e_1, e_2 \rangle = -1.$$

Bu durumda, α, β, M_1 yüzeyi üzerinde fonksiyonlar olmak üzere, yüzeye ait Levi–Civita konneksiyonları aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\nabla_{e_1} e_1 = \alpha e_1, \quad \nabla_{e_1} e_2 = -\alpha e_2, \quad \nabla_{e_2} e_1 = \beta e_1, \quad \nabla_{e_2} e_2 = -\beta e_2. \tag{4.14}$$

Burada, α, β yüzey üzerindeki fonksiyonlardır. $\tilde{v}$ tasviri 1–tipinden olduğundan, Teorem 4.3'den M_1 yüzeyinin $\mathbb{S}_s^{m-1}$ uzayında ortalama eğrilik vektörünün sıfır, normal konneksiyonunun düz ve Gauss eğriliğinin sabit olduğu söylenir. Dolayısıyla, $\hat{H} = -\hat{h}(e_1, e_2) = 0$ ve (2.9) denkleminden elde edilen $K = 1 - \langle \hat{h}(e_1, e_1), \hat{h}(e_2, e_2) \rangle$ sabittir. Önerme 4.1'den $K \neq 1$ olmalıdır, yani, $\langle \hat{h}(e_1, e_1), \hat{h}(e_2, e_2) \rangle$ sıfırdan farklıdır. $\xi_1 = \hat{h}(e_1, e_1)$, $\xi_2 = \hat{h}(e_2, e_2)$ ve $\langle \hat{h}(e_1, e_1), \hat{h}(e_2, e_2) \rangle = \tilde{c} \neq 0$ olarak isimlendirilirsin. M_1 yüzeyi düz normal konneksiyona sahip olduğundan (2.11) denkleminden

$$\langle \xi_1, \xi \rangle \langle \xi_2, \mu \rangle = \langle \xi_1, \eta \rangle \langle \xi_2, \xi \rangle \tag{4.15}$$

elde edilir. Burada, ξ, μ, η vektörleri M_1 yüzeyine normalleridir. (4.15) denklemi ξ_1 vektörünün ξ_2 vektörüne paralel olduğunu söyler. Bu ifade aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

$\mathbb{S}_s^{m-1}$ uzayında M_1 yüzeyinin normal uzayı için $\{e_3, e_4, \ldots, e_{m-1}\}$ ortonormal bazı seçilirse, bu baz takımına göre ξ_1 ve ξ_2 vektörleri

$$\xi_1 = \sum_{r=3}^{m-1} \varepsilon_r \langle \xi_1, e_r \rangle e_r, \qquad \xi_2 = \sum_{r=3}^{m} \varepsilon_r \langle \xi_2, e_r \rangle e_r$$

olarak yazılır. Özel olarak, $\xi = e_r$ ve $\mu = e_s$ seçilirse (4.15) ifadesinden

$$\langle \xi_1, e_r \rangle \langle \xi_2, e_s \rangle = \langle \xi_1, e_s \rangle \langle \xi_2, e_r \rangle, \;\; r,s = 3, \ldots, m-1$$

elde edilir. Bu eşitlik ξ_1, ξ_2 vektörlerinin katsayılarından oluşan matrisin rankının bir veya birden küçük olduğunu gösterir. Dolayısıyla, ξ_1, ξ_2 vektörleri birbirine lineer bağımlıdır, yani, paraleldir.

Ayrıca, $\xi = \xi_1$ ve $\eta = \xi_2$ olarak alınırsa (4.15) denkleminden $\langle \xi_1, \xi_1 \rangle \langle \xi_2, \xi_2 \rangle = \tilde{c}^2 \neq 0$ bulunur. Dolayısıyla, ξ_1 ve ξ_2 vektörlerinin aynı karaktere sahiptir. ξ_1 ve ξ_2 vektörleri $\overline{\xi}$ bir birim vektör ve $a > 0$ olmak üzere,

$$\xi_1 = a\overline{\xi}, \qquad \xi_2 = \varepsilon \frac{\tilde{c}}{a} \overline{\xi} \tag{4.16}$$

şeklinde yazılabilir. Burada, $\varepsilon = \langle \overline{\xi}, \overline{\xi} \rangle \in \{-1, 1\}$ olur. Dolayısıyla, birinci normal uzayı $\operatorname{Im} h = \operatorname{span}\{\overline{\xi}\}$ şeklindedir. (2.10) Codazzi denklemi, sırasıyla, $X = e_1, Y = Z = e_2$ ve $X = e_2, Y = Z = e_1$ vektör alanları için hesaplanırsa

$$D_{e_2}\xi_1 = 2\beta\xi_1, \qquad D_{e_1}\xi_2 = -2\alpha\xi_2 \tag{4.17}$$

elde edilir. (4.17) denkleminde (4.16) denklemindeki ifadeler yerine konulursa

$$D_{e_2}\xi_1 = e_2(a)\overline{\xi} + aD_{e_2}\overline{\xi}, \qquad D_{e_1}\xi_2 = -\varepsilon \frac{\tilde{c}e_1(a)}{a^2}\overline{\xi} + \varepsilon \frac{\tilde{c}}{a} D_{e_1}\overline{\xi} \tag{4.18}$$

hesaplanır. $\langle \overline{\xi}, \overline{\xi} \rangle = \varepsilon$ olduğundan $i = 1,2$ için $\langle D_{e_i}\overline{\xi}, \overline{\xi} \rangle = 0$ dır. Bu durumda, (4.17) ve (4.18) denklemleri karşılaştırıldığında

$$D_{e_1}\overline{\xi} = D_{e_2}\overline{\xi} = 0$$

ve

$$e_1(\ln a) = 2\alpha, \qquad e_2(\ln a) = 2\beta \tag{4.19}$$

elde edilir. Dolayısıyla, birinci normal uzayı $\operatorname{Im} h$ normal demette paraleldir ve Erbarcher–Magid İndirgeme Teoreminden M_1 yüzeyi $\varepsilon = 1$ ise tamamiyle tümden jeodezik $\mathbb{S}_1^3 \subset \mathbb{S}_s^{m-1}$, $\varepsilon = -1$ ise M_1 yüzeyi tümden jeodezik $\mathbb{S}_2^3 \subset \mathbb{S}_s^{m-1}$ yarı–küresinin içinde kalır. Ayrıca, M_1 yüzeyinin üzerinde $[e_1,e_2](\alpha) = (\nabla_{e_1}\nabla_{e_2} - \nabla_{e_2}\nabla_{e_1})(\alpha)$ olduğundan (4.52) denklemleri kullanılırsa

$$e_1(\beta) - e_2(\alpha) + 2\alpha\beta = 0 \tag{4.20}$$

elde edilir. (4.14) ve (4.20) denklemleri kullanılırak M_1 Lorentziyen yüzeyinin Gauss eğriliği sıfır olarak bulunur. Bu durumda, M_1 yüzeyi Yardımcı Teorem 4.1'e yüzeylerden birinin açık bir parçasına kongruenttir.

Teoremin yeter koşulunun ispatı Örnek 4.3 ve Örnek 4.4'den kolaylıkla görülür. $\square$

4.2.2 Spektral açılımda sıfırdan farklı sabit terime sahip olanlar

Bu bölümde, spektral açılımında sıfırdan farklı sabit terim içeren 1–tipinden yarı–küresel Gauss tasvirine sahip yarı–Riemann alt manifoldları sınıflandırılacaktır.

Bu sınıflandırma için ilk olarak $\mathbb{S}_s^{m-1}$ yarı–küresinin tümden ombilik hiperyüzeylerinin nasıl elde edileceği ile ilgili açıklama yapılacaktır.

Açıklama 4.4. [44] $\mathbb{S}_s^{n+1}$ yarı–küresinin tümden ombilik hiperyüzeyleri, $\mathbb{E}_q^{n+2}$ yarı–Euclid uzayının bir hiperdüzlemi ile $\mathbb{S}_s^{n+1}$ yarı–küresinin kesişimi ile elde edilir. Yani, $\tau \in \mathbb{R}$ ve $\langle a,a\rangle - \tau^2 \neq 0$ olmak üzere

$$M_t = \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}_s^{n+1} : \langle \mathbf{x}, a\rangle = \tau\}$$

şeklinde tanımlanan küme $\mathbb{S}_s^{n+1} \subset \mathbb{E}_s^{n+2}$ uzayının tümden ombilik bir hiperyüzeyini verir. Burada, t hiperyüzeyin indeksi ve $a \in \mathbb{E}_q^{n+2}$ sıfırdan farklı $\langle a,a\rangle \in \{-1,0,1\}$ olan sabit bir vektördür.

Bu hiperyüzeyin $\mathbb{S}_s^{n+1} \subset \mathbb{E}_s^{n+2}$ uzayı içindeki birim normal vektörü

$$N = \frac{1}{\sqrt{|\langle a,a\rangle - \tau^2|}}(a - \tau\mathbf{x}),$$

ve bu vektör doğrultusundaki şekil operatörü

$$A_N = \frac{\tau}{\sqrt{|\langle a,a\rangle - \tau^2|}} I_t, \tag{4.21}$$

şeklindedir. Burada, I_t, $T_p(M_t)$ uzayındaki birim dönüşüm matrisidir. M_t hiperyüzeyinin eğriliği

$$K = 1 + \frac{\langle a,a\rangle}{\langle a,a\rangle - \tau^2}$$

ile verilir. Görüldüğü üzere, M_t sabit eğrilikli tümden ombilik bir hiperyüzeydir. Hiperyüzeyi oluşturan $\mathbb{E}_q^{n+2}$ uzayının hiperdüzleminin karakterini belirleyen a vektörünün işaretine göre aşağıdaki durumlar oluşur:

i. $\langle a,a\rangle = 1$ ise, M_t hiperyüzeyinin eğriliği $K = \frac{1}{1-\tau^2}$ ve $\langle N,N\rangle = \frac{1}{|1-\tau^2|}(1-\tau^2)$ olarak bulunur. Bu durumda, $|\tau| < 1$ için $\langle N,N\rangle = 1$ dir. Dolayısıyla, M_t hiperyüzeyi $\mathbb{S}_t^{n+1}$ yarı–küresinin $\mathbb{S}_t^n\left(\frac{1}{1-\tau^2}\right)$ yarı–hiperküresidir. $|\tau| > 1$ için $\langle N,N\rangle = -1$ olur. Ancak bu durumda M_t hiperyüzeyi $\mathbb{S}_{t+1}^{n+1}$ yarı–küresinin $\mathbb{H}_t^n\left(-\frac{1}{1-\tau^2}\right)$ yarı–hiperbolik uzayıdır.

ii. $\langle a,a\rangle = -1$ ise, $\langle N,N\rangle = -1$ olur. M_t hiperyüzeyinin eğriliği $K = \frac{1}{1+\tau^2}$ dir. Bu durumda, M_t hiperyüzeyi $\mathbb{S}_{t+1}^{n+1}$ yarı–küresinin $\mathbb{S}_t^n\left(\frac{1}{1+\tau^2}\right)$ yarı–hiperküresidir.

iii. $\langle a,a\rangle = 0$ ise, $\langle N,N\rangle = -1$ olur ve M_t hiperyüzeyinin eğriliği $K = 0$ dır. Bu durumda, M_t hiperyüzeyi $\mathbb{S}_{t+1}^{n+1}$ yarı–küresinin tümden ombilik düz bir hiperyüzeyidir. Bu hiperyüzey *horohiperküre* olarak isimlendirilir. Ayrıca, (4.21) denkleminden M_t hiperyüzeyinin ortalama eğriliğinin sabit ve $|\hat{\alpha}| = 1$ elde edilir.

Yardımcı Teorem 4.2. *M_t, $\mathbb{S}_s^{n+1}$ yarı–küresinin indeksi t olan yarı–Riemann hiperyüzeyi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifade geçerlidir:*

$$\Delta(e_{n+1}\wedge e_1\wedge e_2\wedge\cdots\wedge e_n) = n\hat{\alpha}\tilde{v} + ne_{n+1}\wedge e_1\wedge e_2\wedge\cdots\wedge e_n. \tag{4.22}$$

Burada, $\hat{\alpha}$, M_t yarı–Riemann hiperyüzeyinin $\mathbb{S}_s^{n+1}$ yarı–küresi içindeki ortalama eğriliğidir.

İspat. $\mathbf{x} : M_t \longrightarrow \mathbb{S}_s^{n+1} \subset \mathbb{E}_s^{n+2}$, indeksi t ve $\mathbb{S}_s^{n+1}$ yarı–küresi içindeki ortalama eğriliği $\hat{\alpha}$ olan M_t hiperyüzeyinin $\mathbb{S}_s^{n+1}$ yarı–küresi içine izometrik bir daldırması olsun. $\mathbb{E}_s^{n+2}$ yarı–Euclid uzayında $e_1, e_2, \ldots, e_n$ vektörleri M_t'ye teğet ve e_{n+1}, e_{n+2} vektörleri M_t'ye normal olmak üzere, M_t hiperyüzeyi üzerinde $e_1, \ldots, e_{n+1}, e_{n+2} = \mathbf{x}$ yerel ortonormal çatı alanı seçilebilir. $\mathbb{E}_s^{n+2}$ uzayında M_t hiperyüzeyinin karşıt boyutu iki ve $e_{n+2} = \mathbf{x}$ vektörü paralel olduğundan e_{n+1} vektörü de paraleldir. $\overline{v} = e_{n+1}\wedge e_1\wedge e_2\wedge\cdots\wedge e_n$ olmak üzere $\Delta\overline{v}$ aşağıdaki şekilde hesaplanacaktır.

$\overline{v}$ tasvirinin e_i doğrultusundaki türevi

$$e_i\bar{v} = -\varepsilon_i e_{n+1}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge \underbrace{\mathbf{x}}_{\text{i'inci}} \wedge\cdots\wedge e_n \tag{4.23}$$

olarak elde edilir. (4.23) denkleminin e_i doğrultusunda bir kez daha türevi alınırsa

$$e_ie_i\bar{v} = -\varepsilon_i\bar{v} - h_{ii}^{n+1}\tilde{v} + \sum_{j=1}^{n}\omega_{ji}(e_i)e_{n+1}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{\mathbf{x}}_{\text{j'inci}}\wedge\cdots\wedge e_n \tag{4.24}$$

olarak hesaplanır. $\nabla_{e_i}e_i = \sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j\omega_{ij}(e_i)e_j$ olduğundan

$$(\nabla_{e_i}e_i)\bar{v} = -\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}(e_i)\,e_{n+1}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{\mathbf{x}}_{\text{j'inci}}\wedge\cdots\wedge e_n \tag{4.25}$$

şeklindedir. Bu durumda, (4.24) ve (4.25) denklemlerinden $\Delta\bar{v}$ ifadesi aşağıdaki denklemdeki gibidir:

$$\begin{aligned}\Delta\bar{v} =& n\bar{v} + \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i h_{ii}^{n+1}\tilde{v}\\ &-\sum_{i,j=1}^{n}\varepsilon_i(\omega_{ij}(e_i)+\omega_{ji}(e_i))e_{n+1}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{\mathbf{x}}_{\text{j'inci}}\wedge\cdots\wedge e_n.\end{aligned} \tag{4.26}$$

Ayrıca, $n\hat{\alpha} = \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i h_{ii}^{n+1}$ ve $\omega_{ij}+\omega_{ji} = 0$ olduğundan (4.26) denklemi $\Delta\bar{v} = n\bar{v} + n\hat{\alpha}\tilde{v}$ halini alır. Böylece istenilen (4.22) ifadesine ulaşılır. □

Teorem 4.6. *M_t, $\mathbb{S}_s^{m-1}$ yarı–küresinin n–boyutlu, t indeksli ve ortalama eğrilik vektörü null olmayan bir yarı–Riemann alt manifoldu olsun. Bu durumda, M_t yarı–Riemann alt manifoldunun spektral açılımında sıfırdan farklı sabit terim içeren 1–tipinden yarı–küresel Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul, M_t yarı–Riemann alt manifoldunun, $\mathbb{S}_{s^*}^{n+1}\subset\mathbb{S}_s^{m-1}$ ($s^* = t \leq s$ veya $s^* = t+1 \leq s$) tümden jeodezik yarı–küresinin, düz ve tümden jeodezik olmayan tümden ombilik yarı–Riemann hiperyüzeyinin açık bir parçası olmasıdır. Yani, M_t yarı–Riemann alt manifoldu*

i. eğriliği $c > 1$ olan $\mathbb{S}_t^n(c)\subset\mathbb{S}_t^{n+1}$,

ii. eğriliği $0 < c < 1$ olan $\mathbb{S}_t^n(c)\subset\mathbb{S}_{t+1}^{n+1}$,

iii. eğriliği $c > 0$ olan $\mathbb{H}_t^n(-c)\subset\mathbb{S}_{t+1}^{n+1}$

uzaylarından birinin açık bir parçasıdır.

İspat. $\mathbf{x} : M_t \longrightarrow \mathbb{S}_s^{m-1}\subset\mathbb{E}_s^m$, n–boyutlu ve $\mathbb{S}_s^{m-1}$ uzayındaki $\hat{H}$ ortalama eğrilik vektörü null olmayan M_t yarı–Riemann alt manifoldundan $\mathbb{S}_s^{m-1}$ yarı–küresine izometrik bir daldırma olsun. M_t yarı–Riemann alt manifoldunun $\tilde{v}$ yarı–küresel Gauss tasviri spektral açılımında sıfırdan farklı sabit terime sahip 1–tipinden ise bu tasvirin Laplasiyeni sıfırdan farklı bir sabit c vektörü ve bir λ_p sabiti için

$$\Delta\tilde{\nu} = \lambda_p(\tilde{\nu} - c)$$

eşitliğini sağlar. Bu denklemin e_i doğrultusunda türevi alınırsa

$$(\Delta\tilde{\nu})_i = \lambda_p(\tilde{\nu})_i \tag{4.27}$$

elde edilir. Burada, $(.)_i$ ile $e_i(.)$ gösterilmektedir. Diğer taraftan, (2.41) denkleminden doğrudan hesaplama ile $\Delta\tilde{\nu}$ ifadesinin e_i doğrultusundaki türevi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned}
(\Delta\tilde{\nu})_i &= (\|\hat{h}\|^2)_i\tilde{\nu} + \|\hat{h}\|^2 \sum_{r=n+1}^{m-1}\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_r h^r_{ik}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_r}_{\text{k'ıncı}}\wedge\cdots\wedge e_n \\
&+ 2nD_{e_i}\hat{H}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge e_n - n\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_i\delta_{ik}\hat{H}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{\mathbf{x}}_{\text{k'ıncı}}\wedge\cdots\wedge e_n \\
&+ n\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=n+1}^{m-1}\varepsilon_r h^r_{ik}\hat{H}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{\text{k'ıncı}}\wedge\cdots\wedge e_n \\
&- n\sum_{\substack{j,k,\ell=1\\ j\neq k}}^{n}\varepsilon_\ell\omega_{j\ell}(e_i)\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_\ell}_{\text{j'inci}}\wedge\cdots\wedge\underbrace{D_{e_k}\hat{H}}_{\text{k'ıncı}}\wedge\cdots\wedge e_n \\
&- n\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n}\sum_{r=n+1}^{m-1}\varepsilon_r h^r_{ij}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{\text{j'inci}}\wedge\cdots\wedge\underbrace{D_{e_k}\hat{H}}_{\text{k'ıncı}}\wedge\cdots\wedge e_n \\
&+ n\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\langle A_{D_{e_k}\hat{H}}(e_i), e_k\rangle\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge e_n - n\sum_{k=1}^{n}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{D_{e_i}D_{e_k}\hat{H}}_{\text{k'ıncı}}\wedge\cdots\wedge e_n \\
&+ \sum_{\substack{r,s=n+1\\ r<s}}^{m-1}\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n}\varepsilon_r\varepsilon_s\{e_i(R^r_{sjk})\mathbf{x} + R^r_{sjk}e_i\}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{\text{j'inci}}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_s}_{\text{k'ıncı}}\wedge\cdots\wedge e_n \\
&+ \sum_{r,s=n+1}^{m-1}\sum_{\substack{j,k,\ell=1\\ j\neq k}}^{n}\varepsilon_\ell\varepsilon_r\varepsilon_s R^r_{sjk}h^s_{i\ell}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_\ell}_{\text{j'inci}}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{\text{k'ıncı}}\wedge\cdots\wedge e_n \\
&+ \sum_{\substack{r,s=n+1\\ r<s}}^{m-1}\sum_{\substack{j,k,\ell=1\\ j,k,\ell\neq}}^{n}\varepsilon_r\varepsilon_s R^r_{sjk}\Big\{\sum_{h=1}^{n}\varepsilon_h\omega_{\ell h}(e_i)\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_h}_{\ell'\text{inci}}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{\text{j'inci}}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_s}_{\text{k'ıncı}}\wedge\cdots\wedge e_n \\
&\qquad + \sum_{t=n+1}^{m-1}\varepsilon_t h^t_{i\ell}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_t}_{\ell'\text{inci}}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{\text{j'inci}}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_s}_{\text{k'ıncı}}\wedge\cdots\wedge e_n\Big\} \\
&- \sum_{r,s,t=n+1}^{m-1}\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n}\varepsilon_r\varepsilon_s\varepsilon_t R^r_{sjk}\omega_{st}(e_i)\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_t}_{\text{j'inci}}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{\text{k'ıncı}}\wedge\cdots\wedge e_n.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

$\hat{H}$ ortalama eğrilik vektörünün sıfırdan farklı olup olmasına göre iki ayrı durum incelenebilir.

1. Durum: $\hat{H}=0$ olsun. Bu durumda, (4.28) ifadesi aşağıdaki denkleme dönüşür:

$$
\begin{aligned}
(\Delta\tilde{\nu})_i =& (\|\hat{h}\|^2)_i\tilde{\nu} + \|\hat{h}\|^2 \sum_{r=n+1}^{m-1}\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_r h^r_{ik}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_r}_{\text{k'ıncı}}\wedge\cdots\wedge e_n \\
&+ \sum_{\substack{r,s=n+1\\ r<s}}^{m-1}\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n} \varepsilon_r\varepsilon_s\{e_i(R^r_{sjk})\mathbf{x}+R^r_{sjk}e_i\}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_r}_{\text{j'inci}}\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_s}_{\text{k'ıncı}}\wedge\cdots\wedge e_n \\
&+ \sum_{\substack{r,s=n+1\\ r<s}}^{m-1}\sum_{\substack{j,k,\ell\\ j,k,\ell\neq}}^{n} \varepsilon_r\varepsilon_s R^r_{sjk}\Big\{\sum_{h=1}^{n}\varepsilon_h\omega_{\ell h}(e_i)\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_h}_{\ell'\text{inci}}\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_r}_{\text{j'inci}}\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_s}_{\text{k'ıncı}} \\
&\wedge\cdots\wedge e_n + \sum_{t=n+1}^{m-1}\varepsilon_t h^t_{i\ell}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_t}_{\ell'\text{inci}}\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_r}_{\text{j'inci}}\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_s}_{\text{k'ıncı}}\wedge\cdots\wedge e_n\Big\} \\
&+ \sum_{r,s=n+1}^{m-1}\sum_{\substack{j,k,\ell=1\\ j\neq k}}^{n} \varepsilon_\ell\varepsilon_r\varepsilon_s R^r_{sjk}h^s_{i\ell}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_\ell}_{\text{j'inci}}\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_r}_{\text{k'ıncı}}\wedge\cdots\wedge e_n \\
&- \sum_{r,s,t=n+1}^{m-1}\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n} \varepsilon_t\varepsilon_r\varepsilon_s R^r_{sjk}\omega_{st}(e_i)\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_t}_{\text{j'inci}}\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_r}_{\text{k'ıncı}}\wedge\cdots\wedge e_n.
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

(2.37), (4.27) ve (4.29) denklemleri karşılaştırıldığında $i,j,k=1,\ldots,n$ ve $r,s=n+1,\ldots,m-1$ için $(\|\hat{h}\|^2)_i = R^r_{sjk}=0$ olduğu görülür. Yani, M_t alt manifoldu düz normal konneksiyona, sabit skaler eğriliğe ve $\mathbb{S}^{m-1}_s$ uzayı içinde sıfır ortalama eğrilik vektörüne sahiptir. Dolayısıyla, Teorem 4.3'den $\tilde{\nu}$ yarı–küresel Gauss tasviri spektral açılımda sabit terimi sıfır olan, yani $c=0$, 1–tipinden olduğu söylenir. Bu ise varsayımla ile çelişir. Yani, $\hat{H}$ sıfırdan farklı bir vektördür.

2. Durum: $\hat{H}\neq 0$ olsun. (2.37) ve (4.28) denklemleri karşılaştırıldığında $D_{e_i}\hat{H}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge e_n$ teriminin $(\Delta\tilde{\nu})_i$ ifadesinde yer alıp $e_i(\tilde{\nu})$ ifadesinde yer almadığı görülür. Dolayısıyla, $D\hat{H}=0$, yani, M_t yarı–Riemann alt manifoldu $\mathbb{S}^{m-1}_s$ yarı–küresi içinde sıfırdan farklı paralel ortalama eğrilik vektörüne sahiptir. Ayrıca, $\hat{H}$ null olmayan bir vektör olduğundan $\langle\hat{H},\hat{H}\rangle$ sıfırdan farklı bir sabittir. Bu durumda, (4.28) denklemi

$$
\begin{aligned}
(\Delta\tilde{\nu})_i =& (\|\hat{h}\|^2)_i\tilde{\nu} + \|\hat{h}\|^2 \sum_{r=n+1}^{m-1}\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_r h^r_{ik}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_r}_{\text{k'ıncı}}\wedge\cdots\wedge e_n \\
&+ n\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=n+1}^{m-1} \varepsilon_r h^r_{ik}\hat{H}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_r}_{\text{k'ıncı}}\wedge\cdots\wedge e_n \\
&- n\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_i\delta_{ik}\hat{H}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge \underbrace{\mathbf{x}}_{\text{k'ıncı}}\wedge\cdots\wedge e_n \\
&+ \sum_{\substack{r,s=n+1\\ r<s}}^{m-1}\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n} \varepsilon_r\varepsilon_s\{e_i(R^r_{sjk})\mathbf{x} + R^r_{sjk}e_i\}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_r}_{\text{j'inci}}\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_s}_{\text{k'ıncı}}\wedge\cdots\wedge e_n \\
&+ \sum_{\substack{r,s=n+1\\ r<s}}^{m-1}\sum_{\substack{j,k,\ell\\ j,k,\ell\neq}}^{n} \varepsilon_r\varepsilon_s R^r_{sjk}\Big\{\sum_{h=1}^{n}\varepsilon_h\omega_{\ell h}(e_i)\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_h}_{\ell'\text{inci}}\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_r}_{\text{j'inci}}\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_s}_{\text{k'ıncı}} \\
&\qquad \wedge\cdots\wedge e_n + \sum_{t=n+1}^{m-1}\varepsilon_t h^t_{i\ell}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_t}_{\ell'\text{inci}}\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_r}_{\text{j'inci}}\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_s}_{\text{k'ıncı}}\wedge\cdots\wedge e_n\Big\} \\
&+ \sum_{r,s=n+1}^{m-1}\sum_{\substack{j,k,\ell=1\\ j\neq k}}^{n} \varepsilon_\ell\varepsilon_r\varepsilon_s R^r_{sjk}h^s_{i\ell}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_\ell}_{\text{j'inci}}\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_r}_{\text{k'ıncı}}\wedge\cdots\wedge e_n \\
&- \sum_{r,s,t=n+1}^{m-1}\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n} \varepsilon_r\varepsilon_s\varepsilon_t R^r_{sjk}\omega_{st}(e_i)\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_t}_{\text{j'inci}}\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_r}_{\text{k'ıncı}}\wedge\cdots\wedge e_n
\end{aligned} \tag{4.30}
$$

denklemine dönüşür. (2.37), (4.27) ve (4.30) denklemleri tekrardan göz önünde bulundurulduğunda $\|\hat{h}\|^2$ sabit olduğu elde edilir. Dolayısıyla, (2.23) ifadesinden M_t yarı–Riemann alt manifoldunun sabit skaler eğriliğe sahip olduğu söylenir. Ayrıca,

$$
\begin{aligned}
&\|\hat{h}\|^2 \sum_{r=n+1}^{m-1}\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_r h^r_{ik}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_r}_{\text{k'ıncı}}\wedge\cdots\wedge e_n \\
&- n\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_i\delta_{ik}\hat{H}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge \underbrace{\mathbf{x}}_{\text{k'ıncı}}\wedge\cdots\wedge e_n \\
&+ \sum_{r,s=n+1}^{m-1}\sum_{\substack{j,k,\ell=1\\ j\neq k}}^{n} \varepsilon_\ell\varepsilon_r\varepsilon_s R^r_{sjk}h^s_{i\ell}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_\ell}_{\text{j'inci}}\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_r}_{\text{k'ıncı}}\wedge\cdots\wedge e_n \\
&= \lambda_p \sum_{r=n+1}^{m-1}\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_r h^r_{ik}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_r}_{\text{k'ıncı}}\wedge\cdots\wedge e_n
\end{aligned} \tag{4.31}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
&n\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=n+1}^{m-1} \varepsilon_r h^r_{ik}\hat{H}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_r}_{\text{k'ıncı}}\wedge\cdots\wedge e_n \\
&+ \sum_{\substack{r,s=n+1\\ r<s}}^{m-1}\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n} \varepsilon_r\varepsilon_s R^r_{sjk}e_i\wedge e_1\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_r}_{\text{j'inci}}\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_s}_{\text{k'ıncı}}\wedge\cdots\wedge e_n = 0
\end{aligned} \tag{4.32}
$$

eşitlikleri elde edilir. $\hat{H}$ vektörünün uzunluğu sıfırdan farklı bir sabit olduğundan $\hat{H} = \varepsilon_{n+1}\hat{\alpha}e_{n+1}$ olarak seçilebilir. Bu durumda, (4.32) denkleminden $j,k = 1,\ldots,n$ and $r,s \geq n+2$ için $R^r_{sjk} = 0$ elde edilir. Ayrıca, $D\hat{H} = 0$ olduğundan $R^{n+1}_{sjk} = 0$ dır. Dolayısıyla, M_t yarı–Riemann alt manifoldunun $\mathbb{S}^{m-1}_s$ yarı–küresi içinde normal konneksiyonu düzdür ve (4.32) denklemi

$$n\varepsilon_{n+1}\hat{\alpha}\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=n+1}^{m-1}\varepsilon_r h^r_{ik} e_{n+1}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{\text{k'ıncı}}\wedge\cdots\wedge e_n = 0 \tag{4.33}$$

ifadesine indirgenir. Bu denklemden $r \geq n+2$ ve $i,k = 1,\ldots,n$ için $h^r_{ik} = 0$ elde edilir. Ayrıca, $\hat{\alpha}$ sıfırdan farklı bir sabit olduğundan $h^{n+1}_{ik} \neq 0$ dır. Dolayısıyla, M_t yarı–Riemann alt manifoldunun birinci normal uzayı $Imh = \text{span}\{e_{n+1}\}$ olur. $\hat{H}$ paralel bir vektör ve $\hat{\alpha}$ sabit olduğundan e_{n+1} vektörü de paraleldir. Bu durumda, Erbarcher–Magid İndirgeme Teoreminden M_t yarı–Riemann alt manifoldu tümden jeodezik $\mathbb{S}^{n+1}_{s^*} \subset \mathbb{S}^{m-1}_s$ yarı–küresinin içinde kalır. Burada, $s^* = t$ veya $s^* = t+1$ olur. Ayrıca, (4.31) denkleminden

$$\varepsilon_i(\|\hat{h}\|^2 - \lambda_p)h^{n+1}_{ik} + n\delta_{ik}\hat{\alpha} = 0,\ \ i,k = 1,\ldots,n, \tag{4.34}$$

elde edilir. $\lambda_p = \|\hat{h}\|^2$ ise $\hat{\alpha} = 0$ bulunur. Bu ise $\hat{H} \neq 0$ olması ile çelişir. Dolayısıyla, $\lambda_p \neq \|\hat{h}\|^2$ dır. (4.34) denkleminden $i \neq k$ için $h^{n+1}_{ik} = 0$ elde edilir. $i = k$ için bu ifadeden $h^{n+1}_{ii} = \varepsilon_i\hat{\alpha}$ ve i üzerinden 1'den n'ye kadar toplam alınırsa

$$n\hat{\alpha}(n + \|\hat{h}\|^2 - \lambda_p) = 0$$

bulunur. $\hat{\alpha} \neq 0$ olduğundan $\lambda_p = n + \|\hat{h}\|^2$ şeklindedir. (2.23) denkleminden skaler eğrilik $S = n(n-1)(1+\varepsilon_{n+1}\hat{\alpha}^2)$ ve $\lambda_p = n(1+\varepsilon_{n+1}\hat{\alpha}^2)$ olarak bulunur. λ_p sıfırdan farklı bir sabit olduğundan S skaler eğriliğinin de sıfırdan farklı olması gerektiği görülür. Dolayısıyla, M_t yarı–Riemann alt manifoldu $\mathbb{S}^{n+1}_{s^*} \subset \mathbb{S}^{m-1}_s$ yarı–küresinin düz ve tümden jeodezik olmayan tümden ombilik bir yarı–Riemann hiperyüzeyidir, yani, Açıklama 4.4'de bahsedilen uzaylardan birinin açık bir parçası olur. Böylece istenilen sonuca ulaşılır.

Yeter koşulunun ispatı için, M_t yarı–Riemann alt manifoldu tümden jeodezik $\mathbb{S}^{n+1}_{s^*} \subset \mathbb{S}^{m-1}_s$ yarı–küresinin düz ve tümden jeodezik olmayan tümden ombilik hiperyüzeyinin açık bir parçası olsun. Genelliği bozmaksızın, $\mathbb{S}^{n+1}_{s^*}$ yarı–küresi $\mathbb{E}^{n+2}_{s^*}$ yarı–Euclid uzayının alt manifoldu olarak düşünülebilinir. Bu durumda, $\mathbb{E}^{n+2}_{s^*}$

yarı–Euclid uzayında $e_1,\ldots,e_n$ vektörleri M_t'ye teğet, e_{n+1},e_{n+2} vektörleri M_t'ye normal olmak üzere M_t yarı–Riemann hiperyüzeyi üzerinde $e_1,\ldots,e_n,e_{n+1},e_{n+2}=\mathbf{x}$ yerel ortonormal bazı seçilebilir. Karşıt boyut iki ve $e_{n+2}=\mathbf{x}$ vektörü normal uzayda paralel olduğundan e_{n+1} vektörü de paraleldir. Dolayısıyla, $R^D\equiv 0$ ve $\hat{H}=\varepsilon_{n+1}\hat{\alpha}e_{n+1}$ paraleldir. M_t yarı–Riemann hiperyüzeyi tümden ombilik olduğundan $\|\hat{h}\|^2=\varepsilon_{n+1}n\hat{\alpha}^2$ olur. Bu durumda, (2.41) denkleminden

$$\Delta\tilde{\nu}=n\varepsilon_{n+1}\hat{\alpha}(\hat{\alpha}\tilde{\nu}+e_{n+1}\wedge e_1\wedge e_2\wedge\cdots\wedge e_n) \tag{4.35}$$

olarak bulunur.

$$c=\frac{1}{1+\varepsilon_{n+1}\hat{\alpha}^2}(\tilde{\nu}-\varepsilon_{n+1}\hat{\alpha}e_{n+1}\wedge e_1\wedge e_2\wedge\cdots\wedge e_n),$$
$$\tilde{\nu}_p=\frac{\varepsilon_{n+1}\hat{\alpha}}{1+\varepsilon_{n+1}\hat{\alpha}^2}(\hat{\alpha}\tilde{\nu}+e_{n+1}\wedge e_1\wedge e_2\wedge\cdots\wedge e_n)$$

olmak üzere, $\tilde{\nu}=c+\tilde{\nu}_p$ şeklindedir. M_t, $\mathbb{S}^{n+1}_{s^*}$ yarı–küresinin düz olmayan hiperyüzeyi olduğundan $1+\varepsilon_{n+1}\hat{\alpha}^2\neq 0$ dır. $\hat{\alpha}$ sabit olduğundan $i=1,\ldots,n$ için $e_i(c)=0$ ve (4.2) ve (4.35) denklemlerinden $\Delta\tilde{\nu}_p=n(1+\varepsilon_{n+1}\hat{\alpha}^2)\tilde{\nu}_p$ elde edilir. Bu durumda, $\tilde{\nu}$ yarı–küresel Gauss tasviri spektral açılımda sıfırdan farklı sabit terime sahip 1–tipindendir. □

Tanım 4.2. *$\tilde{\nu}$ yarı–küresel Gauss tasviri için $\Delta\tilde{\nu}\neq 0$ iken $\Delta^2\tilde{\nu}=0$ ise $\tilde{\nu}$ tasviri biharmoniktir.*

Teorem 4.7. *$\mathbb{S}^{n+1}_s$ yarı–küresi içindeki bir yarı–horohiperküresi biharmonik yarı–küresel Gauss tasvirine sahiptir.*

İspat. M_t, indeksi t olan $\mathbb{S}^{n+1}_s$ yarı–küresinin bir horohiperküresi olsun. Açıklama 4.4'den M_t horohiperküresinin aşağıdaki şekilde tanımlanır:
$a\in\mathbb{E}^{n+2}_s$ null vektör ve $\tau\neq 0$ olmak üzere, $\mathbb{S}^{n+1}_s$ uzayı içinde n–boyutlu horoküresi

$$M_t=\{\mathbf{x}\in\mathbb{S}^{n+1}_s:\langle\mathbf{x},a\rangle=\tau\}$$

şeklindedir. $\mathbb{S}^{n+1}_s$ yarı–küresi içinde $e_{n+1}=\frac{1}{\tau}(a-\tau\mathbf{x})$ şeklinde birim normal vektörü olarak seçilirse, $A_{n+1}=I_t$ ve $\hat{\alpha}=1$, $\|\hat{h}\|^2=-n$ bulunur. Bu durumda, (2.41) denkleminden

$$\Delta\tilde{\nu}=-n\tilde{\nu}-ne_{n+1}\wedge e_1\wedge e_2\wedge\cdots\wedge e_n \tag{4.36}$$

olur ve $\Delta\tilde{\nu} \neq 0$ dır. Buradan,

$$\Delta^2\tilde{\nu} = -n\Delta\tilde{\nu} - n\Delta(e_{n+1} \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n) \tag{4.37}$$

yazılır. Ayrıca, (4.22) ifadesinden

$$\Delta(e_{n+1} \wedge e_1 \wedge e_2 \cdots \wedge e_n) = n\tilde{\nu} + ne_{n+1} \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n = -\Delta\tilde{\nu} \tag{4.38}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla, $\Delta^2\tilde{\nu} = 0$ olur. Yani, $\mathbb{S}^{n+1}_s$ yarı–küresinin horohiperküresi biharmonik yarı–küresel Gauss tasvirine sahiptir. $\square$

Şimdi, ortalama eğrilik vektörü ışıksal olan ve spektral açılımında sıfırdan farklı sabit terimli 1–tipinden yarı–küresel Gauss tasvirine sahip yarı–Riemann yüzeyleri incelenecektir.

[45] numaralı çalışmadaki Teorem 6.1'de $\mathbb{S}^4_1$ de Sitter uzayı içinde paralel ortalama eğrilik vektörüne sahip marjinlerde sıkışmış yüzeyler sınıflandırılmıştır ve sekiz çeşit yüzey elde edilmiştir. Aşağıda verilen yüzey ise bu sınıflandırmadaki tümden ombilik olan marjinal sıkışmış tek yüzeydir.

Örnek 4.5. [45] $\mathbb{S}^4_1 \subset \mathbb{E}^5_1$ yarı–küresi içinde yer vektörü

$$M : \mathbf{x}(u,v) = (1, \sin u, \cos u \cos v, \cos u \sin v, 1) \tag{4.39}$$

ile verilen M uzaysal yüzeyi göz önüne alınsın. $\mathbb{E}^5_1$ yarı–Euclid uzayında e_1, e_2 vektörleri M'ye teğet, e_3, e_4, e_5 vektörleri M'ye normal olmak üzere, M yüzeyi üzerinde $e_1, e_2, \ldots, e_5$ yerel ortonormal çatı alanı aşağıdaki şekilde seçilebilir:

$$\begin{aligned}
e_1 &= \frac{\partial}{\partial u}, \quad e_2 = \frac{1}{\cos u}\frac{\partial}{\partial v}, \ \cos u \neq 0, \\
e_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, \sin u, \cos u \cos v, \cos u \sin v, 0), \\
e_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, \sin u, \cos u \cos v, \cos u \sin v, 2), \quad e_5 = \mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Burada, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 1$ olur. Doğrudan hesaplama ile M yüzeyine ait şekil operatörleri ve konneksiyon formları

$$A_3 = A_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{I}, \ \omega_{12}(e_1) = 0, \ \omega_{12}(e_2) = -\tan u, \ \omega_{34}(e_1) = \omega_{34}(e_2) = 0$$

olarak bulunur. Burada, I, 2×2 birim dönüşüm matrisidir. Ayrıca, M yüzeyinin $\mathbb{S}^4_1$ yarı–küresi içindeki ortalama eğrilik vektörü, Gauss ve normal eğrilikleri, sırasıyla,

$$\hat{H} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(e_3 - e_4), \ R^D = 0 \ \text{ve} \ K = 1$$

olarak bulunur. $\omega_{34} = 0$ olduğundan $\hat{H}$ paralel ve $\varepsilon_3 = -\varepsilon_4 = 1$ olduğundan $\hat{H}$ ışıksal bir vektördür. (2.41) denkleminden

$$\Delta\tilde{\nu} = 2\hat{H} \wedge e_1 \wedge e_2 \neq 0$$

elde edilir.

$$c = \tilde{\nu} + \frac{1}{\sqrt{2}}(e_3 \wedge e_1 \wedge e_2 - e_4 \wedge e_1 \wedge e_2),$$
$$\tilde{\nu}_p = -\frac{1}{\sqrt{2}}(e_3 \wedge e_1 \wedge e_2 - e_4 \wedge e_1 \wedge e_2)$$

olmak üzere, $\tilde{\nu} = c + \tilde{\nu}_p$ şeklindedir. Doğrudan hesaplama ile c vektörünün sabit ve $\Delta\tilde{\nu}_p = 2\tilde{\nu}_p$ denkleminin sağlandığı görülür. Dolayısıyla, $\mathbb{S}^4_1$ de Sitter uzayı içindeki marjinal sıkışmış M uzaysal yüzeyi spektral açılımında sıfırdan farklı sabit terimi olan 1–tipinden yarı–küresel Gauss tasvirine sahiptir.

Teorem 4.8. *$\mathbb{S}^4_1$ de Sitter uzayının marjinal sıkışmış uzaysal bir yüzeyinin yarı–küresel Gauss tasvirinin spektral açılımında sıfırdan farklı sabit terim içeren 1–tipinden olması için gerek ve yeter koşul, bu yüzeyin, yer denklemi* (4.39) *ile verilen yüzeyin açık bir parçasına kongurent olmasıdır.*

İspat. $\mathbf{x} : M \longrightarrow \mathbb{S}^4_1 \subset \mathbb{E}^5_1$ marjinal sıkışmış M uzaysal yüzeyinden $\mathbb{S}^4_1$ yarı–küresine bir izometrik daldırma olsun. $\tilde{\nu}$ yarı–küresel Gauss tasviri spektral açılımında sıfırdan farklı sabit terime sahip 1–tipinden ise, $\tilde{\nu}$ tasviri sıfırdan farklı bir sabit c vektörü ve bir $\lambda_p \neq 0$ sabiti için $\Delta\tilde{\nu} = \lambda_p(\tilde{\nu} - c)$ denklemini sağlar. Bu denklemin e_i doğrultusunda türevi alınırsa

$$(\Delta\tilde{\nu})_i = \lambda_p(\tilde{\nu})_i \tag{4.40}$$

elde edilir. Burada, $e_i(.) = (.)_i$ ile gösterilmiştir. Diğer taraftan, doğrudan hesaplama ile (2.41) denkleminden

$$
\begin{aligned}
(\Delta\tilde{\nu})_i = & \left((\|\hat{h}\|^2)_i + 2\langle A_{D_{e_1}\hat{H}}, e_1\rangle + 2\langle A_{D_{e_2}\hat{H}}, e_2\rangle\right)\tilde{\nu} \\
& + \|\hat{h}\|^2 \left(\sum_{r=3}^{4} \varepsilon_r h_{i1}^r \mathbf{x}\wedge e_r \wedge e_2 + \sum_{r=3}^{4} \varepsilon_r h_{i2}^r \mathbf{x}\wedge e_1 \wedge e_r\right) \\
& + 4D_{e_i}\hat{H}\wedge e_1\wedge e_2 + 2\sum_{r=3}^{4} \varepsilon_r h_{i1}^r \hat{H}\wedge e_r\wedge e_2 + 2\sum_{r=3}^{4} \varepsilon_r h_{i2}^r \hat{H}\wedge e_1\wedge e_r \\
& - 2\delta_{i1}\hat{H}\wedge\mathbf{x}\wedge e_2 - 2\delta_{i2}\hat{H}\wedge e_1\wedge\mathbf{x} \\
& + 2\omega_{12}(e_i)\mathbf{x}\wedge D_{e_1}\hat{H}\wedge e_1 - 2\omega_{12}(e_i)\mathbf{x}\wedge e_2\wedge D_{e_2}\hat{H} \\
& - 2\left(\sum_{r=3}^{4} \varepsilon_r h_{i2}^r \mathbf{x}\wedge D_{e_1}\hat{H}\wedge e_r + \sum_{r=3}^{4} \varepsilon_r h_{i1}^r \mathbf{x}\wedge e_r\wedge D_{e_2}\hat{H}\right) \\
& - 2\left(\mathbf{x}\wedge D_{e_i}D_{e_1}\hat{H}\wedge e_2 + \mathbf{x}\wedge e_1\wedge D_{e_i}D_{e_2}\hat{H}\right) \\
& + 2\varepsilon_3\varepsilon_4\left(e_i(R_{412}^3)\mathbf{x} + R_{412}^3 e_i\right)\wedge e_3\wedge e_4 \\
& - 2\varepsilon_3\varepsilon_4 R_{412}^3 \left(\sum_{j=1}^{2} h_{ji}^3 \mathbf{x}\wedge e_j\wedge e_4 + \sum_{j=1}^{2} h_{ji}^4 \mathbf{x}\wedge e_3\wedge e_j\right) \qquad (4.41)
\end{aligned}
$$

elde edilir. (2.37) ve (4.41) denklemleri karşılaştırılırsa $D_{e_i}\hat{H}\wedge e_1\wedge e_2$ teriminin $e_i(\Delta\tilde{\nu})$ ifadesinde olduğu ve $e_i(\tilde{\nu})$ ifadesinde ise olmadığı görülür. Bu durumda, $D\hat{H} = 0$ olur, yani, $\hat{H}$ sıfırdan farklı paralel bir vektördür. Dolayısıyla, [36] çalısmasındaki Yardımcı Teorem 2.2'den M yüzeyinin $\mathbb{S}_1^4$ yarı–küresi içinde normal konneksiyonun düz olduğu anlaşılır, yani, $R_{412}^3 = 0$ dır. Böylece, (4.41) denklemi

$$
\begin{aligned}
(\Delta\tilde{\nu})_i = & (\|\hat{h}\|^2)_i\tilde{\nu} + \|\hat{h}\|^2 \left(\sum_{r=3}^{4} \varepsilon_r h_{i1}^r \mathbf{x}\wedge e_r\wedge e_2 + \sum_{r=3}^{4} \varepsilon_r h_{i2}^r \mathbf{x}\wedge e_1\wedge e_r\right) \\
& - 2\delta_{i1}\hat{H}\wedge\mathbf{x}\wedge e_2 - 2\delta_{i2}\hat{H}\wedge e_1\wedge\mathbf{x} \\
& + 2\sum_{r=3}^{4} \varepsilon_r h_{i1}^r \hat{H}\wedge e_r\wedge e_2 + 2\sum_{r=3}^{4} \varepsilon_r h_{i2}^r \hat{H}\wedge e_1\wedge e_r \qquad (4.42)
\end{aligned}
$$

ifadesine dönüşür. (2.37), (4.40) ve (4.42) ifadeleri karşılaştırıldığında $\|\hat{h}\|^2$ sabit, yani, skaler eğrilik sabittir ve aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$
\sum_{r=3}^{4} \varepsilon_r h_{i1}^r \hat{H}\wedge e_r\wedge e_2 + \sum_{r=3}^{4} \varepsilon_r h_{i2}^r \hat{H}\wedge e_1\wedge e_r = 0, \qquad (4.43)
$$

ve

$$
\begin{aligned}
& \|\hat{h}\|^2 \left(\sum_{r=3}^{4} \varepsilon_r h_{i1}^r \mathbf{x}\wedge e_r\wedge e_2 + \sum_{r=3}^{4} \varepsilon_r h_{i2}^r \mathbf{x}\wedge e_1\wedge e_r\right) \\
& - 2\delta_{i1}\hat{H}\wedge\mathbf{x}\wedge e_2 - 2\delta_{i2}\hat{H}\wedge e_1\wedge\mathbf{x} \\
& = \lambda_p \left(\sum_{r=3}^{4} \varepsilon_r h_{i1}^r \mathbf{x}\wedge e_r\wedge e_2 + \sum_{r=3}^{4} \varepsilon_r h_{i2}^r \mathbf{x}\wedge e_1\wedge e_r\right). \qquad (4.44)
\end{aligned}
$$

M, düz normal konneksiyona sahip uzaysal bir yüzey olduğundan A_3 ve A_4 şekil operatörleri aynı anda köşegenleştirilebilir. Yani, $\mathbb{S}_1^4$ uzayı içinde M yüzeyi üzerinde şekil operatörleri ve ikinci esas formu aşağıdaki yapıda olacak şekilde $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ortonormal bazı seçilebilir:

$$A_3 = \begin{pmatrix} h_{11}^3 & 0 \\ 0 & h_{22}^3 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} h_{11}^4 & 0 \\ 0 & h_{22}^4 \end{pmatrix}, \tag{4.45}$$

$$h(e_1,e_1) = \varepsilon_3(h_{11}^3 e_3 - h_{11}^4 e_4),\ h(e_1,e_2) = 0,\ h(e_2,e_2) = \varepsilon_3(h_{22}^3 e_3 - h_{22}^4 e_4).$$

Bu durumda, Gauss denkleminden yüzeyin Gauss eğriliği

$$K = 1 + \varepsilon_3(h_{11}^3 h_{22}^3 - h_{11}^4 h_{22}^4) \tag{4.46}$$

olarak bulunur. Ayrıca (4.43) ifadesinden $i = 1,2$ için yazılırsa

$$h_{i1}^4 \mathrm{tr} A_3 - h_{i1}^3 \mathrm{tr} A_4 = 0 \qquad \text{ve} \qquad h_{i2}^4 \mathrm{tr} A_3 - h_{i2}^3 \mathrm{tr} A_4 = 0$$

bulunur. Ancak, $\hat{H} \neq 0$ ve A_3, A_4 köşegen matrisler olduğundan yukarıda verilen denklem sistemi otomatik olarak sağlanır. (4.44) ifadesinden

$$(\|\hat{h}\|^2 - \lambda_p) h_{ij}^r + \delta_{ij} \mathrm{tr} A_r = 0,\ \ i,j = 1,2 \text{ ve } r = 3,4, \tag{4.47}$$

elde edilir. $\lambda_p = \|\hat{h}\|^2$ ise (4.47) denkleminden $\mathrm{tr}A_3 = \mathrm{tr}A_4 = 0$ elde edilir. Bu ise $\hat{H} \neq 0$ ile çelişir, yani, $\lambda_p \neq \|\hat{h}\|^2$ olur. (4.47) denkleminden $h_{11}^3 = h_{22}^3$ ve $h_{11}^4 = h_{22}^4$ bulunur. Bu durumda, M yüzeyine ait şekil operatörleri ve ikinci esas formu

$$A_3 = h_{11}^3 \mathrm{I} \ \text{ ve } \ A_4 = h_{11}^4 \mathrm{I}, \tag{4.48}$$

$$h(e_1,e_1) = h(e_2,e_2) = \varepsilon_3(h_{11}^3 e_3 - h_{11}^4 e_4),\ \ h(e_1,e_2) = 0 \tag{4.49}$$

şekline dönüşür. Burada, I, 2×2 birim matristir. Görüldüğü üzere, M, $\mathbb{S}_1^4$ uzayında tümden jeodezik olmayan tümden ombilik uzaysal bir yüzeydir. $\hat{H}$ ışıksal bir vektör olduğundan $(\mathrm{tr}A_3)^2 = (\mathrm{tr}A_4)^2$ ilişkisi vardır ve bu ilişki (4.46) denkleminde kullanılırsa M yüzeyinin Gauss eğriliği $K = 1$ olarak bulunur. Bu durumda, M yüzeyinin $\mathbb{S}_1^4$ de Sitter uzayı içinde ortalama eğrilik vektörü ışıksal, düz normal konneksiyona sahip ve $K = 1$ dir. Dolayısıyla, M, yer vektörü (4.39) ile verilen yüzeyin açık bir parçasına kongruenttir.

Teoremin yeter koşulunun ispatı Örnek 4.5'den kolaylıkla görülür. $\square$

4.3 2–Tipinden Yarı–Küresel Gauss Tasvirine Sahip Yarı–Küresel Alt Manifoldlar

Bu bölümde, yarı–küre içindeki yarı–Riemann alt manifoldlarından 2–tipinden yarı–küresel Gauss tasvirine sahip olanlar sınıflandırılacaktır.

4.3.1 Sıfır ortalama eğrilik vektörüne sahip yarı–küre içindeki yüzeyler

$\mathbf{x} : M_t \longrightarrow \mathbb{S}^4_s \subset \mathbb{E}^5_s$, $\mathbb{S}^4_s$ uzayı içindeki $\hat{H}$ ortalama eğrilik vektörü sıfır olan ve t indeksli yönlendirilmiş M_t yüzeyinden $\mathbb{S}^4_s$ yarı–küresine izometrik bir daldırma olsun. $\mathbb{E}^5_s$ yarı–Euclid uzayı içinde e_1, e_2 vektörleri M_t'ye teğet ve e_3, e_4, e_5 vektörleri M_t'ye normal olmak üzere M_t yüzeyi üzerinde $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 = \mathbf{x}\}$ şeklinde bir ortonormal çatı alanı seçilebilir. e_5 vektörü doğrultusundaki şekil operatörü $A_5 = -I_t$ ve $(r,s) \neq (3,4)$ için $R^r_{s12} = 0$ olur. Burada, I_t, $T_p(M_t)$ uzayındaki birim dönüşümdür. R^3_{412} normal eğrilik tensörünün bileşeni K^D ile gösterilecektir. Bu durumda, $K^D = \sum_{i=1}^2 \varepsilon_i \left(h^3_{2i}h^4_{i1} - h^3_{1i}h^4_{i2}\right)$ olur. Bu bilgiler göz önünde bulundurulduğunda (2.41) denkleminden

$$\Delta\tilde{\nu} = \|\hat{h}\|^2\tilde{\nu} + 2\varepsilon_3\varepsilon_4 K^D \mathbf{x} \wedge e_3 \wedge e_4 \tag{4.50}$$

elde edilir. $\|\hat{h}\|^2_j = e_j(\|\hat{h}\|^2)$ ve $K^D_j = e_j(K^D)$ ile gösterilmek üzere, (4.50) denkleminden $\tilde{\nu}$ yarı–küresel Gauss tasvirinin ikinci Laplasiyeni

$$\begin{aligned}\Delta^2\tilde{\nu} =& (\Delta(\|\hat{h}\|^2) + \|\hat{h}\|^4)\tilde{\nu} + 2\varepsilon_3\varepsilon_4(K^D\|\hat{h}\|^2 + \Delta(K^D))\mathbf{x} \wedge e_3 \wedge e_4 \\ &+ 2\varepsilon_3\varepsilon_4 K^D \Delta(\mathbf{x} \wedge e_3 \wedge e_4) - 2\sum_{j=1}^2 \varepsilon_j \|\hat{h}\|^2_j e_j\tilde{\nu} - 4\varepsilon_3\varepsilon_4 \sum_{j=1}^2 \varepsilon_j K^D_j e_j(\mathbf{x} \wedge e_3 \wedge e_4)\end{aligned} \tag{4.51}$$

olarak bulunur.

Weingarten formülü kullanılarak $\mathbf{x} \wedge e_3 \wedge e_4$ ifadesinin e_j doğrultusundaki türevi aşağıdaki şekilde bulunur:

$$e_j(\mathbf{x} \wedge e_3 \wedge e_4) = e_j \wedge e_3 \wedge e_4 - \sum_{k=1}^2 \varepsilon_k h^3_{jk}\mathbf{x} \wedge e_k \wedge e_4 - \sum_{k=1}^2 \varepsilon_k h^4_{jk}\mathbf{x} \wedge e_3 \wedge e_k. \tag{4.52}$$

(2.17) ile verilen Codazzi ve (4.52) denklemlerinden

$$\begin{aligned}\Delta(\mathbf{x}\wedge e_3\wedge e_4) =& 2\varepsilon_1\varepsilon_2K^D\tilde{\nu}+(\|\hat{h}\|^2+2)\mathbf{x}\wedge e_3\wedge e_4\\ &+2\sum_{j,k=1}^{2}\varepsilon_j\varepsilon_k(h^3_{jk}e_j\wedge e_k\wedge e_4-h^4_{jk}e_j\wedge e_k\wedge e_3)\\ &+\sum_{j,k=1}^{2}\varepsilon_j\varepsilon_kh^3_{jk,j}\mathbf{x}\wedge e_k\wedge e_4+\sum_{j,k=1}^{2}\varepsilon_j\varepsilon_kh^4_{jk,j}\mathbf{x}\wedge e_3\wedge e_k\end{aligned} \tag{4.53}$$

elde edilir.

$h^r_{jk,j}=h^r_{jj,k}$ ve $\hat{H}=0$ olduğundan $r=3,4$ için $\sum_{j,k=1}^{2}\varepsilon_j\varepsilon_kh^r_{jk,j}\mathbf{x}\wedge e_k\wedge e_r=0$ olur. Böylece, (4.53) denklemi

$$\Delta(\mathbf{x}\wedge e_3\wedge e_4) = 2\varepsilon_1\varepsilon_2K^D\tilde{\nu}+(\|\hat{h}\|^2+2)\mathbf{x}\wedge e_3\wedge e_4 \tag{4.54}$$

şeklini alır. (2.37), (4.52) ve (4.54) denklemleri (4.51) ifadesinde yerine konulduğunda $\tilde{\nu}$ yarı–küresel Gauss tasvirinin ikinci Laplasiyeni aşağıdaki şekilde verilir:

Yardımcı Teorem 4.3. $\mathbf{x}:M_t\longrightarrow\mathbb{S}^4_s\subset\mathbb{E}^5_s$*, indeksi t olan yönlendirilmiş* M_t *yüzeyinden* $\mathbb{S}^4_s$ *yarı–küresine izometrik bir daldırması olsun.* M_t *yüzeyi* $\mathbb{S}^4_s$ *yarı–küresi içinde sıfır ortalama eğrilik vektörüne sahip ise yarı–küresel Gauss tasvirinin ikinci Laplasiyeni için aşağıdaki ifade geçerlidir:*

$$\begin{aligned}\Delta^2\tilde{\nu} =& \left[\Delta(\|\hat{h}\|^2)+\|\hat{h}\|^4+4\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4(K^D)^2\right]\tilde{\nu}\\ &+2\varepsilon_3\varepsilon_4\left[2K^D(\|\hat{h}\|^2+1)+\Delta(K^D)\right]\mathbf{x}\wedge e_3\wedge e_4\\ &-4\varepsilon_3\varepsilon_4\Big(\sum_{j=1}^{2}\varepsilon_jK^D_je_j\wedge e_3\wedge e_4-\sum_{j,k=1}^{2}\varepsilon_j\varepsilon_kK^D_j(h^3_{jk}\mathbf{x}\wedge e_k\wedge e_4+h^4_{jk}\mathbf{x}\wedge e_3\wedge e_k)\Big)\\ &-2\sum_{j=1}^{2}\sum_{r=3}^{4}\varepsilon_j\varepsilon_r\|\hat{h}\|^2_j(h^r_{j1}\mathbf{x}\wedge e_r\wedge e_2+h^r_{j2}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge e_r)\end{aligned} \tag{4.55}$$

Burada, $\|\hat{h}\|^2_j=e_j(\|\hat{h}\|^2)$, $K^D_j=e_j(K^D)$ *ve* $K^D=\sum_{i=1}^{2}\varepsilon_i(h^3_{2i}h^4_{i1}-h^3_{1i}h^4_{i2})$ *olarak verilmektedir.*

Yardımcı Teorem 4.4. $\mathbb{S}^4_s$ *yarı–küresinin* $\mathbb{S}^4_s$ *uzayı içinde ortalama eğrilik vektörü sıfır olan yönlendirilmiş yüzeyi 2–tipinden yarı–küresel Gauss tasvirine sahipse bu yüzeyin Gauss eğriliği sabit ve normal eğriliği sıfırdan farklı bir sabittir.*

İspat. $\mathbf{x}:M_t\longrightarrow\mathbb{S}^4_s\subset\mathbb{E}^5_s$, $\mathbb{S}^4_s$ yarı–küresi içinde sıfır ortalama eğrilik vektörüne sahip yönlendirilmiş M_t yüzeyinden $\mathbb{S}^4_s$ yarı–küresine izometrik bir daldırma olsun. $\tilde{\nu}$ yarı–küresel Gauss tasviri 2–tipinden ise $\Delta\tilde{\nu}_p=\lambda_p\tilde{\nu}_p$, $\Delta\tilde{\nu}_q=\lambda_q\tilde{\nu}_q$ olmak üzere,

$\tilde{\nu} = \tilde{\nu}_p + \tilde{\nu}_q$ şeklinde $\tilde{\nu}$ tasvirinin bir spektral açılımı vardır. Burada, λ_p, λ_q ayrık sıfırdan farklı sabitlerdir. Yani, Δ Laplace operatörü aşağıdaki gibi ikinci dereceden bir polinomu sağlar:

$$\Delta^2\tilde{\nu} = (\lambda_p + \lambda_q)\Delta\tilde{\nu} - \lambda_p\lambda_q\tilde{\nu}. \tag{4.56}$$

Ayrıca, Yardımcı Teorem 4.3'den M_t yüzeyinin $\tilde{\nu}$ yarı–küresel Gauss tasvirinin ikinci Laplasiyeni için (4.55) denklemi geçerlidir. (4.50), (4.55) ve (4.56) denklemlerinden $e_j \wedge e_3 \wedge e_4$ teriminin sadece $\Delta^2\tilde{\nu}$ ifadesinde geçtiği görülür. Bu da $j = 1,2$ için $K_j^D = 0$, yani, K^D normal eğriliği sabit olduğunu söyler. Ayrıca aşağıdaki denklem sistemi elde edilir:

$$\Delta(\|\hat{h}\|^2) + \|\hat{h}\|^2(\|\hat{h}\|^2 - \lambda_p - \lambda_q) + 4\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4(K^D)^2 + \lambda_p\lambda_q = 0, \tag{4.57}$$

$$K^D(2 + 2\|\hat{h}\|^2 - \lambda_p - \lambda_q) = 0, \tag{4.58}$$

$$\varepsilon_1\|\hat{h}\|_1^2 h_{11}^r + \varepsilon_2\|\hat{h}\|_2^2 h_{21}^r = 0, \tag{4.59}$$

$$\varepsilon_1\|\hat{h}\|_1^2 h_{12}^r + \varepsilon_2\|\hat{h}\|_2^2 h_{22}^r = 0,\ r = 3,4. \tag{4.60}$$

M_t yüzeyinin $\mathbb{S}_s^4$ yarı–küresi içindeki ortalama eğrilik vektörü sıfır olduğundan $r = 3,4$ için $\varepsilon_1 h_{11}^r + \varepsilon_2 h_{22}^r = 0$ olur. Bu koşul altında, (4.59) ve (4.60) denklemlerinden $\|\hat{h}\|^2$ sabit olması gerektiği bulunur. (2.23) denkleminden M_t yüzeyinin skaler eğriliğinin ,yani Gauss eğriliği K'nın sabit olduğu sonucu elde edilir.

Ayrıca, (4.58) denkleminden ise $K^D = 0$ olabileceği görülür. Bu durumda, M_t yüzeyi sıfır ortalama eğrilik vektörüne, düz normal konneksiyona ve sabit skaler eğriliğe sahip olacağından Teorem 4.3'den $\tilde{\nu}$ tasvirinin 1–tipinden olduğu söylenir. Bu durum varsayımla çelişmektedir. Dolayısıyla, M_t yüzeyinin normal eğriliği K^D sıfırdan farklı bir sabittir. □

Teorem 4.9. *$\mathbb{S}_1^4$ yarı–küresinin içinde sıfır ortalama eğrilik vektörüne ve birden farklı sabit Gauss eğriliğe sahip yarı–küresel Gauss tasviri 2–tipinden olan yönlendirilmiş bir Lorentziyen yüzey yoktur.*

İspat. $\mathbf{x} : M_1 \longrightarrow \mathbb{S}_1^4 \subset \mathbb{E}_1^5$, $\mathbb{S}_1^4$ de Sitter uzayı içinde sıfır ortalama eğrilik vektörüne ve birden farklı sabit Gauss eğriliğine sahip yönlendirilmiş M_1 Lorentziyen yüzeyinden $\mathbb{S}_1^4$ yarı–küresinin içine izometrik bir daldırma olsun. $\mathbb{E}_1^5$ yarı–Euclid uzayında e_1, e_2 vektörleri M_1'e teğet ve e_3, e_4, e_5 vektörleri M_1'e normal olmak üzere M_1 yüzeyi üzerinde $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 = \mathbf{x}\}$ yerel ortonormal çatı alanı seçilebilir ve $\varepsilon_1\varepsilon_2 =$

$-\varepsilon_3\varepsilon_4 = -1$ dir. M_1 yüzeyi 2–tipinden yarı–küresel Gauss tasvirine sahipse Yardımcı Teorem 4.4'den K sabit ve K^D sıfırdan farklı bir sabit olduğu görülür. [41] numaralı çalışmada elde edilen $K \neq 1$ olmak üzere, $\mathbb{S}^4_1$ yarı–küresi içindeki sıfır ortalama eğrilik vektörü ve sabit Gauss eğriliğine sahip yüzeylerin sınıflandırılmasından M_1 Lorentziyen yüzeyinin yarı–Riemann Clifford torusunun açık bir parçası olduğu görülür. Ancak, Teorem 4.5'den yarı–Riemann Clifford torusunun yarı–küresel Gauss tasviri 1–tipinden olduğu söylenir. Böylece, istenilen sonuca ulaşılır. □

Teorem 4.10. *$\mathbb{S}^4_2$ yarı–küresi içinde sıfır ortalama eğrilik vektörüne sahip yönlendirilmiş Lorentziyen bir yüzeyin 2–tipinden yarı–küresel Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul, bu yüzeyin Gauss eğriliğinin $K = \frac{1}{3}$ ve normal eğriliğinin $|K^D| = \frac{2}{3}$ olmasıdır.*

İspat. M_1, $\mathbb{S}^4_2$ yarı–küresi içinde sıfır ortalama eğriliğine ve 2–tipinden yarı–küresel Gauss tasvirine sahip Lorentziyen bir yüzey olsun. Yardımcı Teorem 4.4'den yüzeyin K Gauss eğriliğinin sabit ve K^D normal eğriliğinin ise sıfırdan farklı bir sabit olduğu söylenir. Bu durumda, [46] numaralı çalışmadaki Sonuç 3.7'den $K = \frac{1}{3}$ ve $(K^D)^2 = \frac{4}{9}$ olduğu görülür.

Teoremin yeter koşulun ispatı için, M_1, $\mathbb{S}^4_2$ yarı–küresi içinde ortalama eğrilik vektörü sıfır, $K = \frac{1}{3}$ ve $|K^D| = \frac{2}{3}$ olan yönlendirilmiş Lorentziyen bir yüzey olsun. (2.23) denkleminden $\|\hat{h}\|^2 = \frac{4}{3}$ olur. Bu durumda, (4.50) ve (4.55) denklemlerinden

$$\Delta\tilde{\nu} = \frac{4}{3}\tilde{\nu} \pm \frac{4}{3}\mathbf{x}\wedge e_3\wedge e_4, \;\; \Delta^2\tilde{\nu} = \frac{32}{9}\tilde{\nu} \pm \frac{56}{9}\mathbf{x}\wedge e_3\wedge e_4 \tag{4.61}$$

elde edilir. Bu denklemlerden Δ Laplace operatörü

$$\Delta^2\tilde{\nu} - \frac{14}{3}\Delta\tilde{\nu} + \frac{8}{3}\tilde{\nu} = 0 \tag{4.62}$$

denklemini sağladığı görülür. Bu ifadeden $\lambda_p + \lambda_q = \frac{14}{3}$ ve $\lambda_p\lambda_q = \frac{8}{3}$, yani, $\lambda_p = \frac{2}{3}$ ve $\lambda_q = 4$ dür. Böylece, $\tilde{\nu}$ yarı–küresel Gauss tasviri sonlu tiptendir ve tipi $k \leq 2$ olur.

Diğer taraftan, $\tilde{\nu}$ yarı–küresel Gauss tasviri,

$$\tilde{\nu}_p = \frac{4}{5}\tilde{\nu} - \frac{2}{5}\mathbf{x}\wedge e_3\wedge e_4, \;\; \tilde{\nu}_q = \frac{1}{5}\tilde{\nu} + \frac{2}{5}\mathbf{x}\wedge e_3\wedge e_4 \tag{4.63}$$

olmak üzere, $\tilde{\nu} = \tilde{\nu}_p + \tilde{\nu}_q$ spektral açılımına sahiptir. Doğrudan hesapla $\Delta\tilde{\nu}_p = \frac{2}{3}\tilde{\nu}_p$ ve $\Delta\tilde{\nu}_q = 4\tilde{\nu}_q$ denklemlerini sağladığı gösterilir. Yani, $\tilde{\nu}$ tasviri 2–tipindendir. □

Yukarıdaki teoreme örnek olarak [41] numaralı çalışmada bahsedilen Lorentziyen Veronese yüzeyi örneği verilecektir.

Örnek 4.6. [41] (x,y,z) ve (u_1,u_2,u_3,u_4,u_5), sırasıyla, $\mathbb{E}^3_1$ ve $\mathbb{E}^5_2$ yarı–Euclid uzayılarının koordinat sistemleri olsun. Bileşenleri

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{6}(x^2+y^2+2z^2),\ u_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(x^2-y^2),\ u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}xy, \\ u_4 &= \frac{1}{\sqrt{3}}xz,\ u_5 = \frac{1}{\sqrt{3}}yz \end{aligned} \tag{4.64}$$

şeklinde tanımlanan $\mathbf{x} : \mathbb{S}^2_1\left(\frac{1}{3}\right) \longrightarrow \mathbb{S}^4_2$ izometrik daldırması *Lorentziyen Veronese yüzeyi* olarak isimlendirilir. Bu yüzey, $\mathbb{S}^4_2$ yarı–küresi içinde sıfır ortalama eğrilik vektörüne sahip izotropik paralel bir yüzeydir.

M_1 Lorentziyen Veronese yüzeyi için aşağıdaki şekilde bir parametrizasyon alınabilir:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(u,v) = &\left(\frac{3}{2}\cosh^2\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\cosh^2\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)\cos\left(\frac{2v}{\sqrt{3}}\right), \frac{\sqrt{3}}{2}\cosh^2\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)\sin\left(\frac{2v}{\sqrt{3}}\right),\right. \\ &\left.\frac{\sqrt{3}}{2}\sinh\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right)\cos\left(\frac{v}{\sqrt{3}}\right), \frac{\sqrt{3}}{2}\sinh\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right)\sin\left(\frac{v}{\sqrt{3}}\right)\right). \end{aligned} \tag{4.65}$$

Bu durumda, $\mathbb{S}^4_2$ yarı–küresi içinde M_1 yüzeyi üzerinde e_1,e_2 teğet, e_3,e_4 normal vektörler olmak üzere

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial u},\ e_2 = \operatorname{sech}\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)\frac{\partial}{\partial v},\ e_3 = \sqrt{3}\hat{h}(e_1,e_1),\ e_4 = \sqrt{3}\hat{h}(e_1,e_2), \tag{4.66}$$

ortonormal bir çatı alanı seçilebilir ve $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = -1$ ve $\varepsilon_3 = -\varepsilon_4 = 1$ olarak bulunur. Doğrudan hesaplama ile

$$\begin{aligned} h^3_{11} =& h^3_{22} = -h^4_{12} = \frac{1}{\sqrt{3}},\ h^3_{12} = h^4_{11} = h^4_{22} = 0, \\ \omega_{34} =& -2\omega_{12} = -\frac{2}{\sqrt{3}}\tanh\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)\omega^2,\ \|\hat{h}\|^2 = -2K^D = \frac{4}{3}, \end{aligned} \tag{4.67}$$

elde edilir. Yüzeyle ilgili bulunan bu büyüklüklerden yararlanarak

$$\hat{H} = 0,\ K^D = -\frac{2}{3} \text{ ve } K = \frac{1}{3}$$

olarak hesaplanır. Dolayısıyla, Teorem 4.10'den M_1 Lorentziyen Veronese yüzeyi 2–tipinden yarı–küresel Gauss tasviri sahiptir.

[46] numaralı çalışmada $\mathbb{S}^4_2$ yarı–küresinde sıfır ortalama eğrilikli, Gauss eğriliği $K = \frac{1}{3}$ ve normal eğriliği $|K^D| = \frac{2}{3}$ olan Lorentziyen yüzeyler sınıflandırılmış

ve bu özelliklere sahip Lorentziyen Veronese yüzey ailesinden başka yüzeylerin olduğu gösterilmiştir. [16] numaralı çalışmada ise $\mathbb{S}^4$ küresinde 2–tipinden küresel Gauss tasvirine sahip minimal tek yüzeyin Veronese yüzeyi olduğu ispatlanmıştır. Dolayısıyla, $\mathbb{S}^4$ uzayındaki sınıflandırmadan farklı olarak $\mathbb{S}^4_2$ yarı–küresinde sıfır ortalama eğrilik vektörüne ve 2–tipinden yarı–küresel Gauss tasvirine sahip tek yüzey Lorentziyen Veronese yüzeyi değildir.

4.3.2 Yarı–küre içindeki yarı–Riemann hiperyüzeyleri

Bu bölümde, yarı–küre içindeki yarı–Riemann hiperyüzeylerden 2–tipinden yarı–küresel Gauss tasvirine sahip olanların karakterizasyonu yapılacaktır. Yarı–Riemann hiperyüzeyinin yarı–küre içindeki normal vektörü doğrultusundaki şekil operatörünün köşegenleşip köşegenleşmemesine göre farklı sonuçlar elde edilecektir.

4.3.2.1 Has yarı–Riemann hiperyüzeyler

$\mathbf{x} : M_t \longrightarrow \mathbb{S}^{n+1}_s \subset \mathbb{E}^{n+2}_s$, $\mathbb{S}^{n+1}_s$ uzayı içinde sabit ortalama eğrilik vektörüne sahip t indeksli M_t yönlendirilmiş yarı–Riemann hiperyüzeyinden $\mathbb{S}^{n+1}_s$ yarı–küresine izometrik bir daldırma olsun. $\mathbb{E}^{n+2}_s$ yarı–Euclid uzayı içinde $e_1, e_2, \ldots, e_n$ vektörleri M_t hiperyüzeyine teğet ve e_{n+1}, e_{n+2} vektörleri M_t hiperyüzeyine normal olmak üzere, $e_1, \ldots, e_{n+1}, e_{n+2} = \mathbf{x}$ ortonormal çatı alanı seçilebilir. $\mathbb{E}^{n+2}_s$ yarı–Euclid uzayında M_t hiperyüzeyinin karşıt boyutu iki ve e_{n+2} vektörü hiperyüzeyin normal demetinde paralel olduğu için e_{n+1} vektörü de paraleldir. Dolayısıyla, M_t yarı–Riemann hiperyüzeyinin $\mathbb{E}^{n+2}_s$ yarı–Euclid uzayındaki normal demeti düzdür, yani, R^D özdeş olarak sıfırdır. Ayrıca, $\mathbb{S}^{n+1}_s$ yarı–küresi içindeki $\hat{H} = \varepsilon_{n+1}\hat{\alpha}e_{n+1}$ vektörü $\hat{\alpha}$ sabit olduğundan paraleldir. Bu durumda, (2.41) denkleminden

$$\Delta\tilde{\nu} = \|\hat{h}\|^2\tilde{\nu} + \varepsilon_{n+1}n\hat{\alpha}e_{n+1} \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n \tag{4.68}$$

elde edilir. (4.22) ve (4.68) denklemleri kullanılarak $\tilde{\nu}$ yarı–küresel Gauss tasvirnin ikinci Laplasiyeni aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\begin{aligned}\Delta^2\tilde{\nu} =& (\|\hat{h}\|^2 + n)\Delta\tilde{\nu} + (\Delta(\|\hat{h}\|^2) + \varepsilon_{n+1}n^2\hat{\alpha}^2 - n\|\hat{h}\|^2)\tilde{\nu} \\ & - 2\sum_{j,k=1}^{n} \varepsilon_j\varepsilon_{n+1}e_j(\|\hat{h}\|^2)h^{n+1}_{jk}\mathbf{x} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_{n+1}}_{\text{k'ıncı}} \wedge \cdots \wedge e_n.\end{aligned} \tag{4.69}$$

Teorem 4.11. $\mathbb{S}_s^{n+1}$ *yarı–küresinin sıfırdan farklı sabit ortalama eğriliğe sahip tümden ombilik olmayan yönlendirilmiş has bir yarı–Riemann hiperyüzeyinin yarı–küresel Gauss tasvirinin 2–tipinden olması için gerek ve yeter koşul, bu hiperyüzeyin skaler eğriliğinin sabit olmasıdır.*

İspat. $\mathbf{x} : M_t \longrightarrow \mathbb{S}_s^{n+1} \subset \mathbb{E}_s^{n+2}$, sabit $\hat{\alpha} \neq 0$ ortalama eğriliğe sahip t indeksli tümden ombilik olmayan yönlendirilmiş has M_t yarı–Riemann hiperyüzeyinden $\mathbb{S}_s^{n+1}$ uzayının içine izometrik bir daldırma olsun. Bu durumda, $\mathbb{E}_s^{n+2}$ yarı–Euclid uzayında M_t hiperyüzeyi için yukarıdaki gibi bir ortonormal çatı seçilebilir ve yarı–küresel Gauss tasviri için (4.68) ve (4.69) ifadeleri geçerlidir. İlk olarak, M_t has yarı–Riemann hiperyüzeyi sabit skaler eğriliğe sahip olsun. (2.23) denkleminden $\|\hat{h}\|^2$ sabittir. Şimdi, M_t hiperyüzeyinin $\tilde{\nu}$ yarı–küresel Gauss tasvirinin 2–tipinden olduğu gösterilecektir. M_t yarı–Riemann hiperyüzeyi has bir hiperyüzey olduğundan e_{n+1} normal vektörü doğrultusundaki A_{n+1} şekil operatörü $A_{n+1}(e_i) = \varepsilon_i h_{ii}^{n+1} e_i$, $i = 1, \ldots, n$ şeklinde ifade edilebilir. Bu durumda, $n(\|\hat{h}\|^2 - \varepsilon_{n+1} n\hat{\alpha}^2)$ ifadesi aşağıdaki şekilde yazılır:

$$n(\|\hat{h}\|^2 - \varepsilon_{n+1} n\hat{\alpha}^2) = \varepsilon_{n+1} \sum_{i<j} (\varepsilon_i h_{ii}^{n+1} - \varepsilon_j h_{jj}^{n+1})^2. \tag{4.70}$$

M_t tümden ombilik olmayan bir hiperyüzey olduğundan bu ifade sıfırdan farklıdır. $D_0 = (\|\hat{h}\|^2 + n)^2 - 4n(\|\hat{h}\|^2 - \varepsilon_{n+1} n\hat{\alpha}^2) = (\|\hat{h}\|^2 - n)^2 + 4\varepsilon_{n+1} n^2 \hat{\alpha}^2$ olarak tanımlansın. ε_{n+1} işaretine göre iki durum oluşur. $\varepsilon_{n+1} = 1$ ise $D_0 = (\|\hat{h}\|^2 - n)^2 + 4n^2\hat{\alpha}^2$ sıfırdan farklı pozitif bir sabit olur. $\varepsilon_{n+1} = -1$ ise (4.70) denkleminden görüldüğü üzere $n(\|\hat{h}\|^2 + n\hat{\alpha}^2) < 0$ olur. Dolayısıyla, $D_0 = (\|\hat{h}\|^2 + n)^2 - 4n(\|\hat{h}\|^2 + n\hat{\alpha}^2)$ sıfırdan farklı pozitif bir sabit olur.

$$\tilde{\nu}_p = \frac{\|\hat{h}\|^2 - n + \sqrt{D_0}}{2\sqrt{D_0}} \tilde{\nu} + \varepsilon_{n+1} \frac{n\hat{\alpha}}{\sqrt{D_0}} e_{n+1} \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n, \tag{4.71}$$

$$\tilde{\nu}_q = -\frac{\|\hat{h}\|^2 - n - \sqrt{D_0}}{2\sqrt{D_0}} \tilde{\nu} - \varepsilon_{n+1} \frac{n\hat{\alpha}}{\sqrt{D_0}} e_{n+1} \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n \tag{4.72}$$

tasvirleri göz önüne alınırsa, $\tilde{\nu} = \tilde{\nu}_p + \tilde{\nu}_q$ ve $\lambda_p = \frac{\|\hat{h}\|^2 + n + \sqrt{D_0}}{2}$ ve $\lambda_q = \frac{\|\hat{h}\|^2 + n - \sqrt{D_0}}{2}$ sıfırdan farklı sabitleri için $\Delta\tilde{\nu}_p = \lambda_p \tilde{\nu}_p$ ve $\Delta\tilde{\nu}_q = \lambda_q \tilde{\nu}_q$ olduğu görülür. Bu durumda, M_t hiperyüzeyinin $\tilde{\nu}$ yarı–küresel Gauss tasviri 2–tipindedir.

Tersine, M_t hiperyüzeyinin $\tilde{\nu}$ yarı–küresel Gauss tasvirinin 2–tipinden olduğu varsayılsın. Yani, $\tilde{\nu}$ tasviri

$$\tilde{\nu} = \tilde{\nu}_p + \tilde{\nu}_q, \;\; \Delta\tilde{\nu}_p = \lambda_p \tilde{\nu}_p \;\text{ ve }\; \Delta\tilde{\nu}_q = \lambda_q \tilde{\nu}_q \tag{4.73}$$

şeklinde bir spektral açılıma olsun. Burada, $\tilde{v}_p, \tilde{v}_q$ yarı–Euclid uzayında sabit olmayan tasvirler, λ_p, λ_q birbirinden ve sıfırdan farklı sabitlerdir. Bu ifadeden, $\tilde{v}$ yarı–küresel Gauss tasvirinin Laplasiyeninin aşağıdaki gibi ikinci dereceden bir polinomu sağlar:

$$\Delta^2 \tilde{v} = (\lambda_p + \lambda_q)\Delta\tilde{v} - \lambda_p \lambda_q \tilde{v}. \tag{4.74}$$

(4.69) ile (4.74) denklemleri karşılaştırılırsa $\lambda_p + \lambda_q = \|\hat{h}\|^2 + n$ görülür. Bu da $\|\hat{h}\|^2$ sabit olduğunu söyler. Ortalama eğrilik $\hat{\alpha}$'da sabit olduğundan (2.23) denkleminden M_t has yarı–Riemann hiperyüzeyinin sabit skaler eğriliğe sahiptir. □

İzoparametrik has yarı–Riemann hiperyüzeyleri sabit ortalama ve skaler eğriliğe sahip olduklarından aşağıdaki sonuç verilir.

Sonuç 4.2. $\mathbb{S}_s^{n+1}$ *yarı–küresinin tümden ombilik olmayan sıfırdan farklı ortalama eğrilikli izoparametrik has yarı–Riemann hiperyüzeyleri 2–tipinden yarı–küresel Gauss tasvirine sahiptir.*

[47] numaralı çalışmada yarı–Riemann belirsiz uzay formlarının en fazla iki tane ayrık asal eğriliğe sahip has yarı–Riemann hiperyüzeyleri için bazı model uzaylar verilmiştir ve bu hiperyüzeylerle ilgili kongruentlik teoremlerinden bahsedilmiştir. $\mathbb{S}_s^{n+1}$ yarı–küresinin sıfırdan farklı sabit ortalama ve iki ayrık asal eğriliğe sahip tümden ombilik olmayan yarı–Riemann hiperyüzeyinin

i. $\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} = 1$ olmak üzere, $\mathbb{S}_t^k(c_1) \times \mathbb{H}_{s-t-1}^{n-k}(-c_2) \subset \mathbb{S}_s^{n+1}$,

ii. $c_1 \neq \frac{n}{k}$ ve $\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} = 1$ olmak üzere, $\mathbb{S}_t^k(c_1) \times \mathbb{S}_{s-t}^{n-k}(c_2) \subset \mathbb{S}_s^{n+1}$

birine kongruent olduğu gösterilmiştir. Burada, c_1, c_2 pozitif sabitlerdir.

Örnek 4.7. $\mathbb{S}_1^3$ de Sitter uzayı içinde aşağıdaki şekilde uzaysal bir M yüzeyi göz önüne alınsın:

$$M = \mathbb{S}^1(a) \times \mathbb{H}^1(-b) = \left\{ \mathbf{x}_1 \in \mathbb{S}_1^3 \subset \mathbb{E}_1^4 : x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{a},\ x_3^2 - x_4^2 = -\frac{1}{b},\ x_4 > 0 \right\} \tag{4.75}$$

Burada, a, b, $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 1$ eşitliğini sağlayan pozitif sabitlerdir. Bu uzaysal yüzeyin bir parametrizasyonu

$$\mathbf{x}_1(u,v) = \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\cos(\sqrt{a}u), \frac{1}{\sqrt{a}}\sin(\sqrt{a}u), \frac{1}{\sqrt{b}}\sinh(\sqrt{b}v), \frac{1}{\sqrt{b}}\cosh(\sqrt{b}v) \right) \tag{4.76}$$

şeklinde seçilirse, $\mathbb{E}_1^4$ yarı–Euclid uzayında e_1, e_2 vektörleri M'ye teğet ve e_3, e_4 vektörleri M'ye normal vektörler olmak üzere, M yüzeyi üzerinde aşağıdaki şekilde bir ortonormal çatı alanı tanımlanabilir:

$$
\begin{aligned}
&e_1 = \frac{\partial}{\partial u}, \; e_2 = \frac{\partial}{\partial v}, \\
&e_3 = -\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\cos(\sqrt{a}u), \frac{1}{\sqrt{b}}\sin(\sqrt{a}u), \frac{1}{\sqrt{a}}\sinh(\sqrt{b}v), \frac{1}{\sqrt{a}}\cosh(\sqrt{b}v)\right), \; e_4 = \mathbf{x_1}.
\end{aligned}
\tag{4.77}
$$

Doğrudan hesaplama ile M yüzeyine ait konneksiyon formları aşağıdaki şekilde bulunur:

$$
\begin{aligned}
\omega_1 = du, \; \omega_2 = dv, \; \omega_{12} = \omega_{34} = 0, \\
\omega_{13} = \mu_0\omega_1, \; \omega_{23} = \frac{1}{\mu_0}\omega_2, \; \omega_{14} = -\omega_1, \; \omega_{24} = -\omega_2.
\end{aligned}
\tag{4.78}
$$

Burada, $\mu_0 = \sqrt{\frac{a}{b}}$ dir.

Örnek 4.8. Benzer şekilde, $\mathbb{S}_1^3$ de Sitter uzayı içinde yer vektörü aşağıdaki gibi verilen Lorentziyen M_1 yüzeyi düşünülsün:

$$
M_1 = \mathbb{S}^1(a) \times \mathbb{S}_1^1(b) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{S}_1^3 \subset \mathbb{E}_1^4 : x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{a}, \; x_3^2 - x_4^2 = \frac{1}{b}\right\}
\tag{4.79}
$$

Burada, a, b, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ eşitliğini sağlayan birbirinden farklı pozitif sabitlerdir. Bu Lorentziyen yüzey için aşağıdaki parametrizasyon göz önününe alınabilir:

$$
\mathbf{x}_2(u,v) = \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\cos(\sqrt{a}u), \frac{1}{\sqrt{a}}\sin(\sqrt{a}u), \frac{1}{\sqrt{b}}\cosh(\sqrt{b}v), \frac{1}{\sqrt{b}}\sinh(\sqrt{b}v)\right). \tag{4.80}
$$

$\mathbb{E}_1^4$ yarı–Euclid uzayı içinde e_1, e_2 vektörleri M_1'e teğet ve e_3, e_4 vektörleri M_1'e normal vektörler olmak üzere M_1 yüzeyi üzerinde

$$
\begin{aligned}
&e_1 = \frac{\partial}{\partial u}, \; e_2 = \frac{\partial}{\partial v}, \\
&e_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{b}}\cos(\sqrt{a}u), -\frac{1}{\sqrt{b}}\sin(\sqrt{a}u), \frac{1}{\sqrt{a}}\cosh(\sqrt{b}v), \frac{1}{\sqrt{a}}\sinh(\sqrt{b}v)\right), \; e_4 = \mathbf{x_2}
\end{aligned}
\tag{4.81}
$$

şeklinde bir ortonormal çatı alanı seçilebilir. Ayrıca, doğrudan hesaplama ile $\mu_0 = \sqrt{\frac{a}{b}}$ olmak üzere, M_1 yüzeyine ait konneksiyon formları aşağıdaki şekilde bulunur:

$$
\begin{aligned}
\omega_1 = du, \; \omega_2 = -dv, \; \omega_{12} = \omega_{34} = 0, \\
\omega_{13} = \mu_0\omega_1, \; \omega_{23} = -\frac{1}{\mu_0}\omega_2, \; \omega_{14} = -\omega_1, \; \omega_{24} = -\omega_2.
\end{aligned}
\tag{4.82}
$$

Teorem 4.12. *$\mathbb{S}^3_1$ yarı–küresinin t indeksli ($t = 0,1$) sıfırdan farklı sabit ortalama eğriliğe sahip tümden ombilik olmayan has bir yüzeyin 2–tipinden yarı–küresel Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul, bu yüzeyin aşağıdaki yüzeylerden birinin açık bir parçası olmasıdır:*

i. $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 1$ *olmak üzere,* $\mathbb{S}^1(a) \times \mathbb{H}^1(-b) \subset \mathbb{S}^3_1$,

ii. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ *olmak üzere,* $\mathbb{S}^1(a) \times \mathbb{S}^1_1(b) \subset \mathbb{S}^3_1$.

Burada, a ve b birbirinden farklı pozitif sabitlerdir.

İspat. M_t, $\mathbb{S}^3_1$ yarı–küresi içinde $\mathbb{S}^1(a) \times \mathbb{H}^1(-b)$ veya $\mathbb{S}^1(a) \times \mathbb{S}^1_1(b)$ yüzeylerinden biri olsun. Örnek 4.7 ve Örnek 4.8'den görüldüğü üzere, bu yüzeyler ayrık sabit asal eğriliklere sahiptir. Yani, sıfırdan farklı sabit ortalama eğriliğe sahip izoparametrik yüzeylerdir. Bu durumda, Sonuç 4.2'den bu yüzeylerin yarı–küresel Gauss tasviri 2–tipindendir.

Teoremin yeter koşulunun ispatı için, M_t, $\mathbb{S}^3_1$ yarı–küresi içinde sıfırdan farklı sabit $\hat{\alpha}$ ortalama eğrilikli 2–tipinden yarı–küresel Gauss tasvire sahip tümden ombilik olmayan has bir yüzey olsun. Dolayısıyla, Teorem 4.11'den M_t yüzeyinin skaler eğriliği sabittir, yani, Gauss eğriliği sabittir. Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği $\hat{\alpha}$'nın sabit olması M_t yüzeyinin asal eğriliklerinin sabit olduğunu söyler. Ayrıca, M_t tümden ombilik olmayan has bir yüzey olduğundan bu asal eğrilikler birbirinden farklıdır. [47] çalışmasında verilen sınıflandırma teoremi kullanılırsa, M_t yüzeyinin teoremde bahsedilen yüzeylerden birinin açık parçasına kongruent olduğu görülür. □

4.3.2.2 Şekil operatörü köşegenleşmeyen yüzeyler

Bu bölümde, $\mathbb{S}^3_1$ de Sitter uzayında sabit ortalama eğriliğe sahip şekil operatörü köşegenleştirilemeyen yüzeyler incelenecek ve bu yüzeylerden yarı–küresel Gauss tasviri 2–tipinden olanlar sınıflandırılacaktır. Bunun için öncelikle, Lorentz uzayındaki lineer operatörlerle ilgili aşağıdaki yardımcı teorem verilecektir.

Yardımcı Teorem 4.5. *[36] A, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ Lorentz iç çarpımına göre simetrik iki boyutlu V uzayında linear bir operatör olsun. V uzayında A operatörünü aşağıdaki formlardan birine dönüştürecek $\langle e_1, e_1 \rangle = -\langle e_2, e_2 \rangle = -1$ ve $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$ şartını sağlayan $\{e_1, e_2\}$ ortonormal bazı vardır:*

i. $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$,

ii. $\beta \neq 0$ *olmak üzere,* $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$,

iii. $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & \alpha+2 \end{pmatrix}$ *veya* $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & \alpha-2 \end{pmatrix}$.

Şekil operatörü yüzeyin teğet uzayı üzerinde tanımlanan lineer bir operatördür. Bu nedenle, yüzeyin şekil operatörü Yardımcı Teorem 4.5'de verilen formlardan birine dönüşür. Görüldüğü üzere, köşegen matris dışında başka formlar da elde edilmektedir. Dolayısıyla, Riemann durumunda görülmeyen bazı örnekler ortaya çıkmıştır. Bunlardan biri, B–scroll yüzeyleridir. Aşağıda, B–scroll yüzeyi ile ilgili detaylar verilecektir.

Örnek 4.9. [48] $\gamma(s)$, $\mathbb{S}^3_1$ de Sitter uzayında ışıksal bir eğri ve $\{A(s), B(s), C(s)\}$ ise $\mathbb{S}^3_1$ uzayında bir Cartan çatısı olsun. Bu durumda, $A(s), B(s), C(s)$ aşağıdaki şartları sağlayan $\gamma(s)$ eğrisi boyunca $\mathbb{S}^3_1$ yarı–küresine teğet olan vektör alanlarıdır:

$$\begin{aligned} \langle A, A\rangle = \langle B, B\rangle = 0, \quad \langle A, B\rangle = -1, \\ \langle A, C\rangle = \langle B, C\rangle = 0, \quad \langle C, C\rangle = 1. \end{aligned} \tag{4.83}$$

Bu Cartan çatısına ait yapı denklemleri

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(s) &= A(s), \\ \dot{B}(s) &= -aC(s), \\ \dot{C}(s) &= -aA(s) - \kappa(s)B(s) \end{aligned} \tag{4.84}$$

şeklindedir. Burada, her s için $\kappa(s) \neq 0$ ve $a \neq 0$ sabittir.

M_1 Lorentziyen yüzeyinden $\mathbb{S}^3_1$ de Sitter uzayına

$$\mathbf{x}(s,t) = \gamma(s) + tB(s)$$

şeklinde tanımlanan daldırma *ışıksal γ eğrisi üzerinde verilen B–scroll yüzeyi* olarak adlandırılır.

M_1 Lorentziyen yüzeyi üzerinde $\{\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_t\}$ teğet vektör alanları olarak alınabilir. Bu vektörler için $\langle \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_s\rangle = a^2t^2$, $\langle \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_t\rangle = -1$ ve $\langle \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t\rangle = 0$ olur. $\mathbb{S}^3_1$ uzayının içindeki birim normal vektörü ise

$$N(s,t) = -atB(s) + C(s)$$

olarak bulunur. $\{\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_t\}$ bazına göre $N(s,t)$ normal vektörü doğrultusundaki şekil operatörü

$$A_N = \begin{pmatrix} a & 0 \\ \kappa(s) & a \end{pmatrix} \tag{4.85}$$

olur ve bu matris ile ilişkili minimal polinom $P(t) = (t-a)^2$ şeklindedir. Görüldüğü üzere, ışıksal bir eğri üzerinde tanımlı B–scroll yüzeyinin şekil operatörü köşegen bir matris değildir. M_1 yüzeyinin ortalama eğriliği a ve Gauss eğriliği $K = 1 + a^2$ olur.

$\{\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_t\}$ vektör alanları kullanılarak M_1 yüzeyine teğet olan e_1, e_2 vektörleri aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

$$e_1 = \frac{\mathbf{x}_s}{|\mathbf{x}_s|}, \;\; e_2 = e_1 + |\mathbf{x}_s|\mathbf{x}_t. \tag{4.86}$$

Bu vektörlerin işaretleri $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = 1$ olur. e_1, e_2 vektörleri M_1 yüzeyinin teğet uzayı için ortonormal bir çatı alanı verir. Bu ortonormal çatı alanına göre (4.85) denklemi ile verilen A_N şekil operatörü

$$A_N = \begin{pmatrix} a - \frac{\kappa(s)}{a^2t^2} & -\frac{\kappa(s)}{a^2t^2} \\ \frac{\kappa(s)}{a^2t^2} & a + \frac{\kappa(s)}{a^2t^2} \end{pmatrix} \tag{4.87}$$

halini alır ve $\|\hat{h}\|^2 = 2a^2$ olarak bulunur. Dolayısıyla, $\mathbb{S}^3_1$ de Sitter uzayı içindeki B–scroll düz olmayan, sabit ortalama eğrilikli bir yüzeydir. Bu durumda, B–scroll yüzeyi sıfırlı 2–tipinden $\tilde{\nu}$ yarı–küresel Gauss tasvirine sahiptir. Bunu göstermek için

$$\tilde{\nu}_p = \frac{1}{a^2+1}(\tilde{\nu} - ae_3 \wedge e_1 \wedge e_2), \tag{4.88}$$

$$\tilde{\nu}_q = \frac{1}{a^2+1}(a^2\tilde{\nu} + ae_3 \wedge e_1 \wedge e_2) \tag{4.89}$$

tasvirleri göz önüne alınırsa, $\tilde{\nu} = \tilde{\nu}_p + \tilde{\nu}_q$ olur. Ayrıca, (2.41) ve (4.22) denklemlerinden $\Delta\tilde{\nu}_p = 0$, $\Delta\tilde{\nu}_q = 2(a^2+1)\tilde{\nu}_q$ ve $i = 1,2$ için $e_i(\tilde{\nu}_p) \neq 0$ olduğu görülür. Dolayısıyla, düz olmayan B–scroll yüzeyi sıfırlı 2–tipinden yarı–küresel Gauss tasvirine sahiptir.

Teorem 4.13. *M_1, $\mathbb{S}^3_1$ yarı–küresinin sıfırdan farklı sabit ortalama eğrilikli ve bir $p \in M_1$ noktasında köşegenleşmeyen şekil operatörüne sahip yönlendirilmiş bir Lorentziyen yüzeyi olsun. M_1 yüzeyi sıfırlı 2–tipinden yarı–küresel Gauss tasvirine sahip olabilmesi için gerek ve yeter koşul, bu yüzeyin ışıksal eğri üzerinde tanımlanan düz olmayan B–scroll yüzeyinin açık bir parçası olmasıdır.*

İspat. M_1, $\mathbb{S}^3_1$ yarı–küresinde sıfırdan farklı sabit $\hat{\alpha}$ ortalama eğriliğine ve $p \in M_1$ noktasında köşegenleşmeyen şekil operatörüne sahip yönlendirilmiş bir Lorentziyen yüzey olsun. $\mathbb{E}^4_1$ uzayının içinde e_1, e_2 vektörleri M_1'e teğet ve e_3, e_4 vektörü M_1'e normal olmak üzere, M_1 yüzeyi üzerinde aşağıdaki şartları sağlayan $\{e_1, e_2, e_3, e_4 = \mathbf{x}\}$ ortonormal çatı alanı seçilebilir:

$$\langle e_1, e_1\rangle = -\langle e_2, e_2\rangle = -1, \;\; \langle e_3, e_3\rangle = \langle e_4, e_4\rangle = 1 \;\text{ ve }\; \langle e_i, e_j\rangle = 0, \;\; i \neq j.$$

M_1 yüzeyinin $\tilde{\nu}$ yarı–küresel Gauss tasviri sıfırlı 2–tipinden olsun. Bu durumda, (4.69) denkleminden $\|\hat{h}\|^2$ sabit olduğu söylenir ve $\lambda_q = \|\hat{h}\|^2 + 2, \;\; 2\|\hat{h}\|^2 - 4\hat{\alpha}^2 = 0$ olur. $\mu = 2\|\hat{h}\|^2 - 4\hat{\alpha}^2$ olarak isimlendirilirse, doğrudan hesaplama ile

$$\mu = (h^3_{11} + h^3_{22})^2 - 4(h^3_{12})^2$$

şeklinde elde edilir. Diğer taraftan, Yardımcı Teorem 4.5'den M_1 yüzeyinin e_3 vektörü doğrultusundaki şekil operatörü aşağıdaki formlardan birine dönüştürülebilir.

1. Durum: $\beta \neq 0$ için $A_3 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ olsun. $\mu = -4\beta^2 \neq 0$ olur. Bu bir çelişkidir.

2. Durum: $A_3 = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & \alpha+2 \end{pmatrix}$ veya $A_3 = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & \alpha-2 \end{pmatrix}$ olsun. $\mu = 0$ olur. $\hat{H} = (\alpha \pm 1)e_3$ ve $\|\hat{h}\|^2 = 2(\alpha \pm 1)^2$ olarak bulunur. $\hat{H}$ ve $\|\hat{h}\|^2$ sıfırdan farklı sabit olduğundan $\alpha \neq \pm 1$ sabittir. Ayrıca, M_1 yüzeyinin skaler eğriliği $S = 2(1 + (\alpha \pm 1)^2)$ olur, yani, Gauss eğriliği K sıfırdan farklı bir sabittir. e_1, e_2 vektörleri kullanılarak

$$\bar{e}_1 = \frac{e_1 + e_2}{\sqrt{2}} \;\text{ ve }\; \bar{e}_2 = \frac{e_1 - e_2}{\sqrt{2}}$$

vektörleri tanımlanabilir ve $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ vektörleri M_1 yüzeyinin teğet uzayı için yarı–ortonormal bir baz belirler. Bu baza göre e_3 vektörü doğrultusundaki A_3 şekil operatörü

$$A_3 = \begin{pmatrix} \alpha+1 & -2 \\ 0 & \alpha+1 \end{pmatrix} \text{ veya } A_3 = \begin{pmatrix} \alpha-1 & 0 \\ 2 & \alpha-1 \end{pmatrix}$$

formlarda yazılabilir. Bu şekil operatörleri ile ilişkili minimal polinomlar, sırasıyla, $P(t) = (t - (\alpha + 1))^2$ ve $P(t) = (t - (\alpha - 1))^2$ şeklindedir. Dolayısıyla, [44] çalışmasındaki Teorem 4.2'den M_1 yüzeyinin herhangi bir noktanın komşuluğunda ışıksal bir eğri üzerinde tanımlanan düz olmayan B–scroll yüzeyinin açık bir parçasına kongruent olduğu söylenir.

Teoremin tersinin ispatı ise, Örnek 4.9'den kolaylıkla görülür. $\square$

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, yarı–Euclid uzayında çeşitli dönme grupları altında değişmez kalan dönel yüzeylerden noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip olanlar ve yarı–kürenin sonlu tipten yarı–küresel Gauss tasvirine sahip yarı–Riemann alt manifoldları üzerine çalışılmıştır.

İlk olarak, yarı–Euclid uzayındaki dönel yüzeylerden noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip olanlar üzerine çalışılmıştır. Bu bölüm kapsamında aşağıdaki problemler incelenmiştir.

Profil eğrisi iki boyutlu zamansal düzlem içinde kalan $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayının belirli bir dönmesi altında değişmez kalan ve çift dönmeli dönel yüzeyler olarak isimlendirilen yüzeyler üzerine çalışılmıştır ve bu yüzeylerden birinci çeşit veya ikinci çeşit noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip olanlar sınıflandırılmıştır. Daha sonra, $\mathbb{E}_1^4$ uzayında iki boyutlu dönme eksenine sahip eliptik, hiperbolik ve parabolik tipten düz uzaysal veya zamansal dönel yüzeylerden noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip olanlar belirlenmiştir. En son olarak, profil eğrisi iki boyutlu düzlem içinde kalan $\mathbb{E}_2^4$ yarı–Euclid uzayının belirli dönüşümleri altında değişmez olan dönel yüzey ailesi üzerine çalışılmıştır. Bu dönel yüzeylerden sıfır ortalama eğrilikli ve yarı–ombilik olanlar sınıflandırılmıştır. Ayrıca bu dönel yüzeylerden Gauss tasviri birinci çeşit veya ikinci çeşit noktasal 1–tipinden olanlar incelenmiştir.

Literatüre bakıldığında çalışmaların noktasal 1–tipinden Gauss tasvirine sahip olanlar üzerine olduğu görülebilir. İleride noktasal 2–tipinden Gauss tasvirinin tanımı verilebilir. Yarı–Euclid uzayının noktasal 2–tipinden Gauss tasvirine sahip olan yüzeyler ile ilgili sonuçlar elde edilebilir. Ayrıca, $\mathbb{E}_2^4$ yarı–Euclid uzayında başka dönme matrislerinin olup olmadığı incelenebilir ve elde edilen dönel yüzeylerden sıfır veya sabit ortalama eğrilikli olanların profil eğrileri ile ilgili karakterizasyon yapılabilir.

Diğer kısımda, sonlu tipten yarı–küresel Gauss tasvirine sahip yarı–küre içindeki yarı–Riemann alt manifoldları incelenmiştir. Bu bölüm kapsamında incelenen problemler aşağıdaki şekildedir:

İlk olarak, yarı–küresel Gauss tasviri harmonik olan yarı–kürenin yarı–Riemann alt manifoldları için karakterizasyon teoremi verilmiştir. İkinci olarak, yarı–küresel Gauss tasvirinin spektral açılımda sabit terimin sıfır veya sıfırdan farklı olup olmamasına göre 1–tipinden yarı–küresel Gauss tasvirine sahip yarı–kürenin yarı–Riemann alt manifoldları çalışılmıştır. Son olarak ise, yarı–küresel Gauss tasviri 2–tipinden olan yarı–Riemann alt manifoldları incelenmiştir. Bu problem kapsamında ise, indeksi 1 ve 2 olan 4–boyutlu yarı küre içindeki uzaysal veya Lorentziyen yüzeylerden 2–tipinden yarı–küresel Gauss tasvirine sahip olanlar için karakterizasyon ve sınıflandırma teoremleri elde edilmiştir. Ayrıca, karşıt boyutun bir olma, yani, hiperyüzey durumu üzerine de çalışılmıştır. Yarı–Riemann hiperyüzeyleri için elde edilen sonuçlar şekil operatörünün köşegenleşip köşegenleşmemesine göre ayrı ayrı incelenmiştir. $\mathbb{S}^3_1$ de Sitter uzayı içindeki B–scroll yüzeyinin sıfırlı 2–tipinden yarı–küresel Gauss tasvirine sahip olduğu gösterilmiştir.

İleride, spektral açılımında sabit terimi sıfırdan farklı 2–tipinden yarı–küresel Gauss tasvirine sahip olan yarı–kürenin yarı–Riemann alt manifoldları için sınıflandırma ve karakterizasyon yapılabilir. Yarı–kürenin yarı–Riemann alt manifoldlarından 3–tipinden yarı–küresel Gauss tasvirine sahip olanlar üzerine çalışılabilir. Ayrıca, bir yarı–Riemann alt manifoldunun sonlu tipten olması ile sonlu tipten yarı–küresel Gauss tasvirine sahip olması arasındaki ilişki incelenebilir.

KAYNAKLAR

[1] **Chen, B.Y.**, (1984). Total mean curvature and submanifolds of finite type, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, USA.

[2] **Chen, B.Y.**, (2015). Total mean curvature and submanifolds of finite type, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, USA, 2 sürüm.

[3] **Chen, B.Y.** (1996). A report on submanifolds of finite type, *Soochow J. Math.*, *22*, 117–337.

[4] **Chen, B.Y.** (2014). Some open problems and conjectures on submanifolds of finite type: recent development, *Tamkang J. Math.*, *45*, 87–108.

[5] **Chen, B.Y.**, **Morvan, J.M. ve Nore, T.** (1986). Energy, tension and finite type maps, *Kodai Math. J.*, *9*, 406–418.

[6] **Chen, B.Y.** (1985). Finite type submanifolds in pseudo–Euclidean space and its applications, *Kodai Math. J.*, *8*, 358–374.

[7] **Chen, B.Y.** (1986). Finite–type pseudo–Riemannian submanifolds, *Tamkang J. Math.*, *17*, 137–151.

[8] **Chen, B.Y. ve Li, S.** (1998). Spherical hypersurfaces with 2–type Gauss map, *Beiträge Algebra Geom.*, *39*(1), 169–179.

[9] **Alias, L.J.**, **Ferrandez, A.**, **Lucas, P. ve Merono, M.A.** (1998). On the Gauss map of B–scrolls, *Tsukuba J. Math.*, *22*(2), 371–377.

[10] **Choi, S.M.** (1995). On the Gauss Map of ruled surfaces in a 3–dimensional Minkowski space, *Tsukuba J. Math.*, *19*(2), 285–304.

[11] **Chen, B.Y. ve Piccinni, P.** (1987). Submanifolds with finite type Gauss map, *Bull. Austral. Math. Soc.*, *35*(2), 161–186.

[12] **Kim, Y.H. ve Yoon, D.W.** (2004). Classification of rotation surfaces in pseudo–Euclidean space, *J. Korean Math. Soc.*, *41*(2), 379–396.

[13] **Obata, M.** (1968). The Gauss map of immersions of Riemannian manifolds in spaces of constant curvature, *J. Differential Geom.*, *2*, 217–223.

[14] **Houh, C.S.** (1971). Some immersions in pseudo–Riemannian manifolds of constant curvature, *Kodai Math. Sem. Rep.*, *23*, 255–261.

[15] **Ishihara, T.** (1982). The harmonic Gauss map in a generalized sense, *J. London Math. Soc.*, *26*(2), 104–112.

[16] **Chen, B.Y. ve Lue, H.S.** (2007). Spherical submanifolds with finite type spherical Gauss map, *J. Korean Math. Soc.*, *44*, 407–442.

[17] **Bektaş, B. ve Dursun, U.** (2016). On spherical submanifolds with finite type spherical Gauss map, *Adv. Geom.*, *16*, 243–251.

[18] **Arslan, K. ve Milousheva, V.** (2016). Meridian surfaces of elliptic or hyperbolic type with pointwise 1-type Gauss map in Minkowski 4-space, *Taiwanese J. Math.*, *20*(2), 311–332.

[19] **Turgay, N.C.** (2016). Lorentzian submanifolds in semi–Euclidean spaces with pointwise 1–type Gauss map, *Geometry, integrability and quantization XVII*, *20*(2), 344—359.

[20] **Milousheva, V. ve Turgay, N.C.** (2016). Quasi–minimal Lorentz surfaces with pointwise 1–type Gauss map in pseudo–Euclidean 4–space, *J. Geom. Phys.*, *106*, 171–183.

[21] **Chen, B.Y.**, **Choi, M. ve Kim, Y.H.** (2005). Surfaces of revolution with pointwise 1–type Gauss map, *J. Korean Math. Soc.*, *42*, 447–455.

[22] **Kim, Y.H. ve Yoon, D.W.** (2000). Ruled surfaces with pointwise 1–type Gauss map, *J. Geom. Phys.*, *34*(3), 191–205.

[23] **Dursun, U.** (2009). Hypersurfaces with pointwise 1–type Gauss map in Lorentz–Minkowski space, *Proc. Est. Acad. Sci.*, *58*(3), 146–161.

[24] **Aksoyak, F.K. ve Yaylı, Y.** (2015). General rotational surfaces with pointwise 1–type Gauss map in pseudo–Euclidean space $\mathbb{E}^4_2$, *Indian J. Pure Appl. Math.*, *46*(1), 107–118.

[25] **Choi, M. ve Yoon, D.W.** (2016). Surfaces of revolution with pointwise 1–type Gauss map in pseudo–Galilean space, *Bull. Korean Math. Soc.*, *53*(2), 519–530.

[26] **Chen, B.Y.**, (2011). Pseudo-Riemannian geometry, δ-invariants and applications, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, USA.

[27] **O'Neill, B.**, (1983). Semi–Riemannian geometry with applications to relativity, Academic Press, London.

[28] **Yano, K. ve Kon, M.**, (1984). Structures on manifold, World Scientific, Singapore.

[29] **Erbacher, J.** (1971). Reduction of the codimension of an isometric immersion, *J. Differential Geom.*, *5*, 333–340.

[30] **Dursun, U. ve Turgay, N.C** (2012). On spacelike surfaces in Minkowski 4–space with pointwise 1–type Gauss map of the second kind, *Balkan J. Geom. Appl.*, *17*(2), 34–45.

[31] **Chen, B.Y. ve Petrovic, M.** (1991). On spectral decomposition of immersions of finite type, *Bull. Austral. Math. Soc.*, *44*, 117–129.

[32] **Dursun, U. ve Yeğin, R.** (2015). Hyperbolic submanifolds with finite type hyperbolic Gauss map, *Int. J. Math.*, *26*, Article no:1550014 (18 pages).

[33] **Dursun, U.** (2010). Hypersurfaces of hyperbolic space with 1–type Gauss map, *The International Conference of Differential Geometry and Dynamical Systems(DGDS-2010)*, *18*, 47–55.

[34] **Moore, C.L.E.** (1919). Surfaces of rotation in a space of four dimensions, *Ann. of Math.*, *21*(2), 81–93.

[35] **Dursun, U.** (2015). On spacelike rotational surfaces with pointwise 1–type Gauss map, *Bull. Korean Math. Soc.*, *52*(1), 301–312.

[36] **Chen, B.Y. ve Van der Veken, J.** (2009). Complete classification of parallel surfaces in 4–dimensional Lorentzian space forms, *Tohoku Math. J.*, *61*, 1–40.

[37] **Turgay, N.C.** (2015). Some classifications of Lorentz surfaces with finite type Gauss map in Minkowski 4–space, *J. Aust. Math. Soc.*, *99*, 415–427.

[38] **Ki, U.H.**, **Kim, D.S.**, **Kim, Y.H. ve Roh, Y.M.** (2009). Surfaces of revolution with pointwise 1–type Gauss map in Minkowski 3–space, *Taiwanese J. Math.*, *13*, 317–338.

[39] **HuiLi, L. ve GuiLi, L.** (1994). Rotation surfaces with constant mean curvature in 4–dimensional pseudo–Euclidean space, *Kyushu J. Math.*, *48*, 35–42.

[40] **Chen, B.Y.** (2011). Classification of minimal Lorentz surfaces in indefinite space forms with arbitrary codimension and arbitrary index, *Publ. Math. Debrecen*, *78*, 485–503.

[41] **Gorokh, V.P.** (1989). Minimal surfaces of constant Gaussian curvature in a pseudo–Riemannian sphere, *Ukrainskii Geometricheskii Sbornik*, *32*, 27–34.

[42] **Goemans, W. ve Van de Woestyne, I.** (2011). On flat tensor product surfaces, *Riemannian Geometry and Applications-Proceedings RIGA 2011*.

[43] **Lawson, H.B.** (1969). Local rigidity theorems for minimal hypersurfaces, *Ann. of Math.*, *89*, 187–197.

[44] **Alias, L.J.**, **Ferrandez, A. ve Lucas, P.** (1995). Hypersurfaces in the non–flat Lorentzian space forms with a characteristic eigenvector field, *J. Geom.*, *52*, 10–24.

[45] **Chen, B.Y. ve Van der Veken, J.** (2010). Classification of marginally trapped surfaces with parallel mean curvature in Lorentzian space forms, *Houston J. Math.*, *36*, 1–29.

[46] **Dursun, U. ve Turgay, N.C.** (2016). Classification of minimal Lorentzian surfaces in $\mathbb{S}^4_2(1)$ with constant Gaussian and normal curvatures, *Taiwanese J. Math.*, *20*(6), 1295–1311.

[47] **Abe, N.**, **Koike, N. ve Yamaguchi, S.** (1987). Congruence theorems for proper semi Riemannian hypersurfaces in a real space form, *Yokohama Math. J.*, *35*, 123–136.

[48] **Kim, D.S. ve Kim, Y.H.** (2003). B–scrolls with non–diagonalizable shape operators, *Rocky Mountain J. Math.*, *33*, 175–190.

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Burcu Bektaş

Doğum Tarihi ve Yeri : Kadıköy, 13/06/1988

E-Posta : bektasbu@itu.edu.tr

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2010, İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen–Edebiyat Fakültesi, Matematik Mühendisliği Bölümü

- **Yüksek Lisans** : 2012, İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Mühendisliği Bölümü

MESLEKİ DENEYİM :

- 2011–..., İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen–Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Araştırma Görevlisi

- 01.11.2015–01.05.2016, KU Leuven, Geometri Ana bilim dalı, Araştırmacı (TÜBİTAK 2214A Doktora Sırası Araştırma Burs Programı Kapsamında)

YAYIN LİSTESİ/SUNUMLAR

- **Bektaş, B.**, Dursun, U., 2016. Submanifolds with Finite Type Spherical Gauss Map in Sphere. *14th International Geometry Symposium*, May 25-28, 2016 Denizli, Turkey.

- **Bektaş, B.**, Dursun, U., 2016. On Spherical Submanifolds with Finite Type Spherical Gauss Map, *Advance in Geometry,* 16, 243-251.

- **Bektaş, B.**, Moruz, M., Van der Veken, J., Vrancken, L., 2017. Lagrangian Submanifolds of the Nearly Kaehler $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ from Minimal Surfaces in $\mathbb{S}^3$, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A,* kabul edildi.

TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR/SUNUMLAR

- **Bektaş, B.**, Dursun, U., Canfes, E.Ö., 2014. On Timelike Rotational Surfaces in Minkowski Space $\mathbb{E}^4_1$ with Pointwise 1–Type Gauss Map. *XVIII Geometrical Seminar*, May 25–28, 2014 Vranjacka Banja, Serbia.

- **Bektaş, B.**, Canfes, E.Ö., Dursun, U., 2014. Minimal and Pseudo–Umbilical Rotational Surface in the Pseudo–Euclidean Space $\mathbb{E}^4_2$. *International Workshop on Finite Type Submanifolds (IWFTS'14)*, September 3–4, 2014 Istanbul, Turkey.

- **Bektaş B.**, Canfes, E.Ö., Dursun, U., 2015. Surfaces and Hypersurfaces with Finite Type Pseudo–Spherical Gauss Map in Pseudo–Spheres. *International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics (ICRAPAM 2015)*, June 3–6, 2015 Istanbul, Turkey.

- **Bektaş, B.**, Canfes, E.Ö., Dursun, U., 2015. Surfaces with 1–Type Pseudo–Spherical Gauss Map in Pseudo–Spheres. *13. Geometri Sempozyumu*, July 27–30, 2015 Istanbul, Turkey.

- **Bektaş, B.**, Van der Veken, J., Vrancken, L., 2016. Classification of Surfaces in a Pseudo–Sphere with 1–Type Pseudo–Spherical Gauss Map. *International Workshop on Finite Type Submanifolds (IWTS'16)*, June 2–6, 2016 Istanbul, Turkey.

- Dursun, U., **Bektaş, B.**, 2014. Spacelike Rotational Surfaces of Elliptic, Hyperbolic and Parabolic Types in Minkowski Space $\mathbb{E}^4_1$ with Pointwise 1–Type Gauss Map, *Mathematical Physics, Analysis and Geometry,* 17, 247–263.

- **Bektaş, B.**, Dursun, U., 2015. Timelike Rotational Surfaces of Elliptic, Hyperbolic and Parabolic Types in Minkowski Space $\mathbb{E}^4_1$ with Pointwise 1–Type Gauss Map, *Filomat,* 3, 381–392.

- **Bektaş, B.**, Canfes, E. Ö., Dursun, U., 2016. On Rotational Surfaces in Pseudo–Euclidean Space $\mathbb{E}^4_t$ with Pointwise 1–Type Gauss Map, *Acta Universitatis Apulensis,* 45, 43–59.

- **Bektaş, B.**, Canfes, E. Ö., Dursun, U., 2017. Pseudo–Spherical Submanifolds with 1–Type Pseudo–Spherical Gauss Map, *Results in Mathematics,* 71, 867–887.

- **Bektaş, B.**, Van der Veken, J., Vrancken, L., 2017, Surface in a Pseudo-–Sphere with Harmonic or 1–Type Pseudo-–Spherical Gauss map, *Annals of Global Analysis and Geometry,* 52, 45–55.

- **Bektaş, B.**, Canfes, E. Ö., Dursun, U., 2017, Classification of Surfaces in a Pseudo–Sphere with 2–Type Pseudo–Spherical Gauss Map, *Mathematische Nachrichten*, https://doi.org/10.1002/mana.201600498.

- **Bektaş, B.**, Canfes, E. Ö., Dursun, U., 2017, On Pseudo–Umbilical Rotational Surface with Pointwise 1–Type Gauss Map in $\mathbb{E}^4_2$, *Proceedings Book of International Workshop on Theory of Submanifolds*, DOI:10.24064/iwts2016.2017.7.