İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HETEROJEN BİR TABAKADA NONLİNEER SH DALGALARI

DOKTORA TEZİ

Dilek DEMİRKUŞ

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Yüksek Lisans ve Doktora Programı

ŞUBAT 2017

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HETEROJEN BİR TABAKADA NONLİNEER SH DALGALARI

DOKTORA TEZİ

Dilek DEMİRKUŞ
(509102002)

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Yüksek Lisans ve Doktora Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mevlüt TEYMÜR

ŞUBAT 2017

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 509102002 numaralı Doktora Öğrencisi Dilek DEMİRKUŞ, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı "HETEROJEN BİR TABAKADA NONLİNEER SH DALGALARI" başlıklı tezini aşağıdaki imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Mevlüt TEYMÜR** ....
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Doç. Dr. Semra AHMETOLAN** ....
İstanbul Teknik Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Halil İbrahim VAR ....
Marmara Üniversitesi

Prof. Dr. Kamil ORUÇOĞLU ....
İstanbul Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Nazmiye YAHNİOĞLU ....
Yıldız Teknik Üniversitesi

Teslim Tarihi : **27 Aralık 2016**
Savunma Tarihi : **03 Şubat 2017**

Eğitim-öğretim hayatım boyunca üzerimde emeği olan babama, anneme, eşime ve özel çocuğum Melik'e,

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasında emeği olan değerli danışman hocam Prof. Dr. Mevlüt Teymür'e içten dileklerimle teşekkür ederim. Doktora öğrenimim sırasında beni maddi olarak destekleyerek asistanlık bursunu bana layık gören "Vehbi Koç Vakfı" ile lisans, yüksek lisans ve doktora öğrenimim süresince üzerimde emeği olan bütün hocalarıma da bu vesileyle teşekkür etmek isterim. Ayrıca bu çalışmayı yürütürken beni motive eden ve eleştirileriyle mesleki gelişimime olumlu katkıları olan değerli tez izleme jüri üyelerim Doç. Dr. Semra Ahmetolan ile Yrd. Doç. Dr. Halil İbrahim Var hocalarıma ve akademik anlamda dostluğunu her zaman hissettiğim Öğr. Gör. Dr. Ali Demirci hocama teşekkürü bir borç bilirim.

Yapılan bu akademik çalışmanın başka akademik çalışmalara destek olmasını temenni ederim.

Aralık 2016 Dilek DEMİRKUŞ

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ ... **vii**
İÇİNDEKİLER ... **ix**
KISALTMALAR ... **xi**
ŞEKİL LİSTESİ ... **xiii**
ÖZET ... **xvii**
SUMMARY ... **xix**
1. GİRİŞ ... **1**
1.1 Giriş ... 1
1.2 Tezin Anlam ve Önemi ... 3
2. HOMOJEN NONLİNEER HİPERELASTİK BİR TABAKADA SH DALGALARININ YAYILMASI ... **5**
2.1 Giriş ... 5
2.2 Problemin Tanımı ve Temel Denklemler ... 5
2.3 Lineer Dalgaların Yayılması ve Dispersiyon Bağıntıları ... 8
2.3.1 $c > c_{0_T}$ durumu ... 9
2.3.2 $c < c_{0_T}$ durumu ... 9
2.3.3 Dispersiyon bağıntısı ... 10
2.4 Homojen Bir Ortamda Nonlineer SH Dalgaları ... 13
2.4.1 Giriş ... 13
2.4.2 $c > c_{0_T}$ için asimptotik analiz ... 13
3. HETEROJEN NONLİNEER HİPERELASTİK BİR TABAKADA SH DALGALARININ YAYILMASI ... **25**
3.1 Giriş ... 25
3.2 Problemin Tanımı ve Temel Denklemler ... 25
3.3 Lineer Dalgaların Yayılması ve Dispersiyon Bağıntıları ... 28
3.3.1 $c > c_{0_T}\sqrt{1+(\beta^2/4k^2)}$ durumu ... 30
3.3.2 $c < c_{0_T}\sqrt{1+(\beta^2/4k^2)}$ durumu ... 31
3.3.3 Dispersiyon bağıntısı ... 32
3.4 Heterojen Bir Ortamda Nonlineer SH Dalgaları ... 35
3.4.1 Giriş ... 35
3.4.2 $c > c_{0_T}\sqrt{1+(\beta^2/4k^2\ell^2)}$ için asimptotik analiz ... 35
4. SONUÇLAR ... **57**
4.1 NLS Denkleminin Bazı Çözümleri ... 57
4.2 Sayısal Sonuçlar ve Tartışma ... 60
KAYNAKLAR ... **65**
EKLER ... **69**
EK A Heterojen Hiperelastik Ortamlarda Genelleştirilmiş Kayma Hareketi ... 71

EK B Şekiller.. 83
ÖZGEÇMİŞ 102

KISALTMALAR

NLS **:** Nonlinear Schrödinger
SH **:** Shear Horizontal

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1 : Homojen nonlineer hiperelastik bir tabaka..................................... 5
Şekil 3.1 : Heterojen nonlineer hiperelastik bir tabaka.................................... 25
Şekil B.1 : Dispersiyon bağıntısı (2.40)'ın ilk altı dalı veya (3.47)'nin ilk altı dalı ve $B \to 0.0$ için C'nin K'ya göre değişimi. 83
Şekil B.2 : Dispersiyon bağıntısı (2.40)'ın ilk altı dalı veya (3.47)'nin ilk altı dalı ve $B \to 0.0$ için V_G'nin K'ya göre değişimi. 83
Şekil B.3 : Dispersiyon bağıntısı (3.47)'nin ilk altı dalı ve $B = 0.5$ için C'nin K'ya göre değişimi.. 84
Şekil B.4 : Dispersiyon bağıntısı (3.47)'nin ilk altı dalı ve $B = 0.5$ için V_G'nin K'ya göre değişimi.. 84
Şekil B.5 : Dispersiyon bağıntısı (3.47)'nin ilk altı dalı ve $B = 1.0$ için C'nin K'ya göre değişimi.. 85
Şekil B.6 : Dispersiyon bağıntısı (3.47)'nin ilk altı dalı ve $B = 1.0$ için V_G'nin K'ya göre değişimi.. 85
Şekil B.7 : Dispersiyon bağıntısı (3.47)'nin ilk altı dalı ve $B = 1.5$ için C'nin K'ya göre değişimi.. 86
Şekil B.8 : Dispersiyon bağıntısı (3.47)'nin ilk altı dalı ve $B = 1.5$ için V_G'nin K'ya göre değişimi.. 86
Şekil B.9 : Dispersiyon bağıntısı (3.47)'nin ilk altı dalı ve $B = 10$ için C'nin K'ya göre değişimi.. 87
Şekil B.10 : Dispersiyon bağıntısı (3.47)'nin ilk altı dalı ve $B = 10$ için V_G'nin K'ya göre değişimi.. 87
Şekil B.11 : Dispersiyon bağıntısı (3.47)'nin ilk altı dalı ve $B = 20$ için C'nin K'ya göre değişimi.. 88
Şekil B.12 : Dispersiyon bağıntısı (3.47)'nin ilk altı dalı ve $B = 20$ için V_G'nin K'ya göre değişimi.. 88
Şekil B.13 : Dispersiyon bağıntısı (2.40)'ın ilk beş dalı veya (3.47)'nin ilk beş dalı ve $B \to 0.0$ için Γ'nin K'ya göre değişimi. 89
Şekil B.14 : Dispersiyon bağıntısı (2.40)'ın ilk iki dalı veya (3.47)'nin ilk iki dalı ve $B \to 0.0$ için Γ'nin K'ya göre değişimi. 89
Şekil B.15 : Dispersiyon bağıntısı (2.40)'ın ilk iki dalı, sertleşen malzeme modeli veya (3.47)'nin ilk iki dalı, $\Lambda \to 0.0$, $B \to 0.0$ ve sertleşen malzeme modeli için Δ'nin K'ya göre değişimi. 90
Şekil B.16 : Dispersiyon bağıntısı (2.40)'ın ilk iki dalı, yumuşayan malzeme modeli veya (3.47)'nin ilk iki dalı, $\Lambda \to 0.0$, $B \to 0.0$ ve yumuşayan malzeme modeli için Δ'nin K'ya göre değişimi............. 90

Şekil B.17 : Dispersiyon bağıntısı (2.40)'ın ilk iki dalı, sertleşen malzeme modeli veya (3.47)'nin ilk iki dalı, $\Lambda \to 0.0$, $B \to 0.0$ ve sertleşen malzeme modeli için $\Gamma\Delta$'nin K'ya göre değişimi. 91
Şekil B.18 : Dispersiyon bağıntısı (2.40)'ın ilk iki dalı, yumuşayan malzeme modeli veya (3.47)'nin ilk iki dalı, $\Lambda \to 0.0$, $B \to 0.0$ ve yumuşayan malzeme modeli için $\Gamma\Delta$'nin K'ya göre değişimi. 91
Şekil B.19 : Dispersiyon bağıntısı (2.40)'ın birinci dalı için hesaplanan bright soliton çözümün, tabakadaki $Z = 0$ düzlemine karşı gelen deformasyon alanı. 92
Şekil B.20 : Dispersiyon bağıntısı (2.40)'ın ikinci dalı için hesaplanan bright soliton çözümün, tabakadaki $Z = 0$ düzlemine karşı gelen deformasyon alanı. 92
Şekil B.21 : Dispersiyon bağıntısı (2.40)'ın birinci dalı için hesaplanan dark soliton çözümün, tabakadaki $Z = 0$ düzlemine karşı gelen deformasyon alanı. 93
Şekil B.22 : Dispersiyon bağıntısı (2.40)'ın ikinci dalı için hesaplanan dark soliton çözümün, tabakadaki $Z = 0$ düzlemine karşı gelen deformasyon alanı. 93
Şekil B.23 : Dispersiyon bağıntısı (3.47)'nin ilk beş dalı ve $B = 0.5$ için Γ'nın K'ya göre değişimi. 94
Şekil B.24 : Dispersiyon bağıntısı (3.47)'nin ilk beş dalı ve $B = 1.5$ için Γ'nın K'ya göre değişimi. 94
Şekil B.25 : Dispersiyon bağıntısı (3.47)'nin ilk beş dalı ve $B = 10$ için Γ'nın K'ya göre değişimi. 95
Şekil B.26 : Dispersiyon bağıntısı (3.47)'nin ilk beş dalı ve $B = 20$ için Γ'nın K'ya göre değişimi. 95
Şekil B.27 : Dispersiyon bağıntısı (3.47)'nin ikinci dalı ve $B \to 0.0, B = 0.5, 1.0, 1.5$ için, Γ'nın K'ya göre değişimi. 96
Şekil B.28 : Dispersiyon bağıntısı (3.47)'nin ikinci dalı ve $B = 10, 20, 30$ için, Γ'nın K'ya göre değişimi. 96
Şekil B.29 : Dispersiyon bağıntısı (3.47)'nin ikinci dalı, $B \to 0.0, B \to 0.5$, $B = 1.0, 1.5$; $\Lambda = 0.5$ ve sertleşen malzeme modeli için, Δ'nın K'ya göre değişimi. 97
Şekil B.30 : Dispersiyon bağıntısı (3.47)'nin ikinci dalı, $B \to 0.0, B \to 0.5$, $B = 1.0, 1.5$; $\Lambda = 0.5$ ve yumuşayan malzeme modeli için, Δ'nın K'ya göre değişimi. 97
Şekil B.31 : Dispersiyon bağıntısı (3.47)'nin ikinci dalı, $B \to 0.0, B \to 1.0$, $B = 0.5, 1.5$; $\Lambda = 1.0$ ve sertleşen malzeme modeli için, Δ'nın K'ya göre değişimi. 98
Şekil B.32 : Dispersiyon bağıntısı (3.47)'nin ikinci dalı, $B \to 0.0, B \to 1.0$, $B = 0.5, 1.5$; $\Lambda = 1.0$ ve yumuşayan malzeme modeli için, Δ'nın K'ya göre değişimi. 98
Şekil B.33 : Dispersiyon bağıntısı (3.47)'nin ikinci dalı, $B \to 0.0, B \to 0.5$, $B = 1.0, 1.5$; $\Lambda = 0.5$ ve sertleşen malzeme modeli için, $\Gamma\Delta$'nın K'ya göre değişimi. 99

Şekil B.34 : Dispersiyon bağıntısı (3.47)'nin ikinci dalı, $B \to 0.0, B \to 0.5$, $B = 1.0, 1.5$; $\Lambda = 0.5$ ve yumuşayan malzeme modeli için, $\Gamma\Delta$'nın K'ya göre değişimi. 99
Şekil B.35 : Dispersiyon bağıntısı (3.47)'nin ikinci dalı, $B \to 0.0, B \to 1.0$, $B = 0.5, 1.5$; $\Lambda = 1.0$ ve sertleşen malzeme modeli için, $\Gamma\Delta$'nın K'ya göre değişimi. 100
Şekil B.36 : Dispersiyon bağıntısı (3.47)'nin ikinci dalı, $B \to 0.0, B \to 1.0$, $B = 0.5, 1.5$; $\Lambda = 1.0$ ve yumuşayan malzeme modeli için, $\Gamma\Delta$'nın K'ya göre değişimi. 100

HETEROJEN BİR TABAKADA NONLİNEER SH DALGALARI

ÖZET

Bu çalışmada, düzgün kalınlıklı, izotrop, hiperelastik malzemeden oluşan ve rijit bir cisim üzerine oturtulmuş bir tabakada küçük ama sonlu genlikli nonlineer SH dalgalarının yayılması ile ilgili bazı problemler asimptotik pertürbasyon yöntemlerinden biri olan çoklu ölçekler yöntemi kullanılarak incelenmiştir. Tabakayı oluşturan malzeme ilk problemde homojen, ikinci problemde heterojen olarak alınmıştır. Bu tez çalışması dört bölüm ve iki ekten oluşmaktadır.

Tezin ilk bölümü giriş niteliğindedir. Bu bölümde öncelikle elastik dalgalarla ilgili bir literatür taramasına yer verilmiştir. Sonrasında tezin anlam ve öneminden bahsedilmiştir. İkinci bölümde; düzgün kalınlıklı, homojen, izotrop, hiperelastik malzemeden oluşan ve rijit bir cisim üzerine oturtulmuş bir tabakada nonlineer SH dalgalarının yayılım problemi ele alınmıştır. Problem çözülürken çoklu ölçekler yöntemi kullanılmıştır. Sonuç olarak, nonlineer SH dalgalarının self modülasyonunun asimptotik olarak bir NLS denklemi ile karakterize edilebileceği gösterilmiştir.

Üçüncü bölümde; düzgün kalınlıklı, heterojen, izotrop, hiperelastik malzemeden oluşan ve rijit bir cisim üzerine oturtulmuş bir tabakada nonlineer SH dalgalarının yayılım problemi ele alınmıştır. Heterojen malzemeden oluşan bu tabakada, heterojenlik sınırlara paralel herhangi bir doğrultuda düzgün ancak derinliğe bağlıdır. Yani heterojenlik dalga yayılımına dik tabaka derinliği doğrultusundadır. Problem çözülürken yine çoklu ölçekler yöntemi kullanılmıştır. Sonuç olarak, nonlineer SH dalgalarının self modülasyonunun asimptotik olarak bir NLS denklemi ile karakterize edilebileceği gösterilmiştir.

Tezin son bölümünde, NLS denkleminin literatürden bilinen bazı çözümlerine ve çözümlerin kararlılığına yer verilmiştir. Bilinen bu çözümlerden yararlanılarak elde edilen sonuçlar irdelenmiştir. Nümerik işlem yapılarak grafikler verilmiştir ve yorumlanmıştır.

Sonuç olarak, çözülen her iki problemde de nonlineer SH dalgalarının self modülasyonunun asimptotik olarak bir NLS denklemi ile karakterize edilebileceği gösterilmiştir. NLS denkleminin bazı çözümleri literatürde bilinmektedir. Bilinen bu bilgiler ışığında ve bazı kısıtlar altında her iki problem için de şu sonuçlar söz konusudur: Ortam kaymada yumuşayan bir davranış gösteriyorsa, bright soliton çözümler vardır; ortam kaymada sertleşen bir davranış gösteriyorsa, dark soliton çözümler vardır.

NONLINEAR SH WAVES IN A HETEROGENEOUS LAYER

SUMMARY

This thesis mainly consists of two parts. In the first part the propagation of nonlinear SH waves in an elastic layer of uniform thickness $h > 0$, lying on a rigid semi-infinite substratum is examined. It is assumed that, in the rectangular reference state (X,Y,Z) the nonlinear elastic layer and the rigid substratum occupy the region between the planes $Y = 0$ and $Y = h$ and the half space $Y < 0$, respectively. It is also assumed that the boundary $Y = h$ is free of traction and the displacement is zero at the the rigid boundary $Y = 0$. Then, an SH wave described by

$$x = X,\ y = Y,\ z = Z + u(X,Y,t) \tag{1}$$

is assumed to propagate along the X-axis. In the work the constituent material is assumed to be homogeneous, isotropic and hyper-elastic. Thus, the strain energy function Σ is an isotropic function of the invariants of the Lagrangian strain tensor $\mathbf{E}$. It is assumed that the generalized shear motion takes place in a material for which the Cauchy stress components t_{11}, t_{12} and t_{22} are identically zero as in the case of linear problem. As a consequence of this assumption the anti-plane motion (1) can exist in the absence of body forces acting in the (X,Y)-plane. Then the following approximate governing equation and boundary conditions involving terms not higher than the third degree in the deformation gradients are written;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_{0_T}^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}\right) = n_{0_T}\left\{\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial u}{\partial X}\mathscr{K}(u)\right) + \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial u}{\partial Y}\mathscr{K}(u)\right)\right\} \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial Y} = 0 \quad \text{on} \quad Y = h; \quad \text{and} \quad u = 0 \quad \text{on} \quad Y = 0. \tag{3}$$

Here, c_{0_T} is the linear shear wave velocity and n_{0_T} is the nonlinear material constant. When $n_{0_T} > 0$, the medium is hardening in shear, but if $n_{0_T} < 0$, then it is softening. $\mathscr{K}$ is defined as $\mathscr{K}(u) = (\partial u/\partial X)^2 + (\partial u/\partial Y)^2$. Then, to investigate how the slowly varying amplitude of a weakly nonlinear SH wave is modulated by nonlinear self interaction, the method of multiple scales is employed. For this purpose new independent variables

$$x_i = \varepsilon^i X, \quad t_i = \varepsilon^i t, \quad y = Y, \quad i = 0,1,2. \tag{4}$$

are introduced instead of X,Y,t. Here $\varepsilon > 0$ is a small parameter which measures the weakness of the nonlinearity; x_0, t_0, y are fast variables describing the fast variations in the problem while x_1, x_2, t_1, t_2 are slow variables describing the slow variations. Then u

is considered to be a function of these new variables and it is expanded in the following asymptotic series in ε;

$$u \sim \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n(x_0, x_1, x_2, y, t_0, t_1, t_2). \tag{5}$$

Then by employing (4) and the asymptotic expansion (5) in the governing equation (2) and the boundary conditions (3) of the problem, a hierarchy of problems to determine successively u_n's are obtained. These problems, at each step, are linear and the first order problem is simply the linear wave problem. Then, since the harmonic resonance phenomena is excluded in the analysis, the displacement of the first order problem is found to be

$$u_1 = 2i\sin(kpy)\mathscr{A}_1 e^{i\phi} + \text{c.c.}, \qquad c > c_{0_T} \tag{6}$$

where $p = [(c^2/c_{0_T}^2) - 1]^{1/2}$, $\phi = kx_0 - \omega t_0$, and also c.c. denotes the complex conjugate of the preceding terms, $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_1(x_1, x_2, t_1, t_2)$ is a complex function representing the first order slowly varying amplitude of the wave modulation. To find the first order solutions completely, $\mathscr{A}_1$ has to be determined. This has been done by examining the higher order perturbation problems. A compatibility condition in the second order perturbation problem shows that $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_1(x_1 - V_g t_1, x_2, t_2)$ where V_g is the group velocity of the waves. Then a compatibility condition in the third order problem yields the following NLS equation for $\mathscr{A} = k\mathscr{A}_1$

$$i\frac{\partial \mathscr{A}}{\partial \tau} + \Gamma\frac{\partial^2 \mathscr{A}}{\partial \xi^2} + \Delta|\mathscr{A}|^2\mathscr{A} = 0 \tag{7}$$

where $\tau = \omega t_2$, $\xi = k(x_1 - V_g t_1)$, and $\Gamma = (k^2/2\omega)(d^2\omega/dk^2)$. The coefficient Δ depends on the nonlinear parameter of the medium. It is known that the stability of the solution of the NLS equation and the existence of various types of soliton solutions depend on the sign of $\Gamma\Delta$. It is found that, irrespective of the thickness of the layer, the wave number and the mode number, when the constituent material is softening in shear then the nonlinear plane periodic waves are unstable under infinitesimal perturbations and therefore the bright (envelope) solitary SH waves will exist and propagate in the medium. But if the constituent material is hardening in shear then the nonlinear plane periodic waves are stable and the dark solitary SH waves may exist.

In the rest of the work, we consider the propagation of nonlinear SH waves in a layer which is geometrically same as above, and also the same assumptions on the boundaries are taken into account. The main difference is about the material. For this problem, the constituent material is assumed to be heterogeneous, isotropic and hyper-elastic. Then the following approximate governing equation and boundary conditions involving terms not higher than the third degree in the deformation gradients are written;

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_T^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}\right) - \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial Y}(\rho c_T^2)\frac{\partial u}{\partial Y}\right] \\ &= n_T\left[\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial u}{\partial X}\mathscr{K}(u)\right) + \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial u}{\partial Y}\mathscr{K}(u)\right)\right] + \frac{\mathscr{K}(u)}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial Y}(\rho n_T)\frac{\partial u}{\partial Y}\right] \end{aligned} \tag{8}$$

$$\frac{\partial u}{\partial Y} = 0 \quad \text{on} \quad Y = h; \quad \text{and} \quad u = 0 \quad \text{on} \quad Y = 0 \tag{9}$$

Here, ρ is the density of the medium, $c_T = \sqrt{\mu/\rho}$ is the linear shear wave velocity of the medium, and n_T is the nonlinear material function. Because of the heterogeneity, all coefficients μ, ρ, c_T, and n_T depend on Y and It is assumed that they are continuous differentiable functions of Y. In the analysis we consider special heterogeneity on the coefficients such that $\mu = \mu_0 e^{\beta Y}, \rho = \rho_0 e^{\beta Y}$, but $n_T = n_T(Y)$. As an example the nonlinear material function n_T is choosen such that $n_T = n_{0_T} e^{\lambda Y}$ for numerical calculation. Nonlinear analysis is the similar to the first part of the work. In this case the displacement of the first order problem is found to be

$$u_1 = \frac{2i}{\sqrt{\mu_0 e^{\beta y}}} \sin(kpy) \mathscr{A}_1 e^{i\phi} + \text{c.c.}, \qquad c > c_{0_T}\sqrt{1 + (\beta^2/4k^2)}. \tag{10}$$

Here $p = [(c^2/c_{0_T}^2) - (\beta^2/4k^2) - 1]^{1/2}$, $\phi = kx_0 - \omega t_0$, and also c.c. denotes the complex conjugate of the preceding terms, $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_1(x_1, x_2, t_1, t_2)$ is a complex function representing the first order slowly varying amplitude of the wave modulation. Compatibility condition in the second order perturbation problem yields $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_1(x_1 - V_g t_1, x_2, t_2)$ where V_g is the group velocity of the waves, and then compatibility condition in the third order problem yields the following NLS equation for $\mathscr{A} = k\mathscr{A}_1$

$$i\frac{\partial \mathscr{A}}{\partial \tau} + \Gamma \frac{\partial^2 \mathscr{A}}{\partial \xi^2} + \Delta |\mathscr{A}|^2 \mathscr{A} = 0 \tag{11}$$

where $\tau = \omega t_2$, $\xi = k(x_1 - V_g t_1)$, and $\Gamma = (k^2/2\omega)(d^2\omega/dk^2)$. The coefficient Δ depends on the nonlinear parameter of the medium. It is known that the stability of the solution of the NLS equation and the existence of various types of soliton solutions depends on the sign of $\Gamma\Delta$. The term $e^{\lambda y}$ is always positive, therefore the sign of the nonlinear material variable n_T depends on n_{0_T}. If $n_{0_T} > 0$, the medium is hardening in shear, but if $n_{0_T} < 0$, then it is softening. It is found that, irrespective of the thickness of the layer, the wave number and the mode number, when the constituent material is softening in shear then the nonlinear plane periodic waves are unstable under infinitesimal perturbations and therefore the bright (envelope) solitary SH waves will exist and propagate in the medium. But if the constituent material is hardening in shear then the nonlinear plane periodic waves are stable and the dark solitary SH waves may exist.

1. GİRİŞ

1.1 Giriş

Elastisitenin matematiksel teorisinin uzun ve tartışmalı bir geçmişi vardır. Bu konuyla ilgili detaylı bilgilere [1–3] kaynaklarından ulaşılabilir. Bu bölümde bu tez çalışmasına konu olan kadarıyla literatüre yer vereceğiz. Bilindiği gibi sınırsız bir ortamda yayılan elastik dalgalar dispersif değildir. Yani dalgaların faz hızları sabittir. Rayleigh dalgaları da dispersif olmayan dalga örneklerindendir. Ancak uzun peryotlu ilk sismogramlar bile yüzey dalgası katarlarından büyük, enine yer değiştirme bileşenlerine sahip dispersif dalgaları kaydetmişlerdir. Bu kayıtlar Rayleigh dalgalarının dışında bir yüzey dalgasının varlığını göstermekteydi [3]. Love [4], bu olayın yerin tabakalı yapısının sonucu olduğunu düşünerek farklı elastik özelliklere sahip, düzgün kalınlıklı bir tabaka ile kaplı homojen izotrop lineer elastik bir yarım uzayda, yer değiştirme doğrultusu yayılma düzlemine dik olan dispersif yüzey dalgalarının varlığını teorik olarak göstermiştir. Bu dalgalar yatay olarak polarize olmuş enine yüzey dalgaları yani yüzey SH dalgaları veya Love dalgaları olarak bilinir. Bu dalgaların keşfiyle, çeşitli tabakalı ortamlarda SH dalgalarının yayılımı ele alınmıştır. İki tabaka ile kaplı bir yarım uzayda Love dalgalarının yayılım problemi Gutenberg [5], Stoneley ve Tillotson [6] ve Stoneley [7] tarafından incelenmiştir. Her biri sonlu kalınlığa sahip iki tabakalı bir plakada Love dalgalarının incelenmesi Jeffreys [8] tarafından yapılmıştır.
Dispersif SH dalgalarının yayılımı üzerine yapılan bu çalışmalar jeofizikte uygulama alanı bulmuştur [3]. Daha sonra H.Lamb, R.Stoneley, Yu.V.Gulyaev-J.L.Blustein'in isimleri ile anılan başka yüzey dalgaları da keşfedilmiştir. Bu çalışmalar da sismoloji, malzeme yüzeylerinin tahribatsız muayeneleri, elektronik sinyal işleme cihazları teknolojileri gibi pek çok dalda uygulama alanı buldular. Bilgi için Ewing [3], Bullen [9], Achenbach [10], Miklowitz [11], Farnell [12], Maugin [13] kaynaklarına bakılabilir. Sonrasında dispersif elastik dalgaların yayılmasına bünyesel nonlineerliğin etkilerini göz önüne alan problemler çözülmüştür. Bu problemlerde daha önceleri

plazma fiziği, akışkanlar mekaniği gibi alanlarda karşılaşılan zayıf nonlineer dalgaların yayılması problemlerinde kullanılan asimptotik perturbasyon metotları kullanılmıştır. Konuyla ilgili Whitham [14], Jeffrey ve Kawahara [15], Dodd ve diğerleri [16], Ablowitz ve Clarkson [17], Johnson [18] gibi kaynaklara bakılabilir. Bu çalışmalarda küçük fakat sonlu genlikli dalgalarda, nonlineerlikle dispersiyon dengelenerek dalga yayılımının Korteweg-de Vries (K-dV), modifiye edilmiş K-dV, nonlineer Schrödinger (NLS), Boussinesq (BE), modifiye edilmiş BE gibi denklemler ile karakterize edilebileceği gösterilmiştir. Bu denklemlerin çözümlerinde solitary dalgaların varlığı bilindiğinden bu bilgiler ışığında nonlineer dispersif dalgaların çeşitli ortamlarda yayılmaları incelenebilmektedir. Bu durumu temsil eden örnekler Bataille ve Lund [19], Soerensen ve diğerleri [20], Teymur [21–23], Maugin ve Hadouaj [24], Mayer ve diğerleri [25], Fu [26], Porubov ve Samsonov [27], Ferreira ve Boluenger [28], Pucci ve Saccomanddi [29], Ahmetolan ve Teymur [30,31], Destrade ve diğerleri [32], Teymur ve diğerleri [33] biçiminde verilebilir. Bu çalışmaların daha fazlası Parker ve Maugin [34], Maugin [35], Parker [36], Samsonov [37], Mayer [38], Norris [39], Porubov [40] kaynaklarında bulunabilir.

Son yıllarda dispersif SH dalgalarının yayılımına, heterojenliğin etkisini inceleyen bazı çalışmalar yapılmıştır. Örneğin, Hudson [41] rijit bir cisim üzerine oturtulmuş heterojen lineer elastik bir tabakada Love dalgalarının varlığını araştırmıştır. Avtar [42], iki tabakalı bir yarım uzayda lineer Love dalgalarının yayılımıyla ilgilenmiştir. Avtar [42]'ın; bu çalışmasında ele aldığı yarım uzay, dalga yayılımına dik doğrultuda bir heterojenliğe sahiptir. Ayrıca Sing ve diğerleri [43], tabakalı heterojen bir ortamda Love dalgalarının yayılmasını incelemişlerdir. Kakar ve diğerleri [44], homojen bir yarım uzay üzerine oturtulmuş heterojen bir tabakada Love dalgalarının yayılımını incelemiştir. Gupta ve diğerleri [45], heterojen bir yarım uzay üzerinde heterojen bir tabaka bulunan, bir tabakalı ortamda lineer Love dalgalarının yayılımını ele almışlardır. Dispersif SH dalgalarının yayılımına heterojenliğin etkisini gösteren bu çalışmalar daha çok izotrop lineer ortamlar içindir. Anizotrop ortamlarla ilgili lineer çalışmalar da literatürde bulunmaktadır. Ancak bu tez çalışmasının konusu olmadığından burada bunlara yer verilmemiştir. Bu tez çalışmasında iki problem ele alınmıştır: İlk problemde rijit bir cisim üzerine oturtulmuş; homojen, izotrop, nonlineer, hiperelastik bir tabakada SH dalgalarının yayılımı ele alınmıştır. İkincisinin ilk problemden farkı homojen ortam yerine heterojen bir ortamda çalışılmasıdır.

Literatüre bakıldığında heterojen ortamlardaki çalışmalar daha çok lineer dalgalarla ilgilidir. Bu çalışmada nonlineerliğin yanısıra hererojenliğin dalga yayılımına etkisi ortaya çıkarılarak, literatüre katkı sağlanmıştır.

1.2 Tezin Anlam ve Önemi

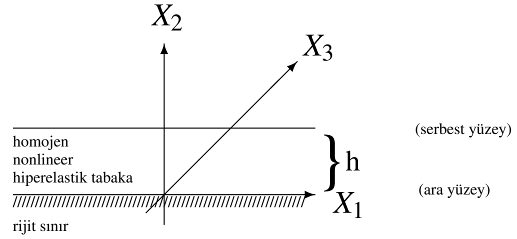
Havadaki sesin iletimi, su havuzundaki dalgaların dağılması, yeryüzündeki depremsel sarsıntıların iletimi ve radyo dalgalarının iletimi sırasıyla gaz, sıvı, katı ve boş uzayda dalga yayılımlarına örnek olarak verilebilir. Özel olarak katılarda dalga yayılımıyla devam edilirse iki farklı olaya rastlamak mümkündür. Birincisinde katı, gerilimi ve sıkışabilir gerilmeyi iletir ve parçacıkların hareketi dalga hareketinin doğrultusundadır. İkincisinde katı kayma gerilmesini iletir ve parçacıkların hareketi dalga hareketine dik doğrultudadır. Özel bir dalga türü olan enine polarize olmuş dalgaların literatürde SH dalgaları olarak bilindiğinden bahsetmiştik. Bu tez çalışmasının ikinci bölümünde rijit bir cisim üzerine oturtulmuş ve homojen, izotrop, nonlineer, hiperelastik bir tabakada yayılan SH dalgalarının yayılımı incelenmiştir. İnceleme sonunda nonlineer SH dalgalarının self modülasyonun asimptotik olarak bir NLS denklemi ile karakterize edilebileceği gösterilmiştir. Tezin üçüncü bölümünde, homojen ortam heterojen bir ortamla değiştirilerek, nonlineer durumun yanısıra dalga yayılımına dik, tabaka derinliğinin doğrultusunda bir heterojen durumun etkisi tartışılmıştır. Böylece nonlineer durumun yanında bu tip düzensizliklerin de yayılma karakteristiklerine etkileri ortaya çıkarılmaktadır. Literatür incelendiğinde dispersif nonlineer SH dalgalarının yayılımına heterojenliğin etkisini ortaya çıkaracak çalışmalara pek rastlanmamaktadır. Bu yüzden bu tez çalışmasının bu konudaki eksiğin bir kısmını kapatacak nitelikte olması çalışmanın önemini arttırmaktadır.

2. HOMOJEN NONLİNEER HİPERELASTİK BİR TABAKADA SH DALGALARININ YAYILMASI

2.1 Giriş

Bu bölümde, rijit bir cisim üzerine oturtulmuş; düzgün kalınlıklı, homojen, nonlineer, izotrop, hiperelastik bir tabakada küçük fakat sonlu genlikli SH dalgalarının yayılmasını temsil eden hareket denklemi ve bu harekete etkiyen sınır koşulları EK A'dan yararlanılarak türetilmektedir. Türetilen bu denklemlerde nonlineerliği temsil eden parametreye sıfır değeri verilerek lineer durumu temsil eden denklemleri elde etmek mümkündür. Dolayısıyla dalga hareketi önce lineerleştirilerek dalga yayılımının hangi şartlar altında var olacağı tartışılmaktadır. Ortamı oluşturan malzemedeki lineer kayma dalgalarının faz hızı c_{0_T} ve dalgaların faz hızı c ile gösterilmek üzere $c < c_{0_T}$ ve $c > c_{0_T}$ durumları için dispersiyon bağıntıları bulunmaktadır. Dalga yayılımının mümkün olduğu durum için nonlineer SH dalgalarının yayılımı incelenmektedir. Bu inceleme yapılırken çoklu ölçekler yöntemi kullanılmaktadır. Elde edilen sonuçlar sayısal olarak hesaplanarak grafikleri verilmektedir.

2.2 Problemin Tanımı ve Temel Denklemler



Şekil 2.1 : Homojen nonlineer hiperelastik bir tabaka.

Tezin bu bölümünde rijit bir cisim üzerine oturtulmuş; düzgün kalınlıklı, homojen, nonlineer, hiperelastik bir tabakada SH dalgalarının yayılma problemi incelenecektir. Üç boyutlu uzayda bir noktanın, aynı dik kartezyen eksen takımına göre uzaysal ve maddesel koordinatlarını sırasıyla (x_1, x_2, x_3) ve (X_1, X_2, X_3) üçlü sıralı sayıları ile gösterelim. Başlangıç durumunda, $h > 0$ ile tabakanın kalınlığı gösterilmek üzere,

$$R = \{(X_1, X_2, X_3) : -\infty < X_1 < \infty, 0 \leq X_2 \leq h, -\infty < X_3 < \infty\} \tag{2.1}$$

bölgesini dolduran hiperelastik bir malzemeden meydana gelen homojen, nonlineer, sonlu bir tabaka gözönüne alalım. Bu tabakada X_1 ekseni boyunca yayılan ve (A.1) bağıntısından bilinen

$$x_k = X_K \delta_{kK} + u_3(X_\Delta, t)\delta_{k3} \tag{2.2}$$

denklemi ile tanımlanan kayma dalgalarını yani SH dalgalarını ele alalım. (2.2) denkleminde t zamanı, δ_{kK} Kronecker sembolünü ve u_3'te bir parçacığın X_3 doğrultusundaki yerdeğiştirme fonksiyonunu göstermektedir. Ayrıca bu bölümde, Latin indislerinin $(1,2,3)$, Yunan indislerinin ise $(1,2)$ değerlerini alacaklarını ve (2.2)'de ve bundan sonra, tekrarlanan iki Latin indisi üzerinde 1'den 3'e kadar, tekrarlanan iki Yunan indisi üzerinde ise 1'den 2'ye kadar toplam yapılacağını kabul edelim. Tanımlanan bölgenin $X_2 = h$ serbest yüzeyinde gerilmelerin sıfır olduğu kabul edilmektedir. Ayrıca $X_2 = 0$ ara yüzeyinde yerdeğiştirme sıfır olur. Harekete etkiyen kütle kuvvetleri bulunmadığında, (2.2) ile tanımlanan hareket denklemleri başlangıç durumunda, (A.11)'den yararlanılarak

$$T_{\Delta\beta,\Delta} = 0, \quad T_{\Delta 3,\Delta} = \rho_0 \ddot{u}_3 \tag{2.3}$$

şeklinde yazılır. (2.3) denkleminde, T_{Kl} ile birinci tür Piola-Kirchoff gerilme tansörünün bileşenleri, $\ddot{u}_3$ ifadesindeki bir nokta zamana göre kısmi türevi ve virgülden sonra kullanılan alt indis de bu indisin belirttiği kartezyen koordinata göre kısmi türevi göstermektedir. $X_2 = h$ serbest yüzeyinde gerilmelerin sıfır olduğu kabulünden ve $X_2 = 0$ ara yüzeyinde yerdeğiştirmenin sıfır olmasından aşağıdaki iki sınır koşulu yazılır;

$$X_2 = h; \qquad T_{2k} = 0, \tag{2.4}$$

$$X_2 = 0; \qquad u_3 = 0. \tag{2.5}$$

Gösterimde kolaylık olması bakımından bundan sonra (X_1, X_2, X_3) sıralı üçlüsü yerine (X,Y,Z) ve $u_3 = u_3(X_1, X_2, t)$ yerdeğiştirme fonksiyonu yerine de $u = u(X,Y,t)$ fonksiyonu kullanılacaktır. Sonlu fakat küçük genlikli dalga yayılması problemleri inceleneceğinden, EK A'da yapılan çalışma dikkate alınarak, ilgili bünye bağıntılarının (2.3)'deki ilk iki denklemi özdeş olarak sağladığı kabul edilecektir. Bu kabul altında, (X,Y) düzleminde etkiyen sürekli kütle kuvvetleri bulunmadan, (2.2) ile tanımlanan hareket yaratılabilecektir. Bu durumdaki bir ortama ait bünye bağıntıları, tabaka sıkışabilir hiperelastik bir malzemeden oluştuğunda (A.55) ile, sıkışmaz bir malzemeden oluştuğunda (A.92) ile, genelleştirilmiş neo-Hookean malzemelerden oluştuğunda (A.99) ile verilir. Kübik nonlineer terimlerden daha yüksek mertebedeki nonlineer terimler ihmal edilirse, (A.56) bağıntısından, (2.3) 'deki üçüncü denklem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_{0_T}^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \right) = n_{0_T} \left\{ \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial u}{\partial X} \mathscr{K}(u) \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial u}{\partial Y} \mathscr{K}(u) \right) \right\} \tag{2.6}$$

şeklinde yazılır. (2.6) denklemindeki $\mathscr{K}$ fonksiyonu, (A.8) bağıntısından

$$\mathscr{K}(u) = \left(\frac{\partial u}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial Y} \right)^2 \tag{2.7}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Ayrıca burada c_{0_T}, ortamdaki lineer kayma dalgalarının yayılma hızını göstermektedir ve (A.51)'den

$$c_{0_T}^2 = \frac{\mu_0}{\rho_0} \tag{2.8}$$

eşitliği yazılabilir. (2.8) eşitliğinde, μ_0 sabiti ile ortamın lineer kayma modülü ve ρ_0 sabiti ile de ortamın yoğunluğu gösterilmektedir. Bu problemde ortam homojen olduğundan, nonlineer malzeme özellikleriyle ilgili n_{0_T} katsayısı da sabit olup ortamı oluşturan malzemenin sıkışabilir hiperelastik malzeme olması durumunda (A.57)'den

$$n_{0_T} = 4(c_{200} + c_{020} + c_{110})/\rho_0 \tag{2.9}$$

sıkışmaz hiperelastik malzeme olması durumunda (A.93)'ten

$$n_{0_T} = 2(2c_{200} + c_{110})/\rho_0 \tag{2.10}$$

genelleştirilmiş neo-Hookean malzeme olması durumunda (A.100)'den

$$n_{0_T} = 4c_{200}/\rho_0 \tag{2.11}$$

olarak tanımlanır. Kübik nonlineer terimlerden daha yüksek mertebedeki nonlineer terimler ihmal edilerek; (A.9) ile (A.55) bağıntıları kullanılarak, (2.4)-(2.5) sınır koşulları da ele alınan hiperelastik malzemeler için sırasıyla aşağıdaki gibi elde edilir.

$$Y = h; \qquad \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{n_{0_T}}{c_{0_T}^2} \mathscr{K}(u) \frac{\partial u}{\partial Y} = 0, \tag{2.12}$$

$$Y = 0; \qquad u = 0. \tag{2.13}$$

2.3 Lineer Dalgaların Yayılması ve Dispersiyon Bağıntıları

Bu bölümde sonraki çalışmalarımıza yol göstermesi açısından ele aldığımız problem lineerleştirilecektir. (2.6) denkleminde ve (2.12)-(2.13) sınır koşullarında nonlineer parametre $n_{0_T} = 0$ alınarak, lineer dalgaların yayılmasını modelleyen problem aşağıdaki şekilde verilir:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_{0_T}^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \right) = 0, \tag{2.14}$$

$$Y = h; \qquad \frac{\partial u}{\partial Y} = 0, \tag{2.15}$$

$$Y = 0; \qquad u = 0. \tag{2.16}$$

X doğrultusunda yayılan harmonik dalgalar için (2.14) denkleminin çözümünü

$$u = U(Y) e^{i(kX - \omega t)} + \text{c.c.} \tag{2.17}$$

formunda arayalım. Burada c.c. sembolü ile önceki terimin kompleks eşleniği, k ile dalga sayısı ve ω ile de açısal frekans gösterilmektedir. Ayrıca dalgaların faz hızı

$$c = \omega / k \tag{2.18}$$

ile tanımlanır. (2.17) çözüm formu (2.14) denkleminde ve (2.15)-(2.16) kullanılırsa

$$\frac{d^2 U}{dY^2} + k^2 \left(\frac{c^2}{c_{0_T}^2} - 1 \right) U = 0 \tag{2.19}$$

denklemi ve

$$Y = h; \qquad \frac{dU}{dY} = 0, \tag{2.20}$$

$$Y = 0; \qquad U = 0. \tag{2.21}$$

sınır koşulları elde edilir. Burada tabakadaki yayılan lineer kayma dalgalarının faz hızı c_{0_T} ile dalgaların faz hızı c arasında

$$c > c_{0_T} \tag{2.22}$$

veya

$$c < c_{0_T} \tag{2.23}$$

durumları sözkonusudur. Şimdi bu durumları daha yakından inceleyelim.

2.3.1 $c > c_{0_T}$ durumu

Bu bölümde $c > c_{0_T}$ koşulu altında, (2.19) denklemi ve (2.20)-(2.21) sınır koşulları ile verilen sınır değer problemi incelenecektir. (2.19) denklemi ikinci mertebeden sabit katsayılı homojen bir denklem olup, $c > c_{0_T}$ koşulu altında, çözümü

$$U(Y) = Ae^{ikpY} + Be^{-ikpY} \tag{2.24}$$

şeklinde elde edilir. Burada A, B sabitler ve p,

$$p = \left(\frac{c^2}{c_{0_T}^2} - 1 \right)^{1/2} \tag{2.25}$$

olarak tanımlanmaktadır. (2.24) çözümü, (2.20)-(2.21) sınır koşullarında kullanılırsa,

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \tag{2.26}$$

ve

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} ikpe^{ikph} & -ikpe^{-ikph} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.27}$$

olarak tanımlanmak üzere

$$\mathbf{WU} = \mathbf{0} \tag{2.28}$$

homojen lineer cebirsel denklem sistemi elde edilir. Böyle bir sistemin sıfır çözümden farklı bir çözüme sahip olması için

$$\det \mathbf{W} = 0 \tag{2.29}$$

koşulu sağlanmalıdır. (2.29) koşulundan, $k \neq 0$ ve $c \neq c_{0_T}$ olduğundan,

$$\cos(kph) = 0 \quad \text{veya} \quad e^{2ikph} = -1 \tag{2.30}$$

bağıntısı elde edilir. Bu bağıntı, faz hızı $c > c_{0_T}$ eşitsizliğini sağlayan SH dalgalarına ait dispersiyon bağıntısıdır.

2.3.2 $c < c_{0_T}$ durumu

Bu bölümde $c < c_{0_T}$ koşulu altında, (2.19) denklemi ve (2.20)-(2.21) sınır koşulları ile verilen sınır değer problemi incelenecektir. (2.19) denklemi ikinci mertebeden sabit katsayılı homojen bir denklem olup, $c < c_{0_T}$ koşulu altında, (2.19) denkleminin çözümü,

$$U(Y) = Ae^{kqY} + Be^{-kqY} \tag{2.31}$$

şeklinde elde edilir. Burada A, B sabitler ve q,

$$q = \left(1 - \frac{c^2}{c_{0_T}^2}\right)^{1/2} \tag{2.32}$$

olarak tanımlanmaktadır. (2.31) çözümü, (2.20)-(2.21) sınır koşullarında kullanılırsa,

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \tag{2.33}$$

ve

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} kqe^{kqh} & -kqe^{-kqh} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.34}$$

olarak tanımlanmak üzere

$$\mathbf{WU} = \mathbf{0} \tag{2.35}$$

homojen lineer cebirsel denklem sistemi elde edilir. Böyle bir sistemin sıfır çözümden farklı bir çözüme sahip olması için

$$\det\mathbf{W} = 0 \tag{2.36}$$

olmalıdır. Yani $k \neq 0$ ve $c \neq c_{0_T}$ olduğundan

$$\cosh(kqh) = 0 \quad \text{veya} \quad e^{2kqh} = -1 \tag{2.37}$$

bağıntısı elde edilir. Bu bağıntıyı sağlayacak şekilde reel bir k sayısı bulunmadığından, $c < c_{0_T}$ olması halinde, SH dalgaları varolmamaktadır. Yani ele aldığımız tabakada faz hızı c_{0_T}'den küçük dalgalar yayılmazlar.

2.3.3 Dispersiyon bağıntısı

Şimdiye kadar (2.19) denklemi ve (2.20)-(2.21) sınır koşullarıyla verilen lineer dalga yayılımını temsil eden sınır değer problemini $c > c_{0_T}$ ve $c < c_{0_T}$ koşulları altında inceledik ve her bir durum için dispersiyon bağıntılarını elde ettik. (2.30) bağıntısı, (2.25)'den yararlanılarak

$$\cos\left[kh\left(\frac{c^2}{c_{0_T}^2} - 1\right)^{1/2}\right] = 0 \tag{2.38}$$

formunda yazılır. Şimdi (2.38) denklemini boyutsuzlaştıralım. Bunun için gerekli olan aşağıdaki tanımları yapalım.

$$C = \frac{c}{c_{0_T}}, \quad K = kh. \tag{2.39}$$

Burada C boyutsuz faz hızını, K ise boyutsuz dalga sayısını temsil etmektedir. (2.39)'deki tanımları kullanarak, (2.38) bağıntısını

$$D(C,K) := \cos(K\sqrt{C^2-1}) = 0 \tag{2.40}$$

biçiminde ifade edelim. Bu kısımda (2.40) denklemini kullanarak, $C = C(K)$ fonksiyonlarının; (C,K) düzleminin birinci dörtte birlik kısmında, yani $C > 0$, $K > 0$ bölgesinde grafiklerini çizmek istiyoruz. (2.40) denklemi değişkenleri (C,K) olan bir denklemdir. Kapalı fonksiyon teoremine göre, (2.40) bağıntısını sağlayan (C_0,K_0) noktası civarında; $\partial D/\partial C$, $\partial D/\partial K$ kısmi türevleri sürekli ve

$$\frac{\partial D}{\partial C} \neq 0 \tag{2.41}$$

ise (2.40) denklemi bu nokta civarında

$$C = C(K) \tag{2.42}$$

formunda fonksiyonları kapalı olarak tanımlar. (2.42) ifadesinde, fiziksel olarak dalgaların boyutsuz faz hızı C, boyutsuz dalga sayısı K'ya bağlıdır. Dolayısı ile ortamdaki dalgalar dispersif olur. Bu ilişkiyi veren (2.40) ifadesi dispersiyon bağıntısı olarak bilinir. (2.40) denklemi bünyesinde trigonometrik fonksiyon barındırdığından, peryodik yapıdadır. Yani (2.42) formunda birden fazla fonksiyon, (2.40) denklemini sağlamaktadır. Bu fonksiyonların her biri dispersiyon bağıntısının bir dalını oluşturur. Dikkat edilirse, (2.42) eşitliği ile verilen (C,K) ilişkisi kapalı bir formda olup denklemin yapısı gereği, $C = C(K)$ biçiminde fonksiyonları analitik olarak elde etmek mümkündür. Bu fonksiyonlar

$$C = \left\{ 1 + \left[\frac{(2n+1)\pi}{2K} \right]^2 \right\}^{1/2} \tag{2.43}$$

biçiminde elde edilir. Burada n, sıfır yada pozitif olan herhangi bir tamsayı olmak üzere dispersiyon bağıntısındaki herhangi bir dalı temsil etmektedir. (2.43) ile verilen $C = C(K)$ fonksiyonlarının belirttiği eğrilerin $K \to \infty$ limitindeki davranışları için, yani ya sabit bir dalga sayısında $h \to \infty$ için veya sabit bir tabaka kalınlığında $k \to \infty$ için; $C = 1$ doğrusuna asimptotik olarak yaklaştıkları görülür. Benzer şekilde, tanımlı olduğu bölgede $C = C(K)$ fonksiyonlarının belirttiği eğrilerin $K \to 0$ limitindeki davranışları için, yani ya sabit bir dalga sayısında $h \to 0$ için veya sabit bir tabaka kalınlığında $k \to 0$ için; $C \to \infty$ elde edilmektedir. Yani boyutsuz dalga sayısı K, $(0,\infty)$ aralığında değiştiğinde; boyutsuz faz hızı C, $(1,\infty)$ aralığında değer almaktadır. Bu bilgiler ışığında, boyutsuz faz hızı C'nin boyutsuz dalga sayısı K'ya göre değişimi, (2.40) dispersiyon bağıntısının ilk altı dalı için ve

$$\mu_0 = 1, \rho_0 = 1 \tag{2.44}$$

ortam modeli için Şekil B.1'de verilmektedir.

Şimdi çalıştığımız ortamdaki dalgaların grup hızıyla ilgilenelim. (2.18) ve (2.38) eşitliklerinden yararlanılarak açısal frekans

$$\omega = kc_{0_T}\left\{1+\left[\frac{(2n+1)\pi}{2kh}\right]^2\right\}^{1/2} \tag{2.45}$$

biçiminde elde edilir. (2.45) bağıntısından anlaşılacağı üzere, (2.30) dispersiyon bağıntısının her bir dalı dispersiftir. (2.45) bağıntısında, $\omega = \omega(k)$ olup ω fonksiyonunun k'ya göre birinci mertebe türevi, (2.45) eşitliği kullanılarak

$$V_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c_{0_T}^2}{c} \tag{2.46}$$

biçiminde elde edilir. Tezin daha sonraki kısımlarında gerekli olacağından ω fonksiyonunun k'ya göre ikinci mertebe türevi de aşağıdaki gibi hesaplanır;

$$\frac{dV_g}{dk} = \frac{d^2\omega}{dk^2} = \frac{(2n+1)^2\pi^2 c_{0_T}^4}{4c^3k^3h^2} = \frac{c_{0_T}^2}{\omega}\left(1-\frac{c_{0_T}^2}{c^2}\right). \tag{2.47}$$

(2.47) eşitliği

$$\frac{k^2}{\omega}\frac{dV_g}{dk} = \frac{(2n+1)^2\pi^2 c_{0_T}^4}{4c^4k^2h^2} = \frac{c_{0_T}^2}{c^2}\left(1-\frac{c_{0_T}^2}{c^2}\right) \tag{2.48}$$

biçiminde boyutsuzlaştırılabilir. Ortamdaki dalgaların grup hızı V_g, (2.46) eşitliğinden yararlanılarak aşağıdaki şekilde boyutsuzlaştırılabilir.

$$V_G = \frac{V_g}{c_{0_T}} = \frac{c_{0_T}}{c}. \tag{2.49}$$

Burada V_G, boyutsuz grup hızını göstermektedir. $C = c/c_{0_T}$ tanımı, (2.49) eşitliğiyle kullanılırsa,

$$V_G.C = 1 \tag{2.50}$$

olduğu görülür. Bu durumda (2.43) eşitliğinden V_G fonksiyonları kolaylıkla bulunabilir. $V_G = V_G(K)$ fonksiyonları $K \to \infty$ için $V_G = 1$ doğrusuna asimptotik olarak yaklaşmaktadır. Benzer şekilde, tanımlı olduğu bölgede $V_G = V_G(K)$ fonksiyonlarından $K \to 0$ için $V_G \to 0$ elde edilmektedir. Yani boyutsuz dalga sayısı K, $(0,\infty)$ aralığında değiştiğinde; boyutsuz grup hızı V_G, $(0,1)$ aralığında değer almaktadır. Bu bilgiler ışığında, boyutsuz grup hızı V_G'nin boyutsuz dalga sayısı K'ya göre değişimi, (2.40) dispersiyon bağıntısının ilk altı dalı ve (2.44) ile verilen ortam modeli için Şekil B.2'de verilmektedir. Sonuç olarak, boyutsuz dalga sayısı K'nın yeterince büyük değerleri için boyutsuz faz hızı C ile boyutsuz grup hızı V_G'nin $C = 1$ veya $V_G = 1$ doğrusunda birbirlerine asimptotik olarak yaklaştıkları gözlenmiştir.

2.4 Homojen Bir Ortamda Nonlineer SH Dalgaları

2.4.1 Giriş

Bir önceki bölümde ele alınan problemle ilgili lineer dalgaların yayılması incelenmiştir ve hangi koşullarda SH dalgalarının var olduğu tartışılmıştır. Ayrıca dalgaların var olduğu durum için dispersiyon bağıntısı elde edilmiştir. Bu bölümde lineer özellikleri $c > c_{0_T}$ eşitsizliğini sağlayan (2.1) ile tanımlanan tabakada yayılan küçük fakat sonlu genlikli nonlineer SH dalgaların self modülasyonu bir asimptotik perturbasyon yöntemi olan çoklu ölçekler yöntemi kullanılarak incelenecektir [15, 21].

2.4.2 $c > c_{0_T}$ için asimptotik analiz

Nonlineer SH dalgalarının self modülasyonu için X, Y ve t değişkenleri yerine

$$x_i = \varepsilon^i X, \quad t_i = \varepsilon^i t, \quad y = Y, \quad i = 0,1,2 \tag{2.51}$$

bağıntıları ile yeni değişkenler tanımlayalım ve yerdeğiştirme fonksiyonu u'nun bu yeni değişkenlerin bir fonksiyonu olduğunu kabul edelim. Burada ε nonlineer yapının mertebesini belirten küçük pozitif bir parametre; yayılma olayının hızlı değişimini karakterize eden değişkenler x_0, y, t_0 ve yavaş değişimi karakterize eden değişkenler x_1, x_2, t_1, t_2 olmaktadır. Şimdi u fonksiyonunun, $\{\varepsilon^n\}$ asimptotik dizisine göre

$$u \sim \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n(x_0, x_1, x_2, y, t_0, t_1, t_2) \tag{2.52}$$

formunda düzgün olarak geçerli asimptotik açılıma sahip olduğunu kabul edelim. Eski ve yeni bağımsız değişkenlere göre türev operatörleri arasında

$$\frac{\partial}{\partial X} = \sum_{i=0}^{2} \varepsilon^i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \sum_{i=0}^{2} \varepsilon^i \frac{\partial}{\partial t_i}, \quad \frac{\partial}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial y} \tag{2.53}$$

bağıntıları vardır. (2.53) bağıntısı dikkate alınarak, (2.6) daki denkleme ve (2.12)-(2.13) sınır koşullarına, (2.51) dönüşümü uygulanır ve daha sonra (2.52) de verilen asimptotik açılım kullanılırsa, ε un aynı kuvvetlerinin katsayıları eşitlenerek u_n'nin ardışık olarak hesaplanabileceği bir problem hiyerarşisi elde edilir. Üçüncü mertebeye kadar olan pertürbasyon problemleri aşağıda verilmektedir;

$\mathscr{O}(\varepsilon)$:

$$\mathscr{L}_0 u_1 = 0, \tag{2.54}$$

$$y = h; \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0, \tag{2.55}$$

$$y = 0; \quad u_1 = 0, \tag{2.56}$$

$\mathscr{O}(\varepsilon^2)$:

$$\mathscr{L}_0 u_2 = \mathscr{L}_1 u_1, \tag{2.57}$$

$$y = h; \quad \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0, \tag{2.58}$$

$$y = 0; \quad u_2 = 0, \tag{2.59}$$

$\mathscr{O}(\varepsilon^3)$:

$$\mathscr{L}_0 u_3 = \mathscr{L}_1 u_2 + \mathscr{L}_2 u_1 + \mathscr{N}(u_1), \tag{2.60}$$

$$y = h; \quad \frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{n_{0_T}}{c_{0_T}^2} \mathscr{K}(u_1) \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0, \tag{2.61}$$

$$y = 0; \quad u_3 = 0. \tag{2.62}$$

Burada $\mathscr{L}_i, i = 0,1,2$; $\mathscr{N}$ ve $\mathscr{K}$ diferansiyel operatörleri

$$\mathscr{L}_o \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t_0^2} - c_{0_T}^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right), \tag{2.63}$$

$$\mathscr{L}_1 \psi = 2 \left(c_{0_T}^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_0 \partial x_1} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t_0 \partial t_1} \right), \tag{2.64}$$

$$\mathscr{L}_2 \psi = c_{0_T}^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_0 \partial x_2} \right) - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t_0 \partial t_2}, \tag{2.65}$$

$$\mathscr{N}(\psi) = n_{0_T} \left[\frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_0} \mathscr{K}(\psi) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \mathscr{K}(\psi) \right) \right], \tag{2.66}$$

$$\mathscr{K}(\psi) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \tag{2.67}$$

olarak tanımlanmaktadırlar. Dikkat edilirse (2.14) denklemi ve (2.15)-(2.16) sınır koşulları ile tanımlanan lineer problem, birinci mertebe perturbasyon problemiyle eş yapıdadır. Birinci mertebe perturbasyon probleminde, lineer problemdeki

$$u = u(X,Y,t) \tag{2.68}$$

fonksiyonu yerine

$$u_1 = u_1(x_0,x_1,x_2,y,t_0,t_1,t_2) \tag{2.69}$$

fonksiyonu kullanılmaktadır. (2.68) ile verilen fonksiyonu (2.14) denkleminden belirlemek mümkündür. Ancak (2.69) ile verilen fonksiyonun, yapılan analizden görülebileceği gibi, x_0, y ve t_0 değişkenlerine bağlılıklarının yapısı açık olarak hesaplanabilmekle birlikte diğer değişkenlere bağlılığı daha üst mertebeden problemlerin çözümlerinden belirlenebilmektedir. Mertebe problemlerine dikkat edilirse, birinci mertebe problem homojen yapıda olup ikinci ve üçüncü mertebe problemler homojen olmayan yapıdadır. Ayrıca birinci mertebe problemin çözümü, ikinci mertebe problemdeki denklemin sağ tarafında kullanılırsa ikinci mertebe problem lineer olur. Benzer şekilde birinci ve ikinci mertebe problemlerin çözümleri üçüncü mertebe problemdeki denklemin sağ tarafında kullanılırsa üçüncü mertebe problem de lineer olur. Şimdi mertebe problemlerinin ilk adımı olan birinci mertebe problemin çözümüyle ilgilenelim. Birinci mertebe problemin çözümü inşa edilirken dalgaların var olması durumu yani $c > c_{0_T}$ eşitsizliğinin geçerli olması halinde analiz yapılacaktır. İlk olarak (2.54) denklemi ve (2.55)-(2.56) sınır koşullarıyla tanımlanan birinci mertebe problem ele alınacaktır. (2.54) denklemine, değişkenlere ayırma yöntemi uygulanarak, harmonik dalgalar için çözüm aşağıdaki gibi elde edilir.

$$u_1 = \sum_{\ell=1}^{\infty} \left[A_1^{(\ell)}(x_1,x_2,t_1,t_2)e^{i\ell kpy} + B_1^{(\ell)}(x_1,x_2,t_1,t_2)e^{-i\ell kpy}\right] e^{i\ell\phi} + \text{c.c.} \tag{2.70}$$

Burada p, (2.25) bağıntısıyla ve ϕ

$$\phi = kx_0 - \omega t_0 \tag{2.71}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada $A_1^{(\ell)}$ ve $B_1^{(\ell)}$ birinci mertebe yavaş değişen dalga genliği fonksiyonlarıdır. Ayrıca ℓ pozitif bir tamsayıyı, k dalga sayısını, ω açısal frekansı göstermek üzere $c = \omega/k$ faz hızını ve c.c. sembolü kendinden önce gelen terimlerin kompleks eşleniğini göstermektedir. (2.70) çözümü, (2.55)-(2.56) sınır koşullarında kullanılırsa

$$\mathbf{U}_1^{(\ell)} = \begin{bmatrix} A_1^{(\ell)} \\ B_1^{(\ell)} \end{bmatrix} \tag{2.72}$$

ve

$$\mathbf{W}_\ell = \begin{bmatrix} i\ell kpe^{i\ell kph} & -i\ell kpe^{-i\ell kph} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.73}$$

olmak üzere

$$\mathbf{W}_\ell \mathbf{U}_1^{(\ell)} = \mathbf{0} \tag{2.74}$$

homojen lineer cebirsel denklem sistemi elde edilir. Dikkat edilirse $\ell = 1$ için (2.73) ile tanımlanan $\mathbf{W}_1$ matrisi, (2.27) ile tanımlanan matrise özdeştir. (2.74) ile ifade edilen sistemin $\ell = 1$ için sıfır çözümden farklı bir çözüme sahip olması için

$$\det \mathbf{W}_1 = \det \mathbf{W} = 0 \tag{2.75}$$

olmalıdır. Bu bağıntı ancak (2.30) eşitliği ile verilen dispersiyon bağıntısının sağlanmasıyla mümkün olacaktır. Bu çalışmada bir k dalga sayısı civarında merkezlenmiş bir dalga katarının nonlineer self modülasyonu incelenmektedir. Bu amaçla yayılan dalgaların, dalga sayılarının harmonik rezonans koşulunu sağlamadığı varsayılacaktır, yani

$$\ell \geq 2 \quad \text{için} \quad \det \mathbf{W}_\ell \neq 0 \tag{2.76}$$

bağıntısı sağlanmalıdır. Bu koşul altında (2.74) denklem sisteminin çözümleri, $\mathbf{R}$

$$\mathbf{W}_1 \mathbf{R} = \mathbf{0} \tag{2.77}$$

denklem sistemini sağlayan bir sütun vektörü göstermek üzere,

$$\ell = 1 \quad \text{için} \quad \mathbf{U}_1^{(1)} = \mathscr{A}_1(x_1, x_2, t_1, t_2)\mathbf{R} \tag{2.78}$$

ve

$$\ell \geq 2 \quad \text{için} \quad \mathbf{U}_1^{(\ell)} = \mathbf{0} \tag{2.79}$$

olarak elde edilir. (2.77) denklem sisteminin bir çözümü

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{2ikph} \end{bmatrix} \tag{2.80}$$

şeklinde alınabilir.

(2.70) çözümünde, (2.78) ile (2.79) bağıntıları kullanılırsa birinci mertebe çözüm

$$u_1 = \mathscr{A}_1(x_1, x_2, t_1, t_2)(R_1 e^{ikpy} + R_2 e^{-ikpy})e^{i\phi} + \text{c.c.} \tag{2.81}$$

olarak elde edilir. (2.81) çözümü,

$$u_1 = R_1\mathscr{A}_1(x_1,x_2,t_1,t_2)\left(e^{ikpy}+\frac{R_2}{R_1}e^{-ikpy}\right)e^{i\phi}+\text{c.c.} \tag{2.82}$$

biçiminde yeniden düzenlenebilir. (2.30) dispersiyon bağıntısından, (2.82) çözümü

$$u_1 = 2i\mathscr{A}_1(x_1,x_2,t_1,t_2)\sin(kpy)e^{i\phi}+\text{c.c.} \tag{2.83}$$

biçimine indirgenir. Burada birinci mertebe çözüm, dalga modülasyonunun birinci mertebe yavaş değişen kompleks genlik fonksiyonu olan $\mathscr{A}_1$'e bağlı bulunmuştur. $\mathscr{A}_1$ fonksiyonu da daha yüksek mertebe problemlerinden belirlenecektir. Bunun için (2.57) denklemi ve (2.58)-(2.59) sınır koşullarıyla verilen ikinci mertebe problem ile incelenmeye devam edilecektir. Birinci mertebe problemin çözümünü ifade eden (2.81) eşitliği, (2.57) denkleminde kullanılırsa

$$\mathscr{L}_0 u_2 = 2i\mathscr{M}_{11}\left(R_1e^{ikpy}+R_2e^{-ikpy}\right)e^{i\phi}+\text{c.c.} \tag{2.84}$$

denklemi elde edilir. Burada,

$$\mathscr{M}_{11} = \omega\frac{\partial\mathscr{A}_1}{\partial t_1}+kc_{0_T}^2\frac{\partial\mathscr{A}_1}{\partial x_1} \tag{2.85}$$

olarak tanımlanmaktadır. Dikkat edilirse (2.84) denklemi homojen olmayan bir yapıya sahiptir. Böyle bir denklemin genel çözümü, homojen denklemin çözümüne özel bir çözüm eklemekle bulunur. Dolayısıyla (2.84) denkleminin genel çözümü,

$$u_2 = \bar{u}_2(x_0,x_1,x_2,y,t_0,t_1,t_2)+\tilde{u}_2(x_0,x_1,x_2,y,t_0,t_1,t_2) \tag{2.86}$$

formunda aranır. Burada $\bar{u}_2$ ile (2.84) denkleminin özel çözümü gösterilmektedir ve $\tilde{u}_2$ ile ise

$$\mathscr{L}_0\tilde{u}_2 = 0 \tag{2.87}$$

denklemi ve

$$y=0; \qquad \tilde{u}_2 = -\bar{u}_2, \tag{2.88}$$

$$y=h; \qquad \frac{\partial\tilde{u}_2}{\partial y} = -\frac{\partial\bar{u}_2}{\partial y} \tag{2.89}$$

koşullarını sağlayan çözümü gösterilmektedir. Belirsiz katsayılar yöntemi kullanılarak, (2.84) denkleminin özel çözümü bulunacaktır. Bunun için özel çözüm formu,

$$\bar{u}_2 = \left[\mathscr{C}_1(x_1,x_2,t_1,t_2)e^{ikpy}+\mathscr{C}_2(x_1,x_2,t_1,t_2)e^{-ikpy}\right]ye^{i\phi}+\text{c.c.} \tag{2.90}$$

biçiminde seçilir. Bu özel çözüm formu (2.84) denkleminde kullanılırsa

$$\mathscr{C}_1(x_1,x_2,t_1,t_2) = -R_1\mathscr{M}_{11}/kpc_{0_T}^2, \quad \mathscr{C}_2(x_1,x_2,t_1,t_2) = R_2\mathscr{M}_{11}/kpc_{0_T}^2 \tag{2.91}$$

elde edilir. Yani (2.90) ile verilen özel çözümün katsayıları belirlenmiş oldu. Değişkenlere ayırma yöntemi kullanılarak, (2.87) homojen denkleminin çözümü

$$\tilde{u}_2 = \sum_{\ell=1}^{\infty}\left[A_2^{(\ell)}(x_1,x_2,t_1,t_2)e^{i\ell kpy} + B_2^{(\ell)}(x_1,x_2,t_1,t_2)e^{-i\ell kpy}\right]e^{i\ell\phi} + \text{c.c.} \tag{2.92}$$

biçiminde alınır. Burada $A_2^{(\ell)}$ ve $B_2^{(\ell)}$ ikinci mertebe dalga genliği fonksiyonlarıdır ve bunlar (2.88)-(2.89) sınır koşullarından belirlenecektir. (2.92) çözümü, (2.88)-(2.89) sınır koşullarında kullanılırsa

$$\mathbf{U}_2^{(\ell)} = \begin{bmatrix} A_2^{(\ell)} \\ B_2^{(\ell)} \end{bmatrix} \tag{2.93}$$

ve

$$\mathbf{W}_\ell = \begin{bmatrix} i\ell kpe^{i\ell kph} & -i\ell kpe^{-i\ell kph} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.94}$$

olmak üzere

$$\mathbf{W}_\ell\mathbf{U}_2^{(\ell)} = \mathbf{b}_2^{(\ell)} \tag{2.95}$$

homojen olmayan lineer cebirsel denklem sistemi elde edilir. Burada $\mathbf{b}_2^{(\ell)}$ vektörleri,

$$\ell = 1 \quad \text{için} \quad \mathbf{b}_2^{(1)} = \begin{bmatrix} -\mathscr{C}_1(1+ikph)e^{ikph} - \mathscr{C}_2(1-ikph)e^{-ikph} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.96}$$

ve

$$\ell \geq 2 \quad \text{için} \quad \mathbf{b}_2^{(\ell)} = \mathbf{0} \tag{2.97}$$

biçiminde elde edilir. $\mathbf{W}_1$ matrisinin ve $\mathbf{R}$ vektörünün tanımları kullanılarak

$$\mathbf{b}_2^{(1)} = -i\left(\frac{\partial\mathscr{A}_1}{\partial t_1}\frac{\partial\mathbf{W}_1}{\partial\omega} - \frac{\partial\mathscr{A}_1}{\partial x_1}\frac{\partial\mathbf{W}_1}{\partial k}\right)\mathbf{R} \tag{2.98}$$

olarak yazılır. $\det\mathbf{W}_1 = 0$ ve $\mathbf{b}_2^{(1)} \neq \mathbf{0}$ olduğundan (2.95) denkleminin $\ell = 1$ için çözümünün olması için $\mathbf{L}$

$$\mathbf{L}\mathbf{W}_1 = \mathbf{0} \tag{2.99}$$

ile tanımlanan bir satır vektörü olmak üzere

$$\mathbf{L}\mathbf{b}_2^{(1)} = 0 \tag{2.100}$$

uygunluk koşulunun sağlanması gerekir. (2.99) bağıntısını sağlayan bir satır vektörü

$$\mathbf{L} = [L_1, L_2] = [i, kpe^{ikph}] \tag{2.101}$$

olarak hesaplanır. (2.77) bağıntısı k ya göre türetilirse,

$$\left(\frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k} + V_g \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega}\right)\mathbf{R} + \mathbf{W}_1 \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial k} + V_g \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \omega}\right) = \mathbf{0} \tag{2.102}$$

elde edilir. Burada $V_g = d\omega/dk$ olup grup hızını göstermektedir. Grup hızı (2.46) bağıntısıyla belirlidir. (2.102) eşitliği sol taraftan $\mathbf{L}$ satır vektörüyle çarpılırsa ve (2.99) eşitliği kullanılırsa

$$V_g = -\left(\mathbf{L}\frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k}\mathbf{R}\right) / \left(\mathbf{L}\frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega}\mathbf{R}\right) \tag{2.103}$$

bulunur. (2.103) ve (2.98) kullanılarak, (2.100) uygunluk koşulundan

$$\frac{\partial \mathscr{A}_1}{\partial t_1} + V_g \frac{\partial \mathscr{A}_1}{\partial x_1} = 0 \tag{2.104}$$

elde edilir. Elde edilen bu denklem $\mathscr{A}_1$'in sağlaması gereken bir denklem olup, dalgaların grup hızı V_g ile ilerleyen bir referans çerçevesinde genlik fonksiyonu $\mathscr{A}_1$'in sabit kaldığını göstermektedir, yani $\mathscr{A}_1$ fonksiyonu

$$\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_1(x_1 - V_g t_1, x_2, t_2) \tag{2.105}$$

yapısında olacaktır. (2.102) ve (2.104) bağıntıları gözönüne alınırsa, (2.95) denklem sisteminin $\ell = 1$ durumu için çözümü

$$\mathbf{U}_2^{(1)} = \mathscr{A}_2(x_1, x_2, t_1, t_2)\mathbf{R} - i\frac{\partial \mathscr{A}_1}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial k} + V_g \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \omega}\right) \tag{2.106}$$

olarak elde edilir. Burada $\mathscr{A}_2$ dalga modülasyonunun yavaş değişen ikinci mertebe genliğini temsil etmektedir ve ihtiyaç halinde daha yüksek mertebe pertürbasyon problemlerinden elde edilebilmektedir. Bu çalışmada sonlu fakat küçük genlikli dalga yayılımıyla ilgilenildiğinden sadece birinci mertebe düzgün geçerli çözüm elde edilecektir. Bu amaçla $\mathscr{A}_1$ genlik fonksiyonunu tam olarak belirlemek yeterlidir. $\ell \neq 1$ için $\det \mathbf{W}_1 \neq 0$ kabul edildiğinden ve $\ell \neq 1$ için $\mathbf{b}_2^{(\ell)} = \mathbf{0}$ olduğundan, $\ell \geq 2$ için (2.95) denklem sisteminin çözümü,

$$\ell \geq 2 \quad \text{için} \quad \mathbf{U}_2^{(\ell)} = \mathbf{0} \tag{2.107}$$

biçiminde elde edilir. Ancak birinci mertebe çözüme ulaşmak için ihtiyacımız olan $\mathscr{A}_1$ fonksiyonunu tam olarak belirleyemedik. Bu fonksiyonu belirlemek için üçüncü mertebe problemin çözümünü inceleyeceğiz.

Birinci ve ikinci mertebe problemlerin çözümleri (2.60) denkleminde kullanılırsa, üçüncü mertebe problem için aşağıdaki denklem elde edilir;

$$\mathscr{L}_0 u_3 = \Big[(\mathscr{D}_1 + \mathscr{D}_2 y)e^{ikpy} + (\mathscr{D}_3 + \mathscr{D}_4 y)e^{-ikpy}$$
$$+\mathscr{D}_5 e^{3ikpy} + \mathscr{D}_6 e^{-3ikpy}\Big]e^{i\phi} + \text{c.c.} + (e^{\pm 3i\phi}\text{'li terimler}). \qquad (2.108)$$

Burada $\mathscr{D}_i, \quad i = 1, ..., 6$ katsayıları,

$$\Upsilon_\alpha = \left(\frac{\partial R_\alpha}{\partial k} + V_g \frac{\partial R_\alpha}{\partial \omega}\right), \quad \alpha = 1, 2 \qquad (2.109)$$

tanımlanmak üzere

$$\mathscr{D}_1 = \Big[-3\mathscr{A}_1^2 k^4 \left(p^2+1\right)^2 \overline{\mathscr{A}_1} R_1^2 \overline{R_1} n_{0_T} - 2\mathscr{A}_1^2 k^4 \left(3p^4 - 2p^2 + 3\right) \overline{\mathscr{A}_1} R_1 R_2 \overline{R_2} n_{0_T}$$
$$+ c_{0_T}^2 \left(2\Upsilon_1 k + R_1\right) \frac{\partial^2 \mathscr{A}_1}{\partial x_1^2} + 2\Upsilon_1 \omega \frac{\partial^2 \mathscr{A}_1}{\partial x_1 \partial t_1} + 2ikc_{0_T}^2 R_1 \frac{\partial \mathscr{A}_1}{\partial x_2}$$
$$+ 2ikc_{0_T}^2 R_1 \frac{\partial \mathscr{A}_2}{\partial x_1} + 2iR_1 \omega \frac{\partial \mathscr{A}_1}{\partial t_2} + 2iR_1 \omega \frac{\partial \mathscr{A}_2}{\partial t_1} - R_1 \frac{\partial^2 \mathscr{A}_1}{\partial t_1^2}\Big],$$
$$\mathscr{D}_2 = -\frac{2iR_1}{k\mu_0 p \rho_0}\left[k\mu_0 \left(k\mu_0 \frac{\partial^2 \mathscr{A}_1}{\partial x_1^2} + 2\rho_0 \omega \frac{\partial^2 \mathscr{A}_1}{\partial x_1 \partial t_1}\right) + \rho_0^2 \omega^2 \frac{\partial^2 \mathscr{A}_1}{\partial t_1^2}\right],$$
$$\mathscr{D}_3 = \Big[-3\mathscr{A}_1^2 k^4 \left(p^2+1\right)^2 \overline{\mathscr{A}_1} R_2^2 \overline{R_2} n_{0_T} - 2\mathscr{A}_1^2 k^4 \left(3p^4 - 2p^2 + 3\right) \overline{\mathscr{A}_1} R_1 R_2 \overline{R_1} n_{0_T}$$
$$+ c_{0_T}^2 \left(2\Upsilon_2 k + R_2\right) \frac{\partial^2 \mathscr{A}_1}{\partial x_1^2} + 2\Upsilon_2 \omega \frac{\partial^2 \mathscr{A}_1}{\partial x_1 \partial t_1} + 2ikc_{0_T}^2 R_2 \frac{\partial \mathscr{A}_1}{\partial x_2}$$
$$+ 2ikc_{0_T}^2 R_2 \frac{\partial \mathscr{A}_2}{\partial x_1} + 2iR_2 \omega \frac{\partial \mathscr{A}_1}{\partial t_2} + 2iR_2 \omega \frac{\partial \mathscr{A}_2}{\partial t_1} - R_2 \frac{\partial^2 \mathscr{A}_1}{\partial t_1^2}\Big],$$
$$\mathscr{D}_4 = \frac{2iR_2}{k\mu_0 p \rho_0}\left[k\mu_0 \left(k\mu_0 \frac{\partial^2 \mathscr{A}_1}{\partial x_1^2} + 2\rho_0 \omega \frac{\partial^2 \mathscr{A}_1}{\partial x_1 \partial t_1}\right) + \rho_0^2 \omega^2 \frac{\partial^2 \mathscr{A}_1}{\partial t_1^2}\right],$$
$$\mathscr{D}_5 = k^4 n_{0_T} \left(9p^4 - 2p^2 - 3\right) \overline{R_2} R_1^2 \overline{\mathscr{A}_1} \mathscr{A}_1^2,$$
$$\mathscr{D}_6 = k^4 n_{0_T} \left(9p^4 - 2p^2 - 3\right) \overline{R_1} R_2^2 \overline{\mathscr{A}_1} \mathscr{A}_1^2 \qquad (2.110)$$

olarak tanımlanmaktadır. Üçüncü mertebe problemin çözümünde de ikinci mertebe problemin çözümündeki yol izlenirse,

$$u_3 = \bar{u}_3(x_0, x_1, x_2, y, t_0, t_1, t_2) + \tilde{u}_3(x_0, x_1, x_2, y, t_0, t_1, t_2) \qquad (2.111)$$

şeklinde çözüm aranır. Burada $\bar{u}_3$ ile (2.108) denkleminin özel çözümü gösterilmektedir ve $\tilde{u}_3$ ile ise

$$\mathscr{L}_0 \tilde{u}_3 = 0 \qquad (2.112)$$

denklemini ve

$$y=0; \qquad \tilde{u}_3=-\bar{u}_3, \tag{2.113}$$

$$y=h; \qquad \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial y}=-\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial y}-\frac{n_{0_T}}{c_{0_T}^2}\mathscr{K}(u_1)\frac{\partial u_1}{\partial y} \tag{2.114}$$

sınır koşullarını sağlayan çözümü gösterilmektedir. $\bar{u}_3$ özel çözümü,

$$\bar{u}_3^{(\ell)}=f_3^{(\ell)}(x_1,x_2,y,t_1,t_2)e^{i\ell\phi}+\text{c.c.}, \quad \ell=1,3 \tag{2.115}$$

olmak üzere

$$\bar{u}_3=\bar{u}_3^{(1)}(x_0,x_1,x_2,y,t_0,t_1,t_2)+\bar{u}_3^{(3)}(x_0,x_1,x_2,y,t_0,t_1,t_2) \tag{2.116}$$

şeklinde lineer bağımsız fonksiyonların toplamı olarak ifade edilir. $\ell=1$ için $f_3^{(1)}$ fonksiyonu

$$f_3^{(1)}=(\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2 y)ye^{ikpy}+(\mathscr{E}_3+\mathscr{E}_4 y)ye^{-ikpy}+\mathscr{E}_5 e^{3ikpy}+\mathscr{E}_6 e^{-3ikpy} \tag{2.117}$$

formunda seçilir. (2.117) formu, (2.115) ile verilen çözüm formunda yazılarak, (2.108) denkleminde kullanılırsa $\mathscr{E}_i$, $i=1,2,...,6$ katsayıları

$$\begin{aligned} &\mathscr{E}_1=i\mathscr{D}_1/2kpc_{0_T}^2-\mathscr{D}_2/4k^2p^2c_{0_T}^2, && \mathscr{E}_2=i\mathscr{D}_2/4kpc_{0_T}^2,\\ &\mathscr{E}_3=-i\mathscr{D}_3/2kpc_{0_T}^2-\mathscr{D}_4/4k^2p^2c_{0_T}^2, && \mathscr{E}_4=-i\mathscr{D}_4/4kpc_{0_T}^2,\\ &\mathscr{E}_5=\mathscr{D}_5/8k^2p^2c_{0_T}^2, && \mathscr{E}_6=\mathscr{D}_6/8k^2p^2c_{0_T}^2 \end{aligned} \tag{2.118}$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde $\bar{u}_3^{(3)}$ çözümü de bulunabilir, ancak hesaplarda $\bar{u}_3^{(3)}$ çözümünün açık ifadesine ihtiyaç olmadığından hesaplanmayacaktır. Böylece üçüncü mertebe problemin özel çözümü $\ell=1$ için elde edildi. Değişkenlere ayırma yöntemi kullanılarak, (2.112) denkleminin harmonik dalga çözümü,

$$\tilde{u}_3=\sum_{\ell=1}^{\infty}[A_3^{(\ell)}(x_1,x_2,t_1,t_2)e^{i\ell kpy}+B_3^{(\ell)}(x_1,x_2,t_1,t_2)e^{-i\ell kpy}]e^{i\ell\phi}+\text{c.c.} \tag{2.119}$$

biçiminde elde edlir. Burada ℓ pozitif bir tamsayıyı, $A_3^{(\ell)}$ ile $B_3^{(\ell)}$ de üçüncü mertebe dalga genliği fonksiyonlarını göstermektedir. Önceki problemlerde olduğu gibi (2.119) çözümü ile $u_1,\bar{u}_3$ çözümleri, (2.113)-(2.114) sınır koşullarında kullanılırsa

$$\mathbf{U}_3^{(\ell)}=\begin{bmatrix} A_3^{(\ell)}\\ B_3^{(\ell)}\end{bmatrix} \tag{2.120}$$

ve

$$\mathbf{W}_\ell = \begin{bmatrix} i\ell kpe^{i\ell kph} & -i\ell kpe^{-i\ell kph} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.121}$$

olmak üzere

$$\mathbf{W}_\ell \mathbf{U}_3^{(\ell)} = \mathbf{b}_3^{(\ell)} \tag{2.122}$$

şeklinde homojen olmayan lineer cebirseş denklem sistemi elde edilir. (2.122) sistemindeki $\mathbf{b}_3^{(\ell)}$ vektörleri $\ell = 1$ ve $\ell = 3$ için sıfırdan farklı, ancak $\ell \neq 1,3$ için özdeş olarak sıfırdır. Bazı ara işlemlerden sonra $\ell = 1$ için $\mathbf{b}_3^{(1)}$ vektörü

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_3^{(1)} = & -i\left(\frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega}\frac{\partial \mathscr{A}_2}{\partial t_1} - \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k}\frac{\partial \mathscr{A}_2}{\partial x_1}\right)\mathbf{R} - i\left(\frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega}\frac{\partial \mathscr{A}_1}{\partial t_2} - \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k}\frac{\partial \mathscr{A}_1}{\partial x_2}\right)\mathbf{R} \\ & + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \mathbf{W}_1}{\partial \omega^2}\frac{\partial^2 \mathscr{A}_1}{\partial t_1^2} - 2\frac{\partial^2 \mathbf{W}_1}{\partial \omega \partial k}\frac{\partial^2 \mathscr{A}_1}{\partial x_1 \partial t_1} + \frac{\partial^2 \mathbf{W}_1}{\partial k^2}\frac{\partial^2 \mathscr{A}_1}{\partial x_1^2}\right)\mathbf{R} \\ & + \left(\frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k}\frac{\partial^2 \mathscr{A}_1}{\partial x_1^2} - \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega}\frac{\partial^2 \mathscr{A}_1}{\partial x_1 \partial t_1}\right)\left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial k} + V_g\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \omega}\right) + \mathbf{F}|\mathscr{A}_1|^2\mathscr{A}_1 \end{aligned} \tag{2.123}$$

olarak ifade edilir. Buradaki $\mathbf{F}$ sütun vektörünün bileşenleri aşağıdaki şekildedir.

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{-in_{0_T}k^4h}{c_{0_T}^2}\sin(kph)(9p^4 + 2p^2 + 9), \\ F_2 &= 0. \end{aligned} \tag{2.124}$$

$\mathbf{b}_3^{(3)}$ vektörünün açık formu, sonraki hesaplarda kullanılmayacağından verilmeyecektir. (2.122) denklem sistemi $\ell = 1$ için incelenirse, $\det\mathbf{W}_1 = 0$ ve $\mathbf{b}_3^{(1)} \neq \mathbf{0}$ olduğundan, böyle bir sistemin çözümünün olması

$$\mathbf{L}\mathbf{b}_3^{(1)} = 0 \tag{2.125}$$

uygunluk koşuluna bağlıdır. $\ell = 3$ için $\det\mathbf{W}_3 \neq 0$ olduğundan, (2.122) denklem sisteminin çözümü

$$\mathbf{U}_3^{(3)} = \mathbf{W}_3^{-1}\mathbf{b}_3^{(3)} \tag{2.126}$$

şeklinde elde edilir. (2.122) denklem sisteminin $\ell \neq 1,3$ için çözümü, $\mathbf{b}_3^{(\ell)} = \mathbf{0}$ ve $\det\mathbf{W}_\ell \neq 0$ olduğundan,

$$\mathbf{U}_3^{(\ell)} = \mathbf{0} \tag{2.127}$$

olarak elde edilir. Birinci mertebe düzgün çözüm için $\mathbf{U}_3^{(\ell)}, \quad \ell = 1,3$ çözümlerinin açık yapılarına ihtiyaç yoktur. Yapılan analize (2.125) uygunluk koşulunu inceleyerek devam edelim. (2.103) ifadesi kullanılarak bu koşul hesaplanırsa,

$$i\left(\frac{\partial \mathscr{A}_1}{\partial t_2} + V_g\frac{\partial \mathscr{A}_1}{\partial x_2}\right) + \tilde{\Gamma}\frac{\partial^2 \mathscr{A}_1}{\partial x_1^2} + \tilde{\Delta}|\mathscr{A}_1|^2\mathscr{A}_1 + i\left(\frac{\partial \mathscr{A}_2}{\partial t_1} + V_g\frac{\partial \mathscr{A}_2}{\partial x_1}\right) = 0 \tag{2.128}$$

bağıntısı bulunur. Burada $\tilde{\Gamma}$ ve $\tilde{\Delta}$ sabitleri

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}=&-\Big[\frac{1}{2}\mathbf{L}\left(V_g^2\frac{\partial^2\mathbf{W}_1}{\partial\omega^2}+2V_g\frac{\partial^2\mathbf{W}_1}{\partial\omega\partial k}+\frac{\partial^2\mathbf{W}_1}{\partial k^2}\right)\mathbf{R}\\&+\mathbf{L}\left(\frac{\partial\mathbf{W}_1}{\partial k}+V_g\frac{\partial\mathbf{W}_1}{\partial\omega}\right)\left(\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial k}+V_g\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\omega}\right)\Big]\Big/\left(\mathbf{L}\frac{\partial\mathbf{W}_1}{\partial\omega}\mathbf{R}\right),\end{aligned} \tag{2.129}$$

$$\tilde{\Delta}=-\mathbf{L}\cdot\mathbf{F}\Big/\left(\mathbf{L}\frac{\partial\mathbf{W}_1}{\partial\omega}\mathbf{R}\right) \tag{2.130}$$

olarak tanımlanmaktadır. (2.128) bağıntısındaki $\mathscr{A}_2$ fonksiyonuyla ilgili terimler incelendiğinde, $\mathscr{A}_1$ fonksiyonunun yapısına paralel olarak, $\mathscr{A}_2$ fonksiyonunun yapısının

$$\frac{\partial\mathscr{A}_2}{\partial t_1}+V_g\frac{\partial\mathscr{A}_2}{\partial x_1}=0 \tag{2.131}$$

şeklinde olduğu kabul edilirse

$$\mathscr{A}_2=\mathscr{A}_2(x_1-V_gt_1,x_2,t_2) \tag{2.132}$$

olur. Bu durumda (2.128) denklemi, bilinmeyen fonksiyonu sadece $\mathscr{A}_1$ olan bir denkleme dönüşür. Dikkat edilirse, $\mathbf{W}_1\mathbf{R}=\mathbf{0}$ denklem sistemi k ya göre iki kez türetilerek, soldan $\mathbf{L}$ vektörü ile çarpılırsa ve elde edilen bağıntı (2.129) ile karşılaştırılırsa bu durumda aşağıdaki bağıntı elde edilir;

$$\tilde{\Gamma}=\frac{1}{2}\frac{dV_g}{dk}=\frac{1}{2}\frac{d^2\omega}{dk^2}. \tag{2.133}$$

(2.133) bağıntısı, (2.47) kullanılarak kolayca hesaplanabilir. Şimdi ilgili boyutsuz değişkenleri ve sabitleri aşağıdaki gibi tanımlayalım;

$$\begin{gathered}\tau=\omega t_2,\quad \xi=k\varepsilon^{-1}(x_2-V_gt_2)=k(x_1-V_gt_1),\\ \mathscr{A}=k\mathscr{A}_1,\quad \Gamma=k^2\tilde{\Gamma}/\omega,\quad \Delta=\tilde{\Delta}/\omega k^2.\end{gathered} \tag{2.134}$$

Bu durumda (2.131) kabulü altında, (2.128) denklemi

$$i\frac{\partial\mathscr{A}}{\partial\tau}+\Gamma\frac{\partial^2\mathscr{A}}{\partial\xi^2}+\Delta|\mathscr{A}|^2\mathscr{A}=0 \tag{2.135}$$

şekline dönüşür. Elde edilen bu denklem nonlineer Schrödinger (NLS) denklemidir ve bir çok alanda nonlineer dalga modülasyonunun asimptotik analizinde karakteristik denklem olarak ortaya çıkmaktadır [15–17]. Dikkatle incelendiğinde,

$$\mathscr{A}(\xi,0)=\mathscr{A}_0(\xi) \tag{2.136}$$

şeklinde bir başlangıç koşulunun verilmesi halinde (2.135) denkleminin çözümü bulunabilir ve bu çözüm (2.83) bağıntısında kullanılırsa birinci mertebe düzgün çözüm bulunur. (2.136) başlangıç koşulu tabakadaki yerdeğiştirmenin başlangıç değerine bağlıdır. Şimdi (2.135) denkleminin Γ ve Δ katsayılarını yakından inceleyelim. $\Gamma\Delta$ çarpımı hesaplandığında

$$\Gamma\Delta = -n_{0_T}\frac{p^2c_{0_T}^4}{4c^6}(9p^4+2p^2+9) \tag{2.137}$$

olduğu görülür. $c > c_{0_T}$ koşulu altında

$$\frac{p^2c_{0_T}^4}{4c^6}(9p^4+2p^2+9) > 0 \tag{2.138}$$

olduğundan

$$\mathrm{sign}(\Gamma\Delta) = -\mathrm{sign}(n_{0_T}) \tag{2.139}$$

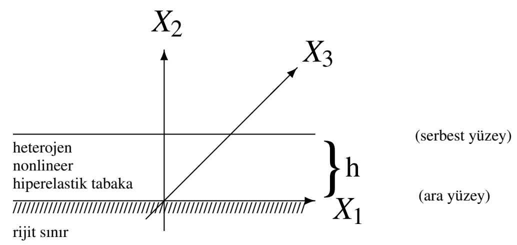
elde edilir. Dolayısıyla $c > c_{0_T}$ koşulu altında, ortam kaymada yumuşayan bir davranış gösteriyorsa, yani $n_{0_T} < 0$ ise $\Gamma\Delta > 0$; ortam kaymada sertleşen bir davranış gösteriyorsa, yani $n_{0_T} > 0$ ise $\Gamma\Delta < 0$ olur. NLS denkleminin bilinen bazı çözümleri ve çözümlerin $\Gamma\Delta$ çarpımı ile ilişkisi tezin dördüncü bölümünde verilmektedir.

3. HETEROJEN NONLİNEER HİPERELASTİK BİR TABAKADA SH DALGALARININ YAYILMASI

3.1 Giriş

Bu bölümde, rijit bir cisim üzerine oturtulmuş; düzgün kalınlıklı, heterojen, nonlineer, izotrop, hiperelastik bir tabakada küçük fakat sonlu genlikli SH dalgalarının yayılmasını temsil eden hareket denklemi ve bu harekete etkiyen sınır koşulları EK A'dan yararlanılarak türetilmektedir. Türetilen bu denklemlerde nonlineerliği temsil eden parametreye sıfır değeri verilerek lineer durumu temsil eden denklemleri elde etmek mümkündür. Dolayısıyla dalga hareketi önce lineerleştirilerek dalga yayılımının hangi şartlar altında var olacağı tartışılmaktadır. Bu tabakada yayılan lineer kayma dalgalarının faz hızı c_{0_T} ve dalgaların faz hızı c ile gösterilmek üzere $c < c_{0_T}\sqrt{1+(\beta^2/4k^2)}$ ve $c > c_{0_T}\sqrt{1+(\beta^2/4k^2)}$ durumları için dispersiyon bağıntıları bulunmaktadır. Burada β heterojenliği temsil eden bir parametre olmak üzere sıfırdan farklı bir reel sayıyı göstermektedir. Dalga yayılımının mümkün olduğu durum için nonlineer SH dalgalarının yayılımı incelenmektedir. Bu inceleme yapılırken çoklu ölçekler yöntemi kullanılmaktadır [15, 21]. Elde edilen sonuçlar sayısal olarak hesaplanarak grafikleri verilmektedir.

3.2 Problemin Tanımı ve Temel Denklemler



Şekil 3.1 : Heterojen nonlineer hiperelastik bir tabaka.

Tezin bu bölümünde, rijit bir cisim üzerine oturtulmuş; düzgün kalınlıklı, heterojen, izotrop, nonlineer, hiperelastik bir tabakada SH dalgalarının yayılımı problemi incelenecektir. Şimdi bu problemi tanımlayalım. Üç boyutlu uzayda bir noktanın, aynı dik kartezyen eksen takımına göre uzaysal ve maddesel koordinatları sırasıyla

(x_1,x_2,x_3) ve (X_1,X_2,X_3) üçlü sıralı sayıları ile gösterelim. Başlangıç durumunda, $h>0$ ile tabakanın kalınlığı gösterilmek üzere,

$$R=\{(X_1,X_2,X_3): -\infty<X_1<\infty, 0\leq X_2\leq h, -\infty<X_3<\infty\} \tag{3.1}$$

bölgesini dolduran hiperelastik bir malzemeden meydana gelen heterojen, izotrop, nonlineer, sonlu bir tabaka ele alalım. Bu tabakada X_1 ekseni boyunca yayılan ve (A.1) bağıntısından bilinen

$$x_k=X_K\delta_{kK}+u_3(X_\Delta,t)\delta_{k3} \tag{3.2}$$

denklemi ile tanımlanan kayma dalgalarını yani SH dalgalarını gözönüne alalım. (3.2) denkleminde t zamanı, δ_{kK} Kronecker sembolünü ve u_3'te bir parçacığın X_3 doğrultusundaki yerdeğiştirme fonksiyonunu göstermektedir. Ayrıca bu bölümde, Latin indislerinin $(1,2,3)$, Yunan indislerinin ise $(1,2)$ değerlerini alacaklarını ve (3.2)'de ve bundan sonra, tekrarlanan iki Latin indisi üzerinde 1'den 3'e kadar, tekrarlanan iki Yunan indisi üzerinde ise 1'den 2'ye kadar toplam yapılacağını kabul edelim. Tanımlanan bölgenin $X_2=h$ serbest yüzeyinde gerilmelerin sıfır olduğu kabul edilmektedir. Ayrıca $X_2=0$ ara yüzeyinde yerdeğiştirme sıfır olur. Harekete etkiyen kütle kuvvetleri bulunmadığında, (3.2) ile tanımlanan hareket denklemleri başlangıç durumunda, (A.11)'den yararlanılarak

$$T_{\Delta\beta,\Delta}=0, \quad T_{\Delta3,\Delta}=\rho_o\ddot{u}_3 \tag{3.3}$$

şeklinde yazılır. (3.3) denkleminde, T_{Kl} ile birinci tür Piola-Kirchoff gerilme tansörünün bileşenleri, $\ddot{u}_3$ ifadesindeki bir nokta zamana göre kısmi türevi ve virgülden sonra kullanılan alt indis de bu indisin belirttiği kartezyen koordinata göre kısmi türevi göstermektedir. $X_2=h$ serbest yüzeyinde gerilmelerin sıfır olduğu kabulünden ve $X_2=0$ ara yüzeyinde yerdeğiştirmenin sıfır olmasından aşağıdaki iki sınır koşulu yazılır:

$$X_2=h; \qquad T_{2k}=0, \tag{3.4}$$

$$X_2=0; \qquad u_3=0. \tag{3.5}$$

Gösterimde kolaylık olması bakımından bundan sonra (X_1,X_2,X_3) sıralı üçlüsü yerine (X,Y,Z) ve $u_3=u_3(X_1,X_2,t)$ yerdeğiştirme fonksiyonu yerine de $u=u(X,Y,t)$ fonksiyonu kullanılacaktır. Sonlu fakat küçük genlikli dalga yayılması problemleri inceleneceğinden, EK A'da yapılan çalışma dikkate alınarak, ilgili bünye bağıntılarının (3.3)'deki ilk iki denklemi özdeş olarak sağladığı kabul edilecektir. Bu kabul altında, (X,Y) düzleminde etkiyen sürekli kütle kuvvetleri bulunmadan, (3.2) ile tanımlanan hareket yaratılabilecektir. Bu durumdaki bir ortama ait bünye bağıntıları, tabaka sıkışabilir hiperelastik bir malzemeden oluştuğunda (A.55) ile sıkışmaz bir malzemeden oluştuğunda (A.92) ile genelleştirilmiş neo-Hookean malzemelerden oluştuğunda (A.99) ile verilir.

Bu problemde dalga yayılımına dik, tabaka derinliği doğrultusunda bir heterojen durum sözkonusu olduğundan, ortamın yoğunluğu $\rho = \rho(Y)$, ortamın rijitliği $\mu = \mu(Y)$, lineer dalgaların yayılma hızı $c_T = c_T(Y)$ ve nonlineer malzeme fonksiyonu $n_T = n_T(Y)$ biçimindedir. Bu fonksiyonların sürekli diferansiyellenebilir oldukları varsayılmaktadır. Bu çalışmada sonlu fakat küçük genlikli dalga yayılması söz konusu olup (X,Y) düzleminde etkiyen sürekli kütle kuvvetleri bulunmadan, dalga hareketi yaratılabilir. Kübik nonlineer terimlerden daha yüksek mertebedeki nonlineer terimler ihmal edilerek, hareket denklemi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_T^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}\right) - \frac{1}{\rho}\left[\frac{d}{dY}(\rho c_T^2)\frac{\partial u}{\partial Y}\right]$$
$$= n_T\left[\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial u}{\partial X}\mathscr{K}(u)\right) + \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial u}{\partial Y}\mathscr{K}(u)\right)\right] + \frac{\mathscr{K}(u)}{\rho}\left[\frac{d}{dY}(\rho n_T)\frac{\partial u}{\partial Y}\right] \tag{3.6}$$

şeklinde yazılır. (3.6) denklemindeki $\mathscr{K}$ fonksiyonu,

$$\mathscr{K}(u) = \left(\frac{\partial u}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial Y}\right)^2 \tag{3.7}$$

biçiminde verilir. Ayrıca burada c_T, lineer kayma dalgalarının faz hızını göstermektedir ve (A.51)'den

$$c_T^2 = \frac{\mu}{\rho} \tag{3.8}$$

eşitliği yazılabilir. Nonlineer malzeme özellikleriyle ilgili n_T fonksiyonu, ortamı oluşturan malzemenin sıkışabilir hiperelastik malzeme olması durumunda (A.57)'den

$$n_T = 4(c_{200} + c_{020} + c_{110})/\rho \tag{3.9}$$

sıkışmaz hiperelastik malzeme olması durumunda (A.93)'ten

$$n_T = 2(2c_{200} + c_{110})/\rho \tag{3.10}$$

genelleştirilmiş neo-Hookean malzeme olması durumunda (A.100)'den

$$n_T = 4c_{200}/\rho \tag{3.11}$$

olarak tanımlanır. Tezin ikinci bölümünde tanımlanan problemde ortam homojen olup, bu bölümde tanımlanan problemde ortam heterojendir. Dolayısıyla bu problemde nonlineer durumun yanı sıra dalga yayılımına dik, tabaka derinliği doğrultusunda bir heterojen durum ele alınacaktır. Yine kübik nonlineer terimlerden daha yüksek mertebedeki nonlineer terimler ihmal edilerek (3.6) denkleminin sınır koşulları da ele alınan hiperelastik malzemeler için aşağıdaki gibi elde edilir.

$$Y = h; \qquad \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{n_T}{c_T^2}\mathscr{K}(u)\frac{\partial u}{\partial Y} = 0, \tag{3.12}$$

$$Y = 0; \qquad u = 0. \tag{3.13}$$

3.3 Lineer Dalgaların Yayılması ve Dispersiyon Bağıntıları

Bu bölümde sonraki çalışmalarımıza yol göstermesi açısından ele aldığımız problem lineerleştirilecektir. (3.6) denkleminde ve (3.12)-(3.13) sınır koşullarında nonlineer parametre $n_T = 0$ alınarak, lineer dalgaların yayılmasını modelleyen problem aşağıdaki şekilde verilir:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_T^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}\right) - \frac{1}{\rho}\left[\frac{d(\rho c_T^2)}{dY}\frac{\partial u}{\partial Y}\right] = 0, \tag{3.14}$$

$$Y = h; \qquad \frac{\partial u}{\partial Y} = 0, \tag{3.15}$$

$$Y = 0; \qquad u = 0. \tag{3.16}$$

X doğrultusunda yayılan harmonik dalgalar için (3.14) denkleminin çözümünü

$$u = U(Y)e^{i(kX-\omega t)} + \text{c.c.} \tag{3.17}$$

formunda arayalım. Burada c.c. sembolü ile önceki terimin kompleks eşleniği, k ile dalga sayısı ve ω ile de açısal frekans gösterilmektedir. Ayrıca dalgaların faz hızı

$$c = \omega/k \tag{3.18}$$

ile tanımlanır. (3.17) çözüm formu, (3.14) denkleminde ve (3.15)-(3.16) sınır koşullarında kullanılırsa,

$$\frac{d^2U}{dY^2} + \frac{\mu'}{\mu}\frac{dU}{dY} + k^2\left(\frac{c^2}{c_T^2} - 1\right)U = 0 \tag{3.19}$$

denklemi ve

$$Y = h; \qquad \frac{dU}{dY} = 0, \tag{3.20}$$

$$Y = 0; \qquad U = 0 \tag{3.21}$$

sınır koşulları elde edilir. (3.19) denklemine,

$$U = \frac{V}{\sqrt{\mu}}; \qquad \mu = \mu(Y), \quad V = V(Y) \tag{3.22}$$

dönüşümü uygulanırsa,

$$\frac{d^2V}{dY^2} + \left[\frac{1}{4\mu^2}\left(\frac{d\mu}{dY}\right)^2 - \frac{1}{2\mu}\frac{d^2\mu}{dY^2} + k^2\left(\frac{c^2}{c_T^2} - 1\right)\right]V = 0 \tag{3.23}$$

denklemi elde edilir [3]. Burada,

$$h(Y) = -\left[\frac{1}{4\mu^2}\left(\frac{d\mu}{dY}\right)^2 - \frac{1}{2\mu}\frac{d^2\mu}{dY^2} + k^2\left(\frac{c^2}{c_T^2} - 1\right)\right] \tag{3.24}$$

tanımlanmak üzere;

$$h = h(Y) = \text{sabit} > 0 \tag{3.25}$$

kabulü altında (3.23) denkleminin çözümü, H_1 ve H_2 sabitler olmak üzere

$$V(Y) = H_1 e^{\sqrt{h}Y} + H_2 e^{-\sqrt{h}Y} \tag{3.26}$$

biçiminde verilir. Yani (3.23) denkleminin çözümü üstel fonksiyonlar cinsinden elde edilir. Ortamın yoğunluğu ve lineer kayma modülü özel olarak,

$$\mu = \mu_0 e^{\beta Y}, \quad \rho = \rho_0 e^{\beta Y} \tag{3.27}$$

biçimde seçilirse (3.24) ile tanımlanan fonksiyon sabit olur. Dolayısıyla (3.23) denkleminin çözümü üstel fonksiyonlar cinsinden verilebilir. (3.27) seçimi Avtar [42] tarafından da kullanılmıştır.

$Y = 0$ rijit sınırında, ortamın lineer kayma modülü ve yoğunluğu sırasıyla $\mu = \mu_0, \rho = \rho_0$ sabitleri ile başlamaktadır. Y değeri artıkça ortamın lineer kayma modülü ve yoğunluğu üstel olarak artmaktadır. Dolayısıyla Y değerine bağlı olarak lineer kayma modülü ve yoğunluk değiştiğinden heterojen bir durum sözkonusudur. Dikkat edilirse (3.27) seçiminde $\beta \to 0$ limiti alındığında ortamın lineer kayma modülü ve yoğunluğu sabit olmaktadır. Burada β parametresi heterojenlikten homojenliğe geçiş için kullanılabilmektedir ve sıfırdan farklı reel bir sayıyı temsil etmektedir. (3.27) seçimi altında (3.23) denklemi

$$\frac{d^2V}{dY^2} + \left[k^2\left(\frac{c^2}{c_{0_T}^2} - 1\right) - \frac{\beta^2}{4}\right]V = 0 \tag{3.28}$$

biçimine indirgenir. (3.28) denklemi, ikinci mertebeden sabit katsayılı homojen bir denklemdir ve $c_{0_T}^2 = \mu_0/\rho_0$ biçiminde tanımlanmaktadır. Burada ortamdaki lineer kayma dalgalarının faz hızı ile dalgaların faz hızı arasında

$$c > c_{0_T}\sqrt{1+(\beta^2/4k^2)} \tag{3.29}$$

veya

$$c < c_{0_T}\sqrt{1+(\beta^2/4k^2)} \tag{3.30}$$

durumları sözkonusudur. Şimdi bu durumları yakından inceleyelim.

3.3.1 $c > c_{0_T}\sqrt{1+(\beta^2/4k^2)}$ durumu

Bu bölümde $c > c_{0_T}\sqrt{1+(\beta^2/4k^2)}$ koşulu altında, (3.19) denklemi ve (3.20)-(3.21) sınır koşulları ile verilen sınır değer problemi incelenecektir. (3.19) denkleminin (3.27) seçimi altında, (3.28) denklemine dönüştüğünden söz etmiştik. (3.28) denkleminin çözümü, (3.22) dönüşümünde kullanılırsa, (3.19) denkleminin çözümü, $c > c_{0_T}\sqrt{1+(\beta^2/4k^2)}$ koşulu altında

$$U(Y) = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 e^{\beta Y}}}(Ae^{ikpY} + Be^{-ikpY}) \tag{3.31}$$

biçiminde elde edilir. Burada p,

$$p = \left(\frac{c^2}{c_{0_T}^2} - \frac{\beta^2}{4k^2} - 1\right)^{1/2} \tag{3.32}$$

olarak tanımlanmaktadır. (3.31) çözümü, (3.20)-(3.21) sınır koşullarında kullanılırsa,

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \tag{3.33}$$

ve

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \left(-\frac{\beta}{2} + ikp\right)e^{ikph} & \left(-\frac{\beta}{2} - ikp\right)e^{-ikph} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.34}$$

olarak tanımlanmak üzere

$$\mathbf{WU} = \mathbf{0} \tag{3.35}$$

homojen lineer denklem sistemi elde edilir. Böyle bir sistemin sıfır çözümünden farklı bir çözüme sahip olması için

$$\det\mathbf{W} = 0 \tag{3.36}$$

olmalıdır. (3.36) koşulundan

$$2kp\cos(kph) - \beta\sin(kph) = 0 \tag{3.37}$$

bağıntısı elde edilir. Bu bağıntı, faz hızı $c > c_{0_T}\sqrt{1+(\beta^2/4k^2)}$ eşitsizliğini sağlayan SH dalgalarına ait dispersiyon bağıntısıdır. Dikkat edilirse (3.37) bağıntısında, $\beta \to 0$ limiti alındığında (2.30) ile verilen dispersiyon bağıntısı elde edilir.

3.3.2 $c < c_{0_T}\sqrt{1+(\beta^2/4k^2)}$ durumu

Bu bölümde $c < c_{0_T}\sqrt{1+(\beta^2/4k^2)}$ koşulu altında, (3.19) denklemi ve (3.20)-(3.21) sınır koşulları ile verilen sınır değer problemi incelenecektir. (3.19) denkleminin (3.27) seçimi altında, (3.28) denklemine dönüştüğünden söz etmiştik. (3.28) denkleminin çözümü, (3.22) dönüşümünde kullanılırsa, (3.19) denkleminin çözümü, $c < c_{0_T}\sqrt{1+(\beta^2/4k^2)}$ koşulu altında

$$U(Y) = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 e^{\beta Y}}}\left(Ae^{kqY} + Be^{-kqY}\right) \tag{3.38}$$

şeklinde elde edilir. Burada q,

$$q = \left(1 + \frac{\beta^2}{4k^2} - \frac{c^2}{c_{0_T}^2}\right)^{1/2} \tag{3.39}$$

olarak tanımlanmaktadır. (3.38) çözümü, (3.20)-(3.21) sınır koşullarında kullanılırsa,

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \tag{3.40}$$

ve

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \left(-\frac{\beta}{2} + kq\right)e^{kqh} & \left(-\frac{\beta}{2} - kq\right)e^{-kqh} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.41}$$

olarak tanımlanmak üzere

$$\mathbf{WU} = \mathbf{0} \tag{3.42}$$

homojen lineer cebirsel denklem sistemi elde edilir. Böyle bir sistemin sıfır çözümden farklı bir çözüme sahip olması için

$$\det\mathbf{W} = 0 \tag{3.43}$$

olmalıdır. (3.43) koşulundan

$$2kq\cosh(kqh) - \beta\sinh(kqh) = 0 \tag{3.44}$$

bağıntısı elde edilir. Bu bağıntı, faz hızı $c < c_{0_T}\sqrt{1+(\beta^2/4k^2)}$ eşitsizliğini sağlayan SH dalgalarına ait dispersiyon bağıntısıdır. Bu bağıntıyı sağlayacak şekilde reel bir k sayısı bulunmadığından, $c < c_{0_T}\sqrt{1+(\beta^2/4k^2)}$ olması halinde, SH dalgaları varolmamaktadır. Yani faz hızı $c_{0_T}\sqrt{1+(\beta^2/4k^2)}$'den küçük dalgalar yayılmazlar.

3.3.3 Dispersiyon bağıntısı

Yukarıdaki bölümlerde (3.19) denklemi ve (3.20)-(3.21) sınır koşullarıyla verilen lineer dalga yayılımını temsil eden sınır değer problemini $c > c_{0_T}\sqrt{1+(\beta^2/4k^2)}$ ve $c < c_{0_T}\sqrt{1+(\beta^2/4k^2)}$ koşulları altında inceledik ve her bir durum için dispersiyon bağıntılarını elde ettik. (3.37) bağıntısı, (3.32)'den yararlanılarak

$$2k\left(\frac{c^2}{c_{0_T}^2}-\frac{\beta^2}{4k^2}-1\right)^{1/2}\cos\left[kh\left(\frac{c^2}{c_{0_T}^2}-\frac{\beta^2}{4k^2}-1\right)^{1/2}\right]$$

$$-\beta\sin\left[kh\left(\frac{c^2}{c_{0_T}^2}-\frac{\beta^2}{4k^2}-1\right)^{1/2}\right]=0 \qquad (3.45)$$

formunda yazılır. Şimdi (3.45) denklemi için aşağıdaki tanımları yapalım.

$$C=\frac{c}{c_{0_T}}, \quad K=kh, \quad B=\beta h. \qquad (3.46)$$

Burada C ile boyutsuz grup hızı, K ile boyutsuz dalga sayısı ve B ile heterojenliği temsil eden sıfırdan farklı boyutsuz bir parametre temsil edilmektedir. (3.46)'deki tanımları kullanarak, (3.45) bağıntısını

$$D(C,K):=2K\left(C^2-\frac{B^2}{4K^2}-1\right)^{1/2}\cos\left[K\left(C^2-\frac{B^2}{4K^2}-1\right)^{1/2}\right]$$

$$-B\sin\left[K\left(C^2-\frac{B^2}{4K^2}-1\right)^{1/2}\right]=0 \qquad (3.47)$$

biçiminde ifade edelim. (3.47) denklemi değişkenleri (C,K) olan bir denklemdir. Kapalı fonksiyon teoremine göre, (3.47) dispersiyon bağıntısını sağlayan (C_0,K_0) noktası civarında $\partial D/\partial C$ ve $\partial D/\partial K$ kısmi türevleri sürekli ve

$$\frac{\partial D}{\partial C}\neq 0 \qquad (3.48)$$

ise (3.47) denklemi bu nokta civarında

$$C=C(K) \qquad (3.49)$$

formunda fonksiyonları kapalı olarak tanımlar. (3.49) ifadesinde, fiziksel olarak dalgaların boyutsuz faz hızı C, boyutsuz dalga sayısı K'ya bağlıdır. (3.47) denklemi bünyesinde trigonometrik fonksiyon barındırdığından, peryodik yapıdadır. Yani (3.49) formunda birden fazla fonksiyon, (3.47) denklemini sağlamaktadır. (3.49) denklemini sağlayan her bir fonksiyon dispersiyon bağıntısının bir dalına karşı gelir. Dikkat edilirse, (3.49) eşitliği ile verilen $C = C(K)$ fonksiyonları denklemin yapısı gereği

$$K\left(C^2 - \frac{B^2}{4K^2} - 1\right)^{1/2} = \arctan\left[\frac{2K\left(C^2 - \frac{B^2}{4K^2} - 1\right)^{1/2}}{B}\right] + n\pi \tag{3.50}$$

biçiminde elde edilir. Burada n ile de sıfır yada pozitif olan herhangi bir tamsayı gösterilmek üzere dispersiyon bağıntısındaki herhangi bir dal temsil edilmektedir. C ve K değişkenlerinin fiziksel büyüklük olması sebebiyle (3.50) eşitliği ile verilen fonksiyonlar,

$$K > 0, \quad C > \sqrt{\frac{B^2}{4K^2} + 1} > 1 \tag{3.51}$$

eşitsizlikleriyle verilen bölgede tanımlıdırlar. EK B bölümünde verilen Şekil B.1, Şekil B.3, Şekil B.5, Şekil B.7, Şekil B.9 ve Şekil B.11'de boyutsuz faz hızı C'nin, boyutsuz dalga sayısı K'ya göre değişimleri sırasıyla $B \to 0$ limiti (homojen ortam), $B = 0.5, 1.0, 1.5, 10, 20$ değerleri, (3.47) dispersiyon bağıntısının ilk altı dalı ve (2.44) modeli için verilmektedir. Şekil B.1, Şekil B.3, Şekil B.5, Şekil B.7, Şekil B.9, Şekil B.11'de B'ye farklı değerler verilerek heterojenliğin faz hızı üzerine etkisi ortaya çıkarılmıştır. Boyutsuz dalga sayısının küçük değerleri için yani $K \to 0$ için $C \to \infty$ elde edilir. Ayrıca boyutsuz dalga sayısının büyük değerleri için yani $K \to \infty$ için $C \to 1$ elde edilir. Yani boyutsuz dalga sayısı K, $(0, \infty)$ aralığında değiştiğinde; boyutsuz faz hızı C, $(1, \infty)$ aralığında değer almaktadır. (3.51) ile verilen $C = \sqrt{1 + (B^2/4K^2)}$ eğrisi faz hızı için bir alt sınır eğrisi gibi davranmaktadır. Bir başka ifadeyle eğri asimptot olduğu söylenebilir. Bu bölümle ilgili şekiller çizdirilirken bu asimptotun grafiği de kırmızı renk kullanılarak verilmektedir. Şimdi dalgaların grup hızıyla ilgilenelim. (3.18) bağıntısından yararlanarak, (3.45) dispersiyon bağıntısı açısal frekans cinsinden

$$\begin{aligned} &2k\left(\frac{\omega^2}{k^2 c_{0_T}^2} - \frac{\beta^2}{4k^2} - 1\right)^{1/2} \cos\left[kh\left(\frac{\omega^2}{k^2 c_{0_T}^2} - \frac{\beta^2}{4k^2} - 1\right)^{1/2}\right] \\ &\qquad -\beta \sin\left[kh\left(\frac{\omega^2}{k^2 c_{0_T}^2} - \frac{\beta^2}{4k^2} - 1\right)^{1/2}\right] = 0 \end{aligned} \tag{3.52}$$

biçiminde elde edilir. Burada $\omega = \omega(k)$ olup ω fonksiyonunun k'ya göre birinci mertebe türevi, (3.52) eşitliği kullanılarak

$$V_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c_{0_T}^2}{c} \tag{3.53}$$

biçiminde elde edilir. Tezin daha sonraki kısımlarında gerekli olacağından ω fonksiyonunun k'ya göre ikinci mertebe türevi de aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\frac{dV_g}{dk} = \frac{d^2\omega}{dk^2} = \frac{c_{0_T}^2}{\omega}\left(1 - \frac{c_{0_T}^2}{c^2}\right). \tag{3.54}$$

(3.54) eşitliği

$$\frac{k^2}{\omega}\frac{dV_g}{dk} = \frac{c_{0_T}^2}{c^2}\left(1 - \frac{c_{0_T}^2}{c^2}\right), \tag{3.55}$$

biçiminde boyutsuzlaştırılabilir. Ortamdaki dalgaların grup hızı V_g, (3.53) eşitliğinden yararlanılarak aşağıdaki şekilde boyutsuzlaştırılabilir.

$$V_G = \frac{V_g}{c_{0_T}} = \frac{c_{0_T}}{c}. \tag{3.56}$$

Burada V_G, boyutsuz grup hızını göstermektedir. V_G ve K değişkenlerinin fiziksel büyüklük olması sebebiyle (3.56) eşitliği ile verilen fonksiyonlar, (V_G, K) düzleminin

$$K > 0, \quad 1/\sqrt{1 + (B^2/4K^2)} > V_G > 0 \tag{3.57}$$

eşitsizlikleriyle verilen bölgesinde tanımlıdırlar. EK B bölümünde verilen Şekil B.2, Şekil B.4, Şekil B.6, Şekil B.8, Şekil B.10 ve Şekil B.12'de boyutsuz grup hızı V_G'nin boyutsuz dalga sayısı K'ya göre değişimleri sırasıyla $B \to 0$ limiti (homojen ortam), $B = 0.5, 1.0, 1.5, 10, 20$ değerleri, (3.47) dispersiyon bağıntısının ilk altı dalı ve (2.44) modeli için verilmektedir. Şekil B.2, Şekil B.4, Şekil B.6, Şekil B.8, Şekil B.10 ve Şekil B.12'de B'ye farklı değerler verilerek heterojenliğin grup hızı üzerine etkisi ortaya çıkarılmıştır. Boyutsuz dalga sayısının küçük değerleri için yani $K \to 0$ için $V_G \to 0$ elde edilir. Ayrıca boyutsuz dalga sayısının büyük değerleri için yani $K \to \infty$ için $V_G \to 1$ elde edilir. Yani boyutsuz dalga sayısı K, $(0, \infty)$ aralığında değiştiğinde; boyutsuz grup hızı V_G, $(0, 1)$ aralığında değer almaktadır. Burada $V_G = 1/\sqrt{1 + (B^2/4K^2)}$ eğrisi grup hızı için bir üst sınır eğrisi gibi davranmaktadır. Bir başka ifadeyle eğri asimptot olduğu söylenebilir. Bu bölümle ilgili şekiller çizdirilirken bu asimptotun grafiği de kırmızı renk kullanılarak çizdirilmiştir. Sonuç olarak, boyutsuz dalga sayısı K'nın yeterince büyük değerleri için, boyutsuz faz hızı C ile boyutsuz grup hızı V_G'nin $C = 1$ veya $V_G = 1$ doğrusunda birbirine yaklaştıkları gözlenmiştir ve B değerleri 0'dan 20'ye değiştiğinde, (3.47) dispersiyon bağıntısının dallarının birbirine yaklaştığı görülmektedir.

3.4 Heterojen Bir Ortamda Nonlineer SH Dalgaları

3.4.1 Giriş

Bir önceki bölümde heterojen, bir yüzeyi sabitlenmiş bir tabakada lineer SH dalgaların yayılması ele alınmış ve $c > c_{0_T}\sqrt{1+(\beta^2/4k^2)}$ eşitsizliğinin gerçeklenmesi durumunda lineer SH dalgalarının yayılabileceği gösterilmiştir. Bu bölümde lineer özellikleri $c > c_{0_T}\sqrt{1+(\beta^2/4k^2\ell^2)}$ eşitsizliğini sağlayan, (3.1) tabakasında küçük fakat sonlu genlikli nonlineer SH dalgaların self modülasyonu, bir asimptotik perturbasyon yöntemi olan çoklu ölçekler yöntemi kullanılarak incelenecektir.

3.4.2 $c > c_{0_T}\sqrt{1+(\beta^2/4k^2\ell^2)}$ için asimptotik analiz

Nonlineer SH dalgalarının self modülasyonu için X, Y ve t değişkenleri yerine

$$x_i = \varepsilon^i X, \quad t_i = \varepsilon^i t, \quad y = Y, \quad i = 0,1,2 \tag{3.58}$$

bağıntıları ile yeni değişkenleri tanımlayalım ve yer değiştirme fonksiyonu u'nun bu yeni değişkenlerin bir fonksiyonu olduğunu kabul edelim. Burada ε nonlineer yapının mertebesini belirten küçük pozitif bir parametre, yayılma olayının hızlı değişimini karakterize eden değişkenler x_0, y, t_0 ve yavaş değişimi karakterize eden değişkenler x_1, x_2, t_1, t_2 ile gösterilmektedir. Şimdi u fonksiyonunun, $\{\varepsilon^n\}$ asimptotik dizisine göre

$$u \sim \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n(x_0, x_1, x_2, y, t_0, t_1, t_2) \tag{3.59}$$

formunda düzgün olarak geçerli asimptotik açılıma sahip olduğunu kabul edelim. Eski ve yeni bağımsız değişkenlere göre türev operatörleri arasında

$$\frac{\partial}{\partial X} = \sum_{i=0}^{2} \varepsilon^i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \sum_{i=0}^{2} \varepsilon^i \frac{\partial}{\partial t_i}, \quad \frac{\partial}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial y} \tag{3.60}$$

bağıntıları vardır. (3.60) bağıntısı dikkate alınarak, (3.6)'daki denkleme ve (3.12)-(3.13) sınır koşullarına (3.58) dönüşümü uygulanır ve daha sonra (3.59)'da verilen asimptotik açılım kullanılırsa, ε'un aynı kuvvetlerinin katsayıları eşitlenerek u_n'nin ardışık olarak hesaplanabileceği bir problemler hiyerarşisi elde edilir. Katsayı fonksiyonları $c_T = c_T(y)$, $\mu = \mu(y)$, $\rho = \rho(y)$ ve $n_T = n_T(y)$ olmak üzere üçüncü mertebeye kadar olan pertürbasyon problemleri aşağıda verilmektedirler;

$\mathscr{O}(\varepsilon)$:

$$\mathscr{L}_0 u_1 = 0, \tag{3.61}$$

$$y = h; \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0, \tag{3.62}$$

$$y = 0; \quad u_1 = 0, \tag{3.63}$$

$\mathscr{O}(\varepsilon^2)$:

$$\mathscr{L}_0 u_2 = \mathscr{L}_1 u_1, \tag{3.64}$$

$$y = h; \quad \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0, \tag{3.65}$$

$$y = 0; \quad u_2 = 0, \tag{3.66}$$

$\mathscr{O}(\varepsilon^3)$:

$$\mathscr{L}_0 u_3 = \mathscr{L}_1 u_2 + \mathscr{L}_2 u_1 + \mathscr{N}(u_1), \tag{3.67}$$

$$y = h; \quad \frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{n_T}{c_T^2}\mathscr{K}(u_1)\frac{\partial u_1}{\partial y} = 0, \tag{3.68}$$

$$y = 0; \quad u_3 = 0. \tag{3.69}$$

Burada $\mathscr{L}_i, \quad i = 0,1,2;$ $\mathscr{N}$ ve $\mathscr{K}$ diferansiyel operatörleri

$$\mathscr{L}_o \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t_0^2} - c_T^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) - \frac{\mu'}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial y}, \tag{3.70}$$

$$\mathscr{L}_1 \psi = 2 \left(c_T^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_0 \partial x_1} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t_0 \partial t_1} \right), \tag{3.71}$$

$$\mathscr{L}_2 \psi = c_T^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_0 \partial x_2} \right) - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t_1^2} - 2\frac{\partial^2 \psi}{\partial t_0 \partial t_2}, \tag{3.72}$$

$$\mathscr{N}(\psi) = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\rho n_T \mathscr{K}(\psi)\frac{\partial \psi}{\partial x_0} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho n_T \mathscr{K}(\psi)\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right], \tag{3.73}$$

$$\mathscr{K}(\psi) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \tag{3.74}$$

olarak tanımlanmaktadırlar. Analize bundan sonra $n_T = n_T(y)$ olmak üzere, (3.27) seçiminde (3.58) dönüşümü uygulanarak, yani

$$\mu = \mu_0 e^{\beta y}, \quad \rho = \rho_0 e^{\beta y} \tag{3.75}$$

seçimi altında devam edeceğiz. Bu seçim altında $c_T = c_{0_T} = \sqrt{\mu_0/\rho_0}$ olur. Yani lineer dalgaların yayılım hızı sabittir.

Dikkat edilirse (3.61) denklemi ve (3.62)-(3.63) sınır koşulları ile tanımlanan birinci mertebe perturbasyon problemi ile (3.14) denklemi ve (3.15)-(3.16) sınır koşulları ile verilen lineer problem eş yapıdadır. Birinci mertebe perturbasyon probleminde, lineer problemdeki

$$u = u(X,Y,t) \tag{3.76}$$

fonksiyonu yerine

$$u_1 = u_1(x_0,x_1,x_2,y,t_0,t_1,t_2) \tag{3.77}$$

fonksiyonu kullanılmaktadır. (3.76) ile verilen fonksiyonu (3.14) denkleminden belirlemek mümkündür. Ancak (3.77) ile verilen fonksiyonun, analizden görülebileceği gibi, x_0, y ve t_0 değişkenlerine bağlılıklarının yapısı açık olarak hesaplanabilmekle birlikte diğer değişkenlere bağlılığı daha üst mertebeden problemlerin çözümlerinden belirlenebilmektedir. Mertebe problemlerine dikkat edilirse, birinci mertebe problem homojen yapıda olup ikinci ve üçüncü mertebe problemler homojen olmayan yapıdadır. Ayrıca birinci mertebe problemin çözümü, ikinci mertebe problemdeki denklemin sağ tarafında kullanılırsa ikinci mertebe problem lineer olur. Benzer şekilde birinci ve ikinci mertebe problemlerin çözümleri, üçüncü mertebe problemdeki denklemin sağ tarafında kullanılırsa üçüncü mertebe problem de lineer olur. Şimdi mertebe problemlerinin ilk adımı olan birinci mertebe problemin çözümüyle ilgilenelim. Birinci problemin çözümü inşa edilirken dalgaların var olması durumu yani $c > c_{0_T}\sqrt{1+(\beta^2/4k^2\ell^2)}$ eşitsizliğinin geçerli olması halinde analiz yapılacaktır. Analize (3.61) denklemi, (3.62)-(3.63) sınır koşullarıyla tanımlanan birinci mertebe problem ile devam edilecektir. (3.61) denklemine, değişkenlere ayırma yöntemi uygulanarak, harmonik dalgalar için çözüm aşağıdaki formda elde edilir:

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 e^{\beta y}}} \sum_{\ell=1}^{\infty} \left[A_1^{(\ell)}(x_1,x_2,t_1,t_2)e^{i\ell ksy} + B_1^{(\ell)}(x_1,x_2,t_1,t_2)e^{-i\ell ksy} \right] e^{i\ell\phi} + \text{c.c.}. \tag{3.78}$$

Burada ℓ pozitif bir tamsayıyı, k dalga sayısını, ω açısal frekansı göstermek üzere $c = \omega/k$ faz hızını, c.c. sembolü kendinden önce gelen terimlerin kompleks eşleniğini göstermektedir. Ayrıca s ve ϕ

$$s = \left(\frac{c^2}{c_{0_T}^2} - \frac{\beta^2}{4k^2\ell^2} - 1 \right)^{1/2}, \quad \phi = kx_0 - \omega t_0 \tag{3.79}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. (3.78) çözümü, (3.62)-(3.63) sınır koşullarında kullanılırsa

$$\mathbf{U}_1^{(\ell)} = \begin{bmatrix} A_1^{(\ell)} \\ B_1^{(\ell)} \end{bmatrix} \tag{3.80}$$

ve

$$\mathbf{W}_\ell = \begin{bmatrix} \left(-\frac{\beta}{2} + iks\ell\right) e^{iks\ell h} & \left(-\frac{\beta}{2} - iks\ell\right) e^{-iks\ell h} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.81}$$

olmak üzere

$$\mathbf{W}_\ell \mathbf{U}_1^{(\ell)} = \mathbf{0} \tag{3.82}$$

homojen lineer cebirsel denklem sistemi elde edilir. Dikkat edilirse $\ell = 1$ için (3.81) ile tanımlanan $\mathbf{W}_1$ matrisi, (3.34) ile tanımlanan matrise özdeştir. (3.82) ile ifade edilen sistemin $\ell = 1$ için sıfır çözümden farklı bir çözüme sahip olması için

$$\det \mathbf{W}_1 = \det \mathbf{W} = 0 \tag{3.83}$$

olmalıdır. Bu bağıntı ancak (3.37) eşitliği ile verilen dispersiyon bağıntısının sağlanmasıyla mümkün olacaktır. Bu çalışmada bir k dalga sayısı civarında merkezlenmiş bir dalga katarının nonlineer self modülasyonu incelenmektedir. Bu amaçla yayılan dalgaların dalga sayılarının harmonik rezonans koşulunu sağlamadığı varsayılacaktır, yani

$$\ell \geq 2 \quad \text{için} \quad \det \mathbf{W}_\ell \neq 0 \tag{3.84}$$

bağıntısı sağlanmalıdır. Bu koşul altında (3.82) denklem sisteminin çözümleri, $\mathbf{R}$

$$\mathbf{W}_1 \mathbf{R} = \mathbf{0} \tag{3.85}$$

denklemini sağlayan bir sütun vektörü göstermek üzere,

$$\ell = 1 \quad \text{için} \quad \mathbf{U}_1^{(1)} = \mathscr{A}_1(x_1, x_2, t_1, t_2)\mathbf{R} \tag{3.86}$$

ve

$$\ell \geq 2 \quad \text{için} \quad \mathbf{U}_1^{(\ell)} = \mathbf{0} \tag{3.87}$$

olarak elde edilir. (3.85) denklem sisteminin bir çözümü

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-\frac{\beta}{2}+ikp}{\frac{\beta}{2}+ikp} e^{2ikph} \end{bmatrix} \tag{3.88}$$

şeklinde bulunur. Burada p, (3.32) ile tanımlıdır. (3.78) çözümünde, (3.86) ile (3.87) bağıntıları kullanılırsa birinci mertebe çözüm

$$u_1 = \frac{\mathscr{A}_1(x_1, x_2, t_1, t_2)}{\sqrt{\mu_0 e^{\beta y}}} (R_1 e^{ikpy} + R_2 e^{-ikpy}) e^{i\phi} + \text{c.c.} \tag{3.89}$$

olarak elde edilir. (3.89) çözümü

$$u_1 = \frac{R_1 \mathscr{A}_1(x_1,x_2,t_1,t_2)}{\sqrt{\mu_0 e^{\beta y}}} \left(e^{ikpy} + \frac{R_2}{R_1} e^{-ikpy} \right) e^{i\phi} + \text{c.c.} \tag{3.90}$$

biçiminde yeniden düzenlenebilir. Dispersiyon bağıntısından dolayı (3.90) çözümü

$$u_1 = \frac{2i\mathscr{A}_1(x_1,x_2,t_1,t_2)}{\sqrt{\mu_0 e^{\beta y}}} \sin(kpy) e^{i\phi} + \text{c.c.} \tag{3.91}$$

şekline dönüşür. Burada birinci mertebe çözüm, dalga modülasyonu birinci mertebe yavaş değişen kompleks genlik fonksiyonu olan $\mathscr{A}_1$'e bağlı bulunmuştur. $\mathscr{A}_1$ fonksiyonu da daha yüksek mertebe problemlerinden belirlenecektir.

Şimdi (3.64) denklemi ve (3.65)-(3.66) sınır koşullarıyla verilen ikinci mertebe problem ile ilgilenelim. Birinci mertebe problemin çözümünü ifade eden (3.89) eşitliği, (3.64) denkleminde kullanılırsa

$$\mathscr{L}_0 u_2 = \frac{2i\mathscr{M}_{11}}{\sqrt{\mu_0 e^{\beta y}}} \left(R_1 e^{ikpy} + R_2 e^{-ikpy} \right) e^{i\phi} + \text{c.c.} \tag{3.92}$$

denklemi elde edilir. Burada

$$\mathscr{M}_{11} = \omega \frac{\partial \mathscr{A}_1}{\partial t_1} + k c_{0_T}^2 \frac{\partial \mathscr{A}_1}{\partial x_1} \tag{3.93}$$

olarak tanımlanmaktadır. Dikkat edilirse (3.92) denklemi homojen olmayan bir yapıya sahiptir. Böyle bir denklemin genel çözümü, homojen denklemin çözümüne özel bir çözümü eklemekle bulunur. Dolayısıyla (3.92) denkleminin genel çözümü,

$$u_2 = \bar{u}_2(x_0,x_1,x_2,y,t_0,t_1,t_2) + \tilde{u}_2(x_0,x_1,x_2,y,t_0,t_1,t_2) \tag{3.94}$$

formunda aranır. Burada $\bar{u}_2$ ile (3.92) denkleminin özel çözümü ve $\tilde{u}_2$ ile ise

$$\mathscr{L}_0 \tilde{u}_2 = 0 \tag{3.95}$$

denklemi ve

$$y = 0; \qquad \tilde{u}_2 = -\bar{u}_2 \tag{3.96}$$

$$y = h; \qquad \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial y} \tag{3.97}$$

sınır koşullarını sağlayan çözümünü gösterelim. (3.95) ile verilen homojen denklemin çözümü, (3.96)-(3.97) sınır koşullarında kullanılacaktır. Şimdi analize, (3.92) denkleminin özel çözümünün bulunmasıyla devam edelim. Bunun için özel çözüm formunu

$$\bar{u}_2 = f_2(x_1,x_2,y,t_1,t_2)e^{i\phi} + \text{c.c.} \tag{3.98}$$

şeklinde seçelim. Bu özel çözüm formu (3.92) denkleminde kullanılırsa

$$\left[\frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} + \beta\frac{\partial f_2}{\partial y} + k^2\left(\frac{c^2}{c_{0_T}^2} - 1\right) f_2\right] e^{i\phi} + \text{c.c.} = \frac{-2i\mathscr{M}_{11}e^{i\phi}}{c_{0_T}^2\sqrt{\mu_0 e^{\beta y}}}\left(R_1 e^{ikpy} + R_2 e^{-ikpy}\right) + \text{c.c.} \tag{3.99}$$

elde edilir. (3.99) denklemine

$$f_2(x_1,x_2,y,t_1,t_2) = X(x_1,x_2,t_1,t_2)Y(y) \tag{3.100}$$

dönüşümü uygulanırsa

$$X\left[\frac{d^2Y}{dy^2} + \beta\frac{dY}{dy} + k^2\left(\frac{c^2}{c_{0_T}^2} - 1\right) Y\right] e^{i\phi} + \text{c.c.} = \frac{-2i\mathscr{M}_{11}e^{i\phi}}{c_{0_T}^2\sqrt{\mu_0 e^{\beta y}}}\left(R_1 e^{ikpy} + R_2 e^{-ikpy}\right) + \text{c.c.} \tag{3.101}$$

denklemi elde edilir. x_1,x_2,y,t_1,t_2 bağımsız değişkenlerinin bağlılıkları gözönüne alınarak karşılıklı eşitlenirse

$$g(y) = -\frac{1}{c_{0_T}^2\sqrt{\mu_0 e^{\beta y}}}\left(R_1 e^{ikpy} + R_2 e^{-ikpy}\right) \tag{3.102}$$

olmak üzere

$$X(x_1,x_2,t_1,t_2) = 2i\mathscr{M}_{11} \tag{3.103}$$

ve

$$\frac{d^2Y}{dy^2} + \beta\frac{dY}{dy} + k^2\left(\frac{c^2}{c_{0_T}^2} - 1\right) Y = g(y) \tag{3.104}$$

denklemleri elde edilir. Şimdi (3.104) denkleminin özel çözümüyle ilgilenelim. (3.104) denklemi ikinci mertebeden sabit katsayılı homojen olmayan bir denklemdir. (3.104) denkleminin homojen kısmı

$$\frac{d^2Y}{dy^2} + \beta\frac{dY}{dy} + k^2\left(\frac{c^2}{c_{0_T}^2} - 1\right) Y = 0 \tag{3.105}$$

biçimindedir. (3.104) denkleminin özel çözümünü bulmak için, parametrelerin değişimi yöntemini kullanalım. Bu durumda (3.105) homojen denkleminin çözümünün yapısının ilk olarak belirlenmesi gerekmektedir. Dolayısıyla (3.105) denklemine

$$Y(y) = e^{ry} \tag{3.106}$$

dönüşümü uygulanırsa

$$r^2+\beta r+k^2\left(\frac{c^2}{c_{0_T}^2}-1\right)=0 \tag{3.107}$$

karakteristik denklemi elde edilir. Bu durumda (3.105) denkleminin homojen çözümü

$$Y_h(y)=Cy_1(y)+Dy_2(y) \tag{3.108}$$

biçiminde elde edilir. Burada C ve D sabitlerdir ve

$$y_1(y)=\frac{e^{ikpy}}{\sqrt{\mu_0 e^{\beta y}}},\quad y_2(y)=\frac{e^{-ikpy}}{\sqrt{\mu_0 e^{\beta y}}} \tag{3.109}$$

şeklindedir. Burada (3.108) çözümündeki sabitlere değişken gözüyle bakılarak, (3.104) denkleminin özel çözümü

$$Y(y)=z(y)y_1(y)+v(y)y_2(y) \tag{3.110}$$

biçiminde aranır. (3.110) eşitliğinin y değişkenine göre birinci mertebeden türevi

$$Y'(y)=z'(y)y_1(y)+z(y)y_1'(y)+v'(y)y_2(y)+v(y)y_2'(y) \tag{3.111}$$

biçiminde hesaplanır. $z'(y)$ ve $v'(y)$ türevlerini azaltmak amacıyla parametrelerin değişimi yönteminden

$$z'(y)y_1(y)+v'(y)y_2(y)=0 \tag{3.112}$$

kabul edilebilir. Bu durumda (3.111) ifadesi

$$Y'(y)=z(y)y_1'(y)+v(y)y_2'(y) \tag{3.113}$$

ifadesine indirgenir. (3.113) eşitliğinin y değişkenine göre ikinci mertebeden türevi

$$Y''(y)=z'(y)y_1'(y)+z(y)y_1''(y)+v'(y)y_2'(y)+v(y)y_2''(y) \tag{3.114}$$

biçiminde hesaplanır. (3.110), (3.113) ve (3.114) eşitliklerinden sırasıyla $Y(y),Y'(y)$ ve $Y''(y)$ ifadeleri (3.104) denkleminde yazılırsa

$$\begin{aligned}z'(y)y_1'(y)+z(y)y_1''(y)+v'(y)y_2'(y)+v(y)y_2''(y)+\beta\left[z(y)y_1'(y)+v(y)y_2'(y)\right]\\+k^2\left(\frac{c^2}{c_{0_T}^2}-1\right)\left[z(y)y_1(y)+v(y)y_2(y)\right]=g(y)\end{aligned} \tag{3.115}$$

denklemi elde edilir. (3.115) denklemi

$$z(y)\left[y_1''(y)+\beta y_1'(y)+k^2\left(\frac{c^2}{c_{0_T}^2}-1\right)y_1(y)\right]+v(y)\left[y_2''(y)+\beta y_2'(y)+k^2\left(\frac{c^2}{c_{0_T}^2}-1\right)y_2(y)\right]$$

$$+z'(y)y_1'(y)+v'(y)y_2'(y)=g(y) \tag{3.116}$$

biçiminde yeniden düzenlenebilir. $y_1(y)$ ve $y_2(y)$ homojen çözümler olduğundan (3.105) denklemini sağlar. Dolayısıyla (3.116) denklemi

$$z'(y)y_1'(y)+v'(y)y_2'(y)=g(y) \tag{3.117}$$

biçimine indirgenir. Bu durumda (3.112) ve (3.117) denklemlerinden oluşan ve bilinmeyenleri $z(y)$ ve $v(y)$ olan aşağıdaki lineer denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned} z'(y)y_1(y)+v'(y)y_2(y)&=0, \\ z'(y)y_1'(y)+v'(y)y_2'(y)&=g(y). \end{aligned} \tag{3.118}$$

Cramer kuralı kullanılarak (3.118) sisteminin çözümü

$$\begin{aligned} z'(y)&=\frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(y) \\ g(y) & y_2'(y) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(y) & y_2(y) \\ y_1'(y) & y_2'(y) \end{vmatrix}}=-\frac{y_2(y)g(y)}{W[y_1(y),y_2(y)]}, \\ v'(y)&=\frac{\begin{vmatrix} y_1(y) & 0 \\ y_1'(y) & g(y) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(y) & y_2(y) \\ y_1'(y) & y_2'(y) \end{vmatrix}}=\frac{y_1(y)g(y)}{W[y_1(y),y_2(y)]} \end{aligned} \tag{3.119}$$

biçiminde bulunur. Burada $W[y_1(y),y_2(y)]$ ile $y_1(y)$, $y_2(y)$ homojen çözümlerin Wronskiyeni gösterilmektedir. (3.119) eşitliklerinin her iki tarafından y değişkenine göre integral alınırsa, $z(y)$ ve $v(y)$ bilinmeyenleri

$$\begin{aligned} z(y)&=-\int\frac{y_2(y)g(y)}{W[y_1(y),y_2(y)]}dy, \\ v(y)&=\int\frac{y_1(y)g(y)}{W[y_1(y),y_2(y)]}dy \end{aligned} \tag{3.120}$$

biçiminde bulunur. Dolayısıyla, (3.104) denkleminin özel çözümü aşağıdaki gibidir.

$$Y(y)=-y_1(y)\int_{\theta=0}^{y}\frac{y_2(\theta)g(\theta)}{W[y_1(\theta),y_2(\theta)]}d\theta+y_2(y)\int_{\theta=0}^{y}\frac{y_1(\theta)g(\theta)}{W[y_1(\theta),y_2(\theta)]}d\theta. \tag{3.121}$$

Bu durumda (3.103) ve (3.121) ifadeleri (3.100)'de yazılarak, (3.92) denkleminin özel çözümü bulunur. Birinci mertebe problemin çözümünde olduğu gibi değişkenlere ayırma yöntemi kullanılarak, (3.95) homojen denkleminin çözümü

$$\tilde{u}_2=\frac{1}{\sqrt{\mu_0 e^{\beta y}}}\sum_{\ell=1}^{\infty}\left[A_2^{(\ell)}(x_1,x_2,t_1,t_2)e^{i\ell ksy}+B_2^{(\ell)}(x_1,x_2,t_1,t_2)e^{-i\ell ksy}\right]e^{i\ell\phi}+\text{c.c.} \tag{3.122}$$

şeklinde bulunur. Burada $A_2^{(\ell)}$ ve $B_2^{(\ell)}$ ikinci mertebe yavaş değişen dalga genliği fonksiyonlarıdır ve bunlar (3.96)-(3.97) sınır koşullarından belirlenecektir. (3.122) çözümü, (3.96)-(3.97) sınır koşullarında kullanılırsa

$$\mathbf{U}_2^{(\ell)} = \begin{bmatrix} A_2^{(\ell)} \\ B_2^{(\ell)} \end{bmatrix} \tag{3.123}$$

ve

$$\mathbf{W}_\ell = \begin{bmatrix} \left(-\frac{\beta}{2} + iks\ell\right) e^{iks\ell h} & \left(-\frac{\beta}{2} - iks\ell\right) e^{-iks\ell h} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.124}$$

$$\mathbf{W}_\ell \mathbf{U}_2^{(\ell)} = \mathbf{b}_2^{(\ell)} \tag{3.125}$$

homojen olmayan lineer cebirsel denklem sistemi elde edilir. Burada $\mathbf{b}_2^{(\ell)}$ sütun vektörlerinin, $\ell = 1$ için bileşenleri

$$b_{2_1}^{(1)} = \frac{\mathscr{M}_{11}}{2kpc_{0_T}^2}\left[(2-\beta h + 2ikph)R_1 e^{ikph} + (-2+\beta h + 2ikph)R_2 e^{-ikph}\right],$$

$$b_{2_2}^{(1)} = 0 \tag{3.126}$$

ve $\ell \geq 2$ için

$$\mathbf{b}_2^{(\ell)} = \mathbf{0} \tag{3.127}$$

biçiminde elde edilir. $\mathbf{W}_1$ matrisinin ve $\mathbf{R}$ vektörünün tanımları kullanılarak

$$\mathbf{b}_2^{(1)} = -i\left(\frac{\partial \mathscr{A}_1}{\partial t_1}\frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega} - \frac{\partial \mathscr{A}_1}{\partial x_1}\frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k}\right)\mathbf{R} \tag{3.128}$$

olarak yazılabilir. $\det\mathbf{W}_1 = 0$ ve $\mathbf{b}_2^{(1)} \neq \mathbf{0}$ olduğundan, $\ell = 1$ için (3.125) denklem sisteminin çözümünün olması için $\mathbf{L}$

$$\mathbf{L}\mathbf{W}_1 = \mathbf{0} \tag{3.129}$$

ile tanımlanan bir satır vektörü olmak üzere

$$\mathbf{L}\mathbf{b}_2^{(1)} = 0 \tag{3.130}$$

uygunluk koşulunun sağlanması gerekir. (3.129) bağıntısını sağlayan bir satır vektör

$$\mathbf{L} = [L_1, L_2] = \left[i, \left(kp + \frac{i\beta}{2}\right)e^{ikph}\right] \tag{3.131}$$

biçiminde hesaplanır. (3.85) bağıntısı k ya göre türetilirse

$$\left(\frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k} + V_g\frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega}\right)\mathbf{R} + \mathbf{W}_1\left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial k} + V_g\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \omega}\right) = \mathbf{0} \tag{3.132}$$

elde edilir. Burada V_g, (3.53) ile tanımlı olup grup hızını göstermektedir. (3.132) eşitliği sol taraftan $\mathbf{L}$ satır vektörüyle çarpılırsa ve (3.129) eşitliği kullanılırsa

$$V_g = -\left(\mathbf{L}\frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k}\mathbf{R}\right) / \left(\mathbf{L}\frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega}\mathbf{R}\right) \tag{3.133}$$

bulunur. (3.133) dikkate alınarak, (3.128) eşitliği kullanılırsa (3.130) uygunluk koşulundan

$$\frac{\partial \mathscr{A}_1}{\partial t_1} + V_g \frac{\partial \mathscr{A}_1}{\partial x_1} = 0 \tag{3.134}$$

elde edilir. Elde edilen bu denklem $\mathscr{A}_1$ genlik fonksiyonunun sağlaması gereken bir denklem olup, dalgaların grup hızı V_g ile ilerleyen bir referans çerçevesinde $\mathscr{A}_1$'in sabit kaldığını göstermektedir, yani $\mathscr{A}_1$ fonksiyonu

$$\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_1(x_1 - V_g t_1, x_2, t_2) \tag{3.135}$$

yapısında olacaktır.

(3.132) ve (3.134) bağıntıları gözönüne alınırsa, (3.125) denklem sisteminin $\ell = 1$ için çözümü

$$\mathbf{U}_2^{(1)} = \mathscr{A}_2(x_1, x_2, t_1, t_2)\mathbf{R} - i\frac{\partial \mathscr{A}_1}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial k} + V_g \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \omega}\right) \tag{3.136}$$

olarak elde edilir. Burada $\mathscr{A}_2$ dalga modülasyonunun yavaş değişen ikinci mertebe genliğini temsil etmektedir ve ihtiyaç halinde daha yüksek mertebe pertürbasyon problemlerinden elde edilebilmektedir. Bu çalışmada sonlu fakat küçük genlikli dalga yayılımıyla ilgilenildiğinden sadece birinci mertebe düzgün geçerli çözüm elde edilecektir. Bu amaçla $\mathscr{A}_1$ genlik fonksiyonunu tam olarak belirlemek yeterlidir.

$\ell \neq 1$ için $\det \mathbf{W}_1 \neq 0$ kabul edildiğinden ve $\ell \neq 1$ için $\mathbf{b}_2^{(\ell)} = \mathbf{0}$ olduğundan, (3.125) denklem sisteminin çözümü,

$$\ell \geq 2 \quad \text{için} \quad \mathbf{U}_2^{(\ell)} = \mathbf{0} \tag{3.137}$$

biçiminde elde edilir. Ancak şimdiye kadar yapılan hesaplarla, birinci mertebe problemin çözümünde ihtiyacımız olan $\mathscr{A}_1$ fonksiyonunu tam olarak belirleyemedik. Bu fonksiyonu belirlemek için üçüncü mertebe problemin çözümünü inceleyeceğiz. Birinci ve ikinci mertebe problemlerin çözümleri (3.67) denkleminde kullanılırsa, üçüncü mertebe problem için aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\mathscr{L}_0 u_3 = \sum_{j=1}^{12} \mathscr{D}_j(x_1, x_2, t_1, t_2) g_j(y) e^{i\phi} + \text{c.c.} + (e^{\pm 3i\phi}\text{'li terimler}) \tag{3.138}$$

Burada, $\mathscr{D}_j = \mathscr{D}_j(x_1,x_2,t_1,t_2), \quad j=1,2,3,...,12$ olmak üzere

$$\mathscr{D}_1 = -\frac{1}{16}\mathscr{A}_1^2 R_1 \overline{\mathscr{A}_1}\Big[2R_2\overline{R_2}\Big(-3\beta^4+16k^4\left(3p^4-2p^2+3\right)+16i\beta k^3 p\left(3p^2-1\right)$$
$$+12i\beta^3 kp\Big)+3R_1\overline{R_1}\Big(-\beta^4+16k^4\left(p^2+1\right)^2+16i\beta k^3\left(p^3+p\right)+4i\beta^3 kp\Big)\Big],$$

$$\mathscr{D}_2 = \frac{1}{8}i\mathscr{A}_1^2 R_1\overline{\mathscr{A}_1}\Big[2R_2\overline{R_2}(2kp-i\beta)\left(-3\beta^2+4k^2\left(3p^2-1\right)+12i\beta kp\right)$$
$$+R_1\overline{R_1}\left(3i\beta^3+24k^3\left(p^3+p\right)+4ik^2\left(\beta+3\beta p^2\right)+6\beta^2 kp\right)\Big],$$

$$\mathscr{D}_3 = \Big[c_{0_T}^2\left(2k\Upsilon_1+R_1\right)\frac{\partial^2\mathscr{A}_1}{\partial x_1^2}+2\omega\Upsilon_1\frac{\partial^2\mathscr{A}_1}{\partial x_1\partial t_1}-R_1\frac{\partial^2\mathscr{A}_1}{\partial t_1^2}$$
$$+2ikc_{0_T}^2 R_1\left(\frac{\partial\mathscr{A}_2}{\partial x_1}+\frac{\partial\mathscr{A}_1}{\partial x_2}\right)+2i\omega R_1\left(\frac{\partial\mathscr{A}_2}{\partial t_1}+\frac{\partial\mathscr{A}_1}{\partial t_2}\right)\Big],$$

$$\mathscr{D}_4 = -\frac{2iR_1}{kpc_{0_T}^2}\Big[kc_{0_T}^2\left(kc_{0_T}^2\frac{\partial^2\mathscr{A}_1}{\partial x_1^2}+2\omega\frac{\partial^2\mathscr{A}_1}{\partial x_1\partial t_1}\right)+\omega^2\frac{\partial^2\mathscr{A}_1}{\partial t_1^2}\Big],$$

$$\mathscr{D}_5 = \frac{1}{16}\mathscr{A}_1^2 R_2\overline{\mathscr{A}_1}\Big[2R_1\overline{R_1}\Big(3\beta^4-16k^4\left(3p^4-2p^2+3\right)+16i\beta k^3 p\left(3p^2-1\right)$$
$$+12i\beta^3 kp\Big)+3R_2\overline{R_2}\Big(\beta^4-16k^4\left(p^2+1\right)^2+16i\beta k^3\left(p^3+p\right)+4i\beta^3 kp\Big)\Big],$$

$$\mathscr{D}_6 = -\frac{1}{8}i\mathscr{A}_1^2 R_2\overline{\mathscr{A}_1}\Big[2R_1\overline{R_1}(2kp+i\beta)\Big(-3\beta^2+4k^2\left(3p^2-1\right)-12i\beta kp\Big)$$
$$+R_2\overline{R_2}\Big(-3i\beta^3+24k^3\left(p^3+p\right)-4ik^2\left(\beta+3\beta p^2\right)+6\beta^2 kp\Big)\Big],$$

$$\mathscr{D}_7 = \Big[c_{0_T}^2\left(2k\Upsilon_2+R_2\right)\frac{\partial^2\mathscr{A}_1}{\partial x_1^2}+2\omega\Upsilon_2\frac{\partial^2\mathscr{A}_1}{\partial x_1\partial t_1}-R_2\frac{\partial^2\mathscr{A}_1}{\partial t_1^2}$$
$$+2ikc_{0_T}^2 R_2\left(\frac{\partial\mathscr{A}_2}{\partial x_1}+\frac{\partial\mathscr{A}_1}{\partial x_2}\right)+2i\omega R_2\left(\frac{\partial\mathscr{A}_2}{\partial t_1}+\frac{\partial\mathscr{A}_1}{\partial t_2}\right)\Big],$$

$$\mathscr{D}_8 = \frac{2iR_2}{kpc_{0_T}^2}\Big[kc_{0_T}^2\left(kc_{0_T}^2\frac{\partial^2\mathscr{A}_1}{\partial x_1^2}+2\omega\frac{\partial^2\mathscr{A}_1}{\partial x_1\partial t_1}\right)+\omega^2\frac{\partial^2\mathscr{A}_1}{\partial t_1^2}\Big],$$

$$\mathscr{D}_9 = \frac{1}{16}\mathscr{A}_1^2\overline{\mathscr{A}_1}R_1^2\overline{R_2}\Big[3\beta^4+16k^4\left(9p^4-2p^2-3\right)+16i\beta k^3 p\left(15p^2-1\right)$$
$$-144\beta^2k^2p^2-36i\beta^3 kp\Big],$$

$$\mathscr{D}_{10} = \frac{1}{8}\mathscr{A}_1^2\overline{\mathscr{A}_1}R_1^2\overline{R_2}(\beta-2ikp)\Big[-3\beta^2+4k^2\left(3p^2-1\right)+12i\beta kp\Big],$$

$$\mathscr{D}_{11} = \frac{1}{16}\mathscr{A}_1^2\overline{\mathscr{A}_1}R_2^2\overline{R_1}\Big[3\beta^4 + 16k^4\left(9p^4 - 2p^2 - 3\right) + 16i\beta k^3 p\left(1 - 15p^2\right)$$
$$-144\beta^2k^2p^2 + 36i\beta^3kp\Big],$$

$$\mathscr{D}_{12} = \frac{1}{8}\mathscr{A}_1^2\overline{\mathscr{A}_1}R_2^2\overline{R_1}(\beta + 2ikp)\Big[-3\beta^2 + 4k^2\left(3p^2 - 1\right) - 12i\beta kp\Big] \tag{3.139}$$

ve

$$\begin{aligned}
g_1(y) &= n_T(\mu_0 e^{\beta y})^{-3/2}e^{ikpy}, & g_2(y) &= n_T'(\mu_0 e^{\beta y})^{-3/2}e^{ikpy},\\
g_3(y) &= (\mu_0 e^{\beta y})^{-1/2}e^{ikpy}, & g_4(y) &= y(\mu_0 e^{\beta y})^{-1/2}e^{ikpy},\\
g_5(y) &= n_T(\mu_0 e^{\beta y})^{-3/2}e^{-ikpy}, & g_6(y) &= n_T'(\mu_0 e^{\beta y})^{-3/2}e^{-ikpy},\\
g_7(y) &= (\mu_0 e^{\beta y})^{-1/2}e^{-ikpy}, & g_8(y) &= y(\mu_0 e^{\beta y})^{-1/2}e^{-ikpy},\\
g_9(y) &= n_T(\mu_0 e^{\beta y})^{-3/2}e^{3ikpy}, & g_{10}(y) &= n_T'(\mu_0 e^{\beta y})^{-3/2}e^{3ikpy},\\
g_{11}(y) &= n_T(\mu_0 e^{\beta y})^{-3/2}e^{-3ikpy}, & g_{12}(y) &= n_T'(\mu_0 e^{\beta y})^{-3/2}e^{-3ikpy}
\end{aligned} \tag{3.140}$$

olarak tanımlanmaktadır. Burada $n_T' = \frac{dn_T}{dy}$'dir. Ayrıca Υ_α ifadesi

$$\Upsilon_\alpha = \frac{\partial R_\alpha}{\partial k} + V_g\frac{\partial R_\alpha}{\partial \omega}, \quad \alpha = 1,2 \tag{3.141}$$

şeklindedir. Üçüncü mertebe problemin çözümünde de ikinci mertebe problemin çözümündeki yol izlenirse,

$$u_3 = \bar{u}_3(x_0,x_1,x_2,y,t_0,t_1,t_2) + \tilde{u}_3(x_0,x_1,x_2,y,t_0,t_1,t_2) \tag{3.142}$$

şeklinde genel çözümü aranır. Burada $\bar{u}_3$ ile (3.138) denkleminin özel çözümü ve $\tilde{u}_3$ ile ise

$$\mathscr{L}_0\tilde{u}_3 = 0 \tag{3.143}$$

denklemini ve

$$y = 0; \qquad \tilde{u}_3 = -\bar{u}_3 \tag{3.144}$$

$$y = h; \qquad \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial y} - \frac{n_T}{c_{0_T}^2}\mathscr{K}(u_1)\frac{\partial u_1}{\partial y} \tag{3.145}$$

sınır koşullarını sağlayan çözümünü gösterelim. $\bar{u}_3$ özel çözümü,

$$\bar{u}_3^{(\ell)} = f_3^{(\ell)}(x_1,x_2,y,t_1,t_2)e^{i\ell\phi} + \text{c.c.}, \quad \ell = 1,3 \tag{3.146}$$

olmak üzere

$$\bar{u}_3 = \bar{u}_3^{(1)}(x_0,x_1,x_2,y,t_0,t_1,t_2) + \bar{u}_3^{(3)}(x_0,x_1,x_2,y,t_0,t_1,t_2) \tag{3.147}$$

biçimde seçilir. (3.147) özel çözüm formu, (3.138) denkleminde kullanırsa

$$\left[\frac{\partial^2 f_3^{(1)}}{\partial y^2}+\beta\frac{\partial f_3^{(1)}}{\partial y}+k^2\left(\frac{c^2}{c_{0_T}^2}-1\right)f_3^{(1)}\right]e^{i\phi}+\text{c.c.}+(e^{\pm 3i\phi}\text{'li terimler})$$

$$=-\frac{1}{c_{0_T}^2}\sum_{j=1}^{12}\mathscr{D}_j(x_1,x_2,t_1,t_2)g_j(y)e^{i\phi}+\text{c.c.}+(e^{\pm 3i\phi}\text{'li terimler}) \qquad (3.148)$$

denklemi elde edilir. Birinci mertebe düzgün çözüm için $\bar{u}_3^{(3)}$ çözümünün açık yapısına ihtiyaç yoktur. (3.148) denklemine

$$f_3^{(1)}(x_1,x_2,y,t_1,t_2)=\sum_{j=1}^{12}X_j(x_1,x_2,t_1,t_2)Y_j(y) \qquad (3.149)$$

dönüşümü uygulanırsa

$$\sum_{j=1}^{12}X_j\left[Y_j''+\beta Y_j'+k^2\left(\frac{c^2}{c_{0_T}^2}-1\right)Y_j\right]e^{i\phi}+\text{c.c.}+(e^{\pm 3i\phi}\text{'li terimler})$$

$$=-\frac{1}{c_{0_T}^2}\sum_{j=1}^{12}\mathscr{D}_j(x_1,x_2,t_1,t_2)g_j(y)e^{i\phi}+\text{c.c.}+(e^{\pm 3i\phi}\text{'li terimler}) \qquad (3.150)$$

denklemi elde edilir. x_1,x_2,y,t_1,t_2 bağımsız değişkenlerinin bağlılıkları gözönünde tutularak karşılıklı eşitlenirse

$$X_j=-\frac{1}{c_{0_T}^2}\mathscr{D}_j(x_1,x_2,t_1,t_2), \qquad j=1,2,3,...,12 \qquad (3.151)$$

ve

$$Y_j''+\beta Y_j'+k^2\left(\frac{c^2}{c_{0_T}^2}-1\right)Y_j=g_j(y), \qquad j=1,2,3,...,12 \qquad (3.152)$$

denklemleri elde edilir. (3.151) denklemlerinden x_1,x_2,t_1,t_2 değişkenlarine ait bağlılıkları açıkça görülmekte olup buna karşın (3.152) denklemlerinde y değişkenine ait bağlılıklar ikinci mertebeden sabit katsayılı diferansiyel denklemler olarak ortaya çıkmaktadır. Bu durumda (3.138) denkleminin özel çözümünün bulunması (3.152) denklemlerinin özel çözümlerinin bulunmasına bağlıdır. (3.152) denklemleriyle verilen diferansiyel denklemler sağ yanlı olmaları sebebiyle homojen olmayan yapıdadırlar. Bu tip denklemlerin önce homojen kısmı çözülmelidir. (3.152) denklemlerinin homojen kısımları

$$Y_j''+\beta Y_j'+k^2\left(\frac{c^2}{c_{0_T}^2}-1\right)Y_j=0, \quad j=1,2,3,...,12 \qquad (3.153)$$

biçimindedir. (3.153) denklemlerine

$$Y_j(y)=e^{r_j y}, \quad j=1,2,3,...,12 \qquad (3.154)$$

dönüşümleri uygulanırsa

$$r_j^2+\beta r_j+k^2\left(\frac{c^2}{c_{0_T}^2}-1\right)=0, \quad j=1,2,3,...,12 \tag{3.155}$$

karakteristik denklemleri elde edilir. Bu durumda (3.153) denklemlerinin homojen çözümleri

$$Y_{j_h}(y)=C_j y_1(y)+D_j y_2(y), \quad j=1,2,3,...,12 \tag{3.156}$$

biçiminde elde edilir. Burada $j=1,2,3,...,12.$ olmak üzere C_j ve D_j sabitlerdir ve

$$y_1(y)=\frac{e^{ikpy}}{\sqrt{\mu_0 e^{\beta y}}}, \quad y_2(y)=\frac{e^{-ikpy}}{\sqrt{\mu_0 e^{\beta y}}} \tag{3.157}$$

şeklindedir. (3.152) denklemlerinin özel çözümlerini bulmak için parametrelerin değişimi yöntemini uygulayalım. Bu durumda (3.156) çözümlerindeki sabitlere değişken gözüyle bakılarak, (3.152) denklemlerinin özel çözümleri

$$Y_j(y)=z_j(y)y_1(y)+v_j(y)y_2(y), \quad j=1,2,3,...,12 \tag{3.158}$$

biçiminde aranır. (3.158) eşitliklerinin y değişkenine göre birinci mertebeden türevleri $j=1,2,3,...,12$ olmak üzere

$$Y_j'(y)=z_j'(y)y_1(y)+z_j(y)y_1'(y)+v_j'(y)y_2(y)+v_j(y)y_2'(y) \tag{3.159}$$

biçiminde hesaplanır. $z_j'(y)$ ve $v_j'(y)$ türevlerini azaltmak amacıyla parametrelerin değişimi yönteminden

$$z_j'(y)y_1(y)+v_j'(y)y_2(y)=0, \quad j=1,2,3,...,12 \tag{3.160}$$

kabul edilebilir. Bu durumda (3.159) ifadesi

$$Y_j'(y)=z_j(y)y_1'(y)+v_j(y)y_2'(y), \quad j=1,2,3,...,12 \tag{3.161}$$

ifadesine indirgenir. (3.161) eşitliğinin y değişkenine göre ikinci mertebeden türevi $j=1,2,3,...,12$ olmak üzere

$$Y_j''(y)=z_j'(y)y_1'(y)+z_j(y)y_1''(y)+v_j'(y)y_2'(y)+v_j(y)y_2''(y) \tag{3.162}$$

biçiminde hesaplanır. (3.158), (3.161) ve (3.162) eşitliklerinden sırasıyla $Y_j(y), Y_j'(y)$ ve $Y_j''(y)$ ifadeleri sırasıyla (3.152) denklemlerinde yazılırsa

$$z_j'(y)y_1'(y)+z_j(y)y_1''(y)+v_j'(y)y_2'(y)+v_j(y)y_2''(y)+\beta\left[z_j(y)y_1'(y)+v_j(y)y_2'(y)\right]$$

$$+k^2\left(\frac{c^2}{c_{0_T}^2}-1\right)\Big[z_j(y)y_1(y)+v_j(y)y_2(y)\Big]=g_j(y),\quad j=1,2,3,...,12 \tag{3.163}$$

denklemleri elde edilir. (3.163) denklemleri

$$z_j(y)\left[y_1''(y)+\beta y_1'(y)+k^2\left(\frac{c^2}{c_{0_T}^2}-1\right)y_1(y)\right]+v_j(y)\left[y_2''(y)+\beta y_2'(y)+k^2\left(\frac{c^2}{c_{0_T}^2}-1\right)y_2(y)\right]$$

$$+z_j'(y)y_1'(y)+v_j'(y)y_2'(y)=g_j(y),\quad j=1,2,3,...,12 \tag{3.164}$$

biçiminde yeniden düzenir. $y_1(y)$ ve $y_2(y)$ homojen çözümleri $j=1,2,3,...,12$ için (3.153) denklemlerini sağladığından (3.164) denklemleri

$$z_j'(y)y_1'(y)+v_j'(y)y_2'(y)=g_j(y),\quad j=1,2,3,...,12 \tag{3.165}$$

biçimine indirgenir. Bu durumda (3.160) ve (3.165) denklemlerinden oluşan ve bilinmeyenleri $z_j(y)$ ve $v_j(y)$, $j=1,2,3,...,12$ olan aşağıdaki lineer denklem sistemleri elde edilir.

$$\begin{aligned} &z_j'(y)y_1(y)+v_j'(y)y_2(y)=0,\\ &z_j'(y)y_1'(y)+v_j'(y)y_2'(y)=g_j(y),\quad j=1,2,3,...,12 \end{aligned} \tag{3.166}$$

Cramer kuralı kullanılarak, (3.166) sistemlerinin çözümleri

$$z_j'(y)=\frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(y)\\ g_j(y) & y_2'(y)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(y) & y_2(y)\\ y_1'(y) & y_2'(y)\end{vmatrix}}=-\frac{y_2(y)g_j(y)}{W[y_1(y),y_2(y)]},$$

$$v_j'(y)=\frac{\begin{vmatrix} y_1(y) & 0\\ y_1'(y) & g_j(y)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(y) & y_2(y)\\ y_1'(y) & y_2'(y)\end{vmatrix}}=\frac{y_1(y)g_j(y)}{W[y_1(y),y_2(y)]},\qquad j=1,2,3,...,12 \tag{3.167}$$

biçiminde bulunur. (3.167) eşitliklerinin her iki tarafından y değişkenine göre integral alınırsa, $z_j(y)$ ve $v_j(y)$ bilinmeyenleri

$$\begin{aligned} z_j(y)&=-\int\frac{y_2(y)g_j(y)}{W[y_1(y),y_2(y)]}dy,\\ v_j(y)&=\int\frac{y_1(y)g_j(y)}{W[y_1(y),y_2(y)]}dy,\quad j=1,2,3,...,12 \end{aligned} \tag{3.168}$$

biçiminde bulunur. Bu durumda (3.152) denklemlerinin $j=1,2,3,...,12.$ için özel çözümleri aşağıdaki gibi verilir.

$$Y_j(y)=-y_1(y)\int_{\theta=0}^{y}\frac{y_2(\theta)g_j(\theta)}{W[y_1(\theta),y_2(\theta)]}d\theta+y_2(y)\int_{\theta=0}^{y}\frac{y_1(\theta)g_j(\theta)}{W[y_1(\theta),y_2(\theta)]}d\theta. \tag{3.169}$$

Bu durumda (3.151) ve (3.169) çözümleri (3.149) dönüşümünde kullanılarak, (3.138) denkleminin özel çözümü bulunur. Yani (3.138) denkleminin özel çözümünü oluşturan bilinmeyenleri $\ell = 1$ için tamamen bulduk. Bu kısımda $\ell = 3$ için özel çözümün bulunmasına gerek yoktur. (3.143) denkleminin çözümü

$$\tilde{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 e^{\beta y}}} \sum_{\ell=1}^{\infty} [A_3^{(\ell)}(x_1,x_2,t_1,t_2) e^{i\ell ksy} + B_3^{(\ell)}(x_1,x_2,t_1,t_2) e^{-i\ell ksy}] e^{i\ell\phi} + \text{c.c.} \quad (3.170)$$

biçimindedir. Burada ℓ pozitif bir tamsayıyı, $A_3^{(\ell)}$ ile $B_3^{(\ell)}$ de üçüncü mertebe dalga genliği fonksiyonlarını göstermektedir. Daha önceki mertebe problemlerinde olduğu gibi (3.170) çözümü ile $u_1, \bar{u}_3$ çözümleri, (3.144)-(3.145) sınır koşullarında kullanılırsa

$$\mathbf{U}_3^{(\ell)} = \begin{bmatrix} A_3^{(\ell)} \\ B_3^{(\ell)} \end{bmatrix} \quad (3.171)$$

ve

$$\mathbf{W}_\ell = \begin{bmatrix} \left(-\frac{\beta}{2} + iks\ell\right) e^{iks\ell h} & \left(-\frac{\beta}{2} - iks\ell\right) e^{-iks\ell h} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.172)$$

olmak üzere

$$\mathbf{W}_\ell \mathbf{U}_3^{(\ell)} = \mathbf{b}_3^{(\ell)} \quad (3.173)$$

biçiminde homojen olmayan lineer cebirsel denklem sistemi elde edilir. (3.173) eşitliğinde $\mathbf{b}_3^{(\ell)}$ vektörleri $\ell = 1$ ve $\ell = 3$ için sıfırdan farklı, ancak $\ell \neq 1,3.$ için özdeş olarak sıfırdır. Bazı ara işlemlerden sonra $\ell = 1$ için $\mathbf{b}_3^{(1)}$ vektörü

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_3^{(1)} = & -i\left(\frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega}\frac{\partial \mathscr{A}_2}{\partial t_1} - \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k}\frac{\partial \mathscr{A}_2}{\partial x_1}\right)\mathbf{R} - i\left(\frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega}\frac{\partial \mathscr{A}_1}{\partial t_2} - \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k}\frac{\partial \mathscr{A}_1}{\partial x_2}\right)\mathbf{R} \\
& + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \mathbf{W}_1}{\partial \omega^2}\frac{\partial^2 \mathscr{A}_1}{\partial t_1^2} - 2\frac{\partial^2 \mathbf{W}_1}{\partial \omega \partial k}\frac{\partial^2 \mathscr{A}_1}{\partial x_1 \partial t_1} + \frac{\partial^2 \mathbf{W}_1}{\partial k^2}\frac{\partial^2 \mathscr{A}_1}{\partial x_1^2}\right)\mathbf{R} \\
& + \left(\frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k}\frac{\partial^2 \mathscr{A}_1}{\partial x_1^2} - \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega}\frac{\partial^2 \mathscr{A}_1}{\partial x_1 \partial t_1}\right)\left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial k} + V_g \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \omega}\right) + \mathbf{F}|\mathscr{A}_1|^2 \mathscr{A}_1
\end{aligned} \quad (3.174)$$

olarak ifade edilir. Buradaki $\mathbf{F}$ sütun vektörünün bileşenleri aşağıdaki şekildedir.

$$\begin{aligned}
F_1 = & \left\{ \left[e^{3ihkp} \rho_0 \left(-\frac{\beta}{2} + ikp\right)^2 \right] \Big/ \left[32\mu_0 \left(\frac{\beta}{2} + ikp\right)^2 \right] \right\} \\
& .\left[3\beta^4 + 16k^4\left(9p^4 - 2p^2 - 3\right) + 16i\beta k^3 p\left(1 - 15p^2\right) - 144\beta^2 k^2 p^2 + 36i\beta^3 kp\right] \\
& .\left[-(\beta + 2ikp)\int_0^h \frac{in_T e^{-\theta(\beta+2ikp)}}{2k\mu_0 p} d\theta + e^{2ihkp}(\beta - 2ikp)\int_0^h \frac{in_T e^{-\theta(\beta+4ikp)}}{2k\mu_0 p} d\theta \right] \\
& + \left\{ \left[e^{-3ihkp} \rho_0 \left(-\frac{\beta}{2} - ikp\right) \right] \Big/ \left[32\mu_0 \left(\frac{\beta}{2} - ikp\right) \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&.\left[3\beta^4+16k^4\left(9p^4-2p^2-3\right)+16i\beta k^3p\left(15p^2-1\right)-144\beta^2k^2p^2-36i\beta^3kp\right]\\
&.\left[e^{2ihkp}(\beta-2ikp)\int_0^h \frac{in_Te^{-\beta\theta+2i\theta kp}}{2k\mu_0p}\,d\theta+(-\beta-2ikp)\int_0^h \frac{in_Te^{-\beta\theta+4i\theta kp}}{2k\mu_0p}\,d\theta\right]\\
&-\left\{\left[ie^{ihkp}\rho_0\left(-\frac{\beta}{2}+ikp\right)\right]\Big/\left[16\mu_0\left(\frac{\beta}{2}+ikp\right)\right]\right\}\\
&.\left[-9i\beta^3+8k^3\left(9p^3+p\right)-12ik^2\left(\beta+3\beta p^2\right)+18\beta^2kp\right]\\
&.\left[-(\beta+2ikp)\int_0^h \frac{ie^{-\beta\theta}n_T'}{2k\mu_0p}d\theta+e^{2ihkp}(\beta-2ikp)\int_0^h \frac{ie^{-\theta(\beta+2ikp)}n_T'}{2k\mu_0p}d\theta\right]\\
&+\left\{\left[e^{3ihkp}\rho_0\left(-\frac{\beta}{2}+ikp\right)^2\right]\Big/\left[16\mu_0\left(\frac{\beta}{2}+ikp\right)^2\right]\right\}\\
&.\left[(\beta+2ikp)\left(-3\beta^2+4k^2\left(3p^2-1\right)-12i\beta kp\right)\right]\\
&.\left[-(\beta+2ikp)\int_0^h \frac{ie^{-\theta(\beta+2ikp)}n_T'}{2k\mu_0p}d\theta+e^{2ihkp}(\beta-2ikp)\int_0^h \frac{ie^{-\theta(\beta+4ikp)}n_T'}{2k\mu_0p}d\theta\right]\\
&+\left[(ie^{-ihkp}\rho_0)/(16\mu_0)\right].\left[\left(9i\beta^3+8k^3\left(9p^3+p\right)+12ik^2\left(\beta+3\beta p^2\right)+18\beta^2kp\right)\right]\\
&.\left[e^{2ihkp}(\beta-2ikp)\int_0^h \frac{ie^{-\beta\theta}n_T'}{2k\mu_0p}d\theta+(-\beta-2ikp)\int_0^h \frac{ie^{-\beta\theta+2i\theta kp}n_T'}{2k\mu_0p}d\theta\right]\\
&+\left\{\left[e^{-3ihkp}\rho_0\left(-\frac{\beta}{2}-ikp\right)\right]\Big/\left[16\mu_0\left(\frac{\beta}{2}-ikp\right)\right]\right\}\\
&.\left[(\beta-2ikp)\left(-3\beta^2+4k^2\left(3p^2-1\right)+12i\beta kp\right)\right]\\
&.\left[e^{2ihkp}(\beta-2ikp)\int_0^h \frac{ie^{-\beta\theta+2i\theta kp}n_T'}{2k\mu_0p}\,d\theta+(-\beta-2ikp)\int_0^h \frac{ie^{-\beta\theta+4i\theta kp}n_T'}{2k\mu_0p}\,d\theta\right]\\
&-[(e^{-ihkp}\rho_0)/(32\mu_0^3)]\\
&.[32k^4\mu_0^2\left(3p^4-2p^2+3\right)+16i\beta k^3\mu_0^2\left(9p^3+p\right)\\
&+36i\beta^3k\mu_0^2p-6\left(\beta^4\mu_0^2-8\rho_0^2\omega^4+4\beta^2\mu_0\rho_0\omega^2\right)]\\
&.\left[e^{2ihkp}(\beta-2ikp)\int_0^h \frac{ie^{-\beta\theta}n_T}{2k\mu_0p}\,d\theta+(-\beta-2ikp)\int_0^h \frac{in_Te^{-\beta\theta+2i\theta kp}}{2k\mu_0p}\,d\theta\right]\\
&+\left\{\left[e^{ihkp}\rho_0\left(-\frac{\beta}{2}+ikp\right)\right]\Big/\left[32\mu_0^3\left(\frac{\beta}{2}+ikp\right)\right]\right\}\\
&[-32k^4\mu_0^2\left(3p^4-2p^2+3\right)+16i\beta k^3\mu_0^2\left(9p^3+p\right)\\
&+36i\beta^3k\mu_0^2p+6\left(\beta^4\mu_0^2-8\rho_0^2\omega^4+4\beta^2\mu_0\rho_0\omega^2\right)]\\
&\left[(-\beta-2ikp)\int_0^h \frac{ie^{-\beta\theta}n_T}{2k\mu_0p}\,d\theta+e^{2ihkp}(\beta-2ikp)\int_0^h \frac{in_Te^{\theta(-(\beta+2ikp))}}{2k\mu_0p}\,d\theta\right],\\
&F_2=0. \qquad (3.175)
\end{aligned}
$$

Burada $n'_T = \frac{dn_T}{d\theta}$'dır. Buraya kadar (3.75) seçimi altında hesap yaptık ve $n_T = n_T(y)$ alarak çalıştık. Yani n_T katsayı fonksiyonunu y'ye bağlılığının açık olarak verilmemesi halinde analizi yürütebildik. Bu analizde $n_T = n_T(y)$ olarak bırakılabilir, ancak yapılan analizin somut sonuçlarını görebilmek ve grafiklerini çizdirebilmek amacıyla örnek niteliğinde ve (3.75) seçimine paralel olarak,

$$n_T = n_{0_T} e^{\lambda y} \tag{3.176}$$

seçilirse F sütun vektörünün bileşenleri aşağıdaki gibi elde edilir. Burada λ nonlineerliğin derinliğe göre değişimini karakterize eden sıfırdan farklı bir parametredir.

$$\begin{aligned}
F_1 = &-\Big\{\Big[in_{0_T}\lambda\rho_0\Big(-\frac{\beta}{2}+ikp\Big)e^{-\beta h+ihkp}\Big]\Big/\Big[32k\mu_0^2 p(\beta-\lambda)\Big(\frac{\beta}{2}+ikp\Big)\\
&(2kp-i(\beta-\lambda))\Big]\Big\}\Big[-9i\beta^3+8k^3\Big(9p^3+p\Big)-12ik^2\Big(\beta+3\beta p^2\Big)+18\beta^2kp\Big]\\
&\Big[(\beta-\lambda)(\beta-2ikp)e^{h(\beta+2ikp)}-e^{\beta h}(\beta+2ikp)(\beta-\lambda+2ikp)\\
&-2kpe^{\lambda h}(-3i\beta+2i\lambda+2kp)\Big]+\Big\{\Big[in_{0_T}\lambda\rho_0 e^{-\beta h+(-i)hkp}\Big]\Big/\Big[32k\mu_0^2 p(\beta-\lambda)\\
&(\beta-\lambda-2ikp)\Big]\Big\}\Big[9i\beta^3+8k^3\Big(9p^3+p\Big)+12ik^2\Big(\beta+3\beta p^2\Big)+18\beta^2kp\Big]\\
&\Big[(\beta-\lambda)e^{\beta h}(2kp-i\beta)+(2kp+i\beta)e^{h(\beta+2ikp)}(\beta-\lambda-2ikp)+2kpe^{h(\lambda+2ikp)}\\
&(-3\beta+2\lambda+2ikp)\Big]+\Big\{\Big[n_{0_T}\rho_0 e^{3ihkp}\Big(-\frac{\beta}{2}+ikp\Big)^2\Big]\Big/\Big[64k\mu_0^2 p\Big(\frac{\beta}{2}+ikp\Big)^2\\
&(2kp-i(\beta-\lambda))(\beta-\lambda+4ikp)\Big]\Big\}\Big[3\beta^4+16k^4\Big(9p^4-2p^2-3\Big)+16i\beta k^3 p\\
&\Big(1-15p^2\Big)-144\beta^2k^2p^2+36i\beta^3kp\Big]\Big[4k^2p^2\Big(-3e^{h(-\beta+\lambda-2ikp)}+e^{2ihkp}+2\Big)\\
&+2ikp\Big(-3\beta+\lambda+(3\beta-2\lambda)e^{h(-\beta+\lambda-2ikp)}+\lambda e^{2ihkp}\Big)+\beta(\beta-\lambda)\Big(-1+e^{2ihkp}\Big)\Big]\\
&+\Big\{\Big[n_{0_T}\rho_0\lambda e^{3ihkp}\Big(-\frac{\beta}{2}+ikp\Big)^2\Big]\Big/\Big[32k\mu_0^2 p\Big(\frac{\beta}{2}+ikp\Big)^2\Big(1-15p^2\Big)\\
&(4kp-i(\beta-\lambda))(\beta-\lambda+2ikp)\Big]\Big\}\Big[\lambda(\beta+2ikp)\Big(-3\beta^2+4k^2\\
&\Big(3p^2-1\Big)-12i\beta kp\Big)\Big]\Big[4k^2p^2\Big(-3e^{h(-\beta+\lambda-2ikp)}+e^{2ihkp}+2\Big)\\
&+2ikp(-3\beta+\lambda+(3\beta-2\lambda)e^{h(-\beta+\lambda-2ikp)}+\lambda e^{2ihkp})+\beta(\beta-\lambda)\Big(-1+e^{2ihkp}\Big)\Big]\\
&+\Big\{\Big[n_{0_T}\rho_0 e^{-3ihkp}\Big(-\frac{\beta}{2}-ikp\Big)\Big]\Big/\Big[64k\mu_0^2 p\Big(\frac{\beta}{2}-ikp\Big)\\
&(2kp+i(\beta-\lambda))(\beta-\lambda-4ikp)\Big]\Big\}\Big[3\beta^4+16k^4\Big(9p^4-2p^2-3\Big)
\end{aligned}$$

$$+16i\beta k^3 p\Big(15p^2-1\Big)-144\beta^2k^2p^2-36i\beta^3kp\Big]\Big[4k^2p^2\Big(-3e^{h(-\beta+\lambda+4ikp)}+2e^{2ihkp}+1\Big)$$

$$-2ikp(\lambda+(\lambda-3\beta)e^{2ihkp}+(3\beta-2\lambda)e^{h(-\beta+\lambda+4ikp)})-\beta(\beta-\lambda)\Big(-1+e^{2ihkp}\Big)\Big]$$

$$+\Big\{\Big[n_{0_T}\rho_0\lambda e^{-3ihkp}\Big(-\frac{\beta}{2}-ikp\Big)\Big]\Big/\Big[32k\mu_0^2 p\Big(\frac{\beta}{2}-ikp\Big)$$

$$(4kp+i(\beta-\lambda))(\beta-\lambda-2ikp)\Big]\Big\}\Big[(\beta-2ikp)\Big(-3\beta^2+4k^2\Big(3p^2-1\Big)+12i\beta kp\Big)\Big]$$

$$\Big[4k^2p^2\Big(-3e^{h(-\beta+\lambda+4ikp)}+2e^{2ihkp}+1\Big)-2ikp(\lambda+(\lambda-3\beta)e^{2ihkp}$$

$$+(3\beta-2\lambda)e^{h(-\beta+\lambda+4ikp)})-\beta(\beta-\lambda)\Big(-1+e^{2ihkp}\Big)\Big]$$

$$-\Big\{\Big[n_{0_T}\rho_0 e^{-\beta h+(-i)hkp}\Big]\Big/\Big[64k\mu_0^4 p(\beta-\lambda)(\beta-\lambda-2ikp)\Big]\Big\}$$

$$\Big[(\beta-\lambda)e^{\beta h}(2kp-i\beta)+(2kp+i\beta)e^{h(\beta+2ikp)}(\beta-\lambda-2ikp)$$

$$+2kpe^{h(\lambda+2ikp)}(-3\beta+2\lambda+2ikp)\Big]\Big[32k^4\mu_0^2\Big(3p^4-2p^2+3\Big)$$

$$+16i\beta k^3\mu_0^2\Big(9p^3+p\Big)+36i\beta^3k\mu_0^2p-6\Big(\beta^4\mu_0^2-8\rho_0^2\omega^4+4\beta^2\mu_0\rho_0\omega^2\Big)\Big]$$

$$+\Big\{\Big[n_{0_T}\rho_0\Big(-\frac{\beta}{2}+ikp\Big)e^{-\beta h+ihkp}\Big]\Big/\Big[64k\mu_0^4 p(\beta-\lambda)\Big(\frac{\beta}{2}+ikp\Big)(2kp-i(\beta-\lambda))\Big]\Big\}$$

$$\Big[(\beta-\lambda)(\beta-2ikp)e^{h(\beta+2ikp)}-e^{\beta h}(\beta+2ikp)(\beta-\lambda+2ikp)$$

$$-2kpe^{\lambda h}(-3i\beta+2i\lambda+2kp)\Big]\Big[-32k^4\mu_0^2\Big(3p^4-2p^2+3\Big)$$

$$+16i\beta k^3\mu_0^2\Big(9p^3+p\Big)+36i\beta^3k\mu_0^2p+6\Big(\beta^4\mu_0^2-8\rho_0^2\omega^4+4\beta^2\mu_0\rho_0\omega^2\Big)\Big],$$

$$F_2=0. \tag{3.177}$$

Kontrol amacıyla, F sütun vektörünün bileşenlerinden sırasıyla $\beta\to 0$ ve $\lambda\to 0$ limitleri alınırsa, yani $\mu\to\mu_0$, $\rho\to\rho_0$ ve $n_T=n_{0_T}$ alınırsa

$$d=\sqrt{\frac{c^2}{c_{0_T}^2}-1} \tag{3.178}$$

olmak üzere

$$F_1=-i\left[\frac{n_{0_T}k^4h}{c_{0_T}^2\mu_0}(9d^4+2d^2+9)\sin(kdh)\right],$$

$$F_2=0 \tag{3.179}$$

bileşenleri elde edilir. (3.179)'da elde edilen **F** vektörünün bileşenleri homojen problemde (**??**) ile verilen **F** vektörünün bileşenleri ile aynı yapıdadır. $\mathbf{b}_3^{(3)}$ vektörünün açık formu, sonraki hesaplarda kullanılmayacağından verilmeyecektir. (3.173) denklem sistemi $\ell = 1$ için incelenirse, $\det\mathbf{W}_1 = 0$ ve $\mathbf{b}_3^{(1)} \neq \mathbf{0}$ olduğundan, böyle bir sistemin çözümünün olması

$$\mathbf{L}\mathbf{b}_3^{(1)} = 0 \tag{3.180}$$

uygunluk koşuluna bağlıdır. $\ell = 3$ için $\det\mathbf{W}_3 \neq 0$ olduğundan, (3.173) denklem sisteminin çözümü

$$\mathbf{U}_3^{(3)} = \mathbf{W}_3^{-1}\mathbf{b}_3^{(3)} \tag{3.181}$$

şeklinde elde edilir. (3.173) denklem sisteminin $\ell \neq 1,3$ için çözümü, $\mathbf{b}_3^{(\ell)} = \mathbf{0}$ ve $\det\mathbf{W}_\ell \neq 0$ olduğundan,

$$\mathbf{U}_3^{(\ell)} = \mathbf{0} \tag{3.182}$$

olarak elde edilir. Birinci mertebe düzgün çözüm için $\mathbf{U}_3^{(\ell)}$, $\ell = 1,3$ çözümlerinin açık yapılarına ihtiyaç yoktur. Yapılan analize (3.133) ifadesi kullanılarak, (3.180) uygunluk koşulundan devam edilirse,

$$i\left(\frac{\partial \mathscr{A}_1}{\partial t_2} + V_g\frac{\partial \mathscr{A}_1}{\partial x_2}\right) + \tilde{\Gamma}\frac{\partial^2 \mathscr{A}_1}{\partial x_1^2} + \tilde{\Delta}|\mathscr{A}_1|^2\mathscr{A}_1 + i\left(\frac{\partial \mathscr{A}_2}{\partial t_1} + V_g\frac{\partial \mathscr{A}_2}{\partial x_1}\right) = 0 \tag{3.183}$$

bağıntısı bulunur. Burada $\tilde{\Gamma}$ ve $\tilde{\Delta}$ sabitleri

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma} = -\Big[\frac{1}{2}\mathbf{L}\left(V_g^2\frac{\partial^2\mathbf{W}_1}{\partial\omega^2} + 2V_g\frac{\partial^2\mathbf{W}_1}{\partial\omega\partial k} + \frac{\partial^2\mathbf{W}_1}{\partial k^2}\right)\mathbf{R} \\ + \mathbf{L}\left(\frac{\partial\mathbf{W}_1}{\partial k} + V_g\frac{\partial\mathbf{W}_1}{\partial\omega}\right)\left(\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial k} + V_g\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\omega}\right)\Big]\Big/\left(\mathbf{L}\frac{\partial\mathbf{W}_1}{\partial\omega}\mathbf{R}\right),\end{aligned} \tag{3.184}$$

$$\tilde{\Delta} = -\mathbf{L}\cdot\mathbf{F}\Big/\left(\mathbf{L}\frac{\partial\mathbf{W}_1}{\partial\omega}\mathbf{R}\right) \tag{3.185}$$

olarak tanımlanmaktadır. Burada amacımız birinci mertebe çözüm u_1'i tam olarak belirlemektir. Bunun içinde $\mathscr{A}_1$ genlik fonksiyonunun belirlenmesi yeterli olacaktır. Dikkat edilirse, (3.183) denklemindeki $\mathscr{A}_2$ fonksiyonuyla ilgili terimler incelendiğinde, $\mathscr{A}_1$ fonksiyonunun yapısına paralel olarak, $\mathscr{A}_2$ fonksiyonunun yapısının

$$\frac{\partial \mathscr{A}_2}{\partial t_1} + V_g\frac{\partial \mathscr{A}_2}{\partial x_1} = 0 \tag{3.186}$$

olduğu kabul edilirse

$$\mathscr{A}_2 = \mathscr{A}_2(x_1 - V_g t_1, x_2, t_2) \tag{3.187}$$

olur. Bu durumda (3.183) denklemi, bilinmeyen fonksiyonu sadece $\mathscr{A}_1$ olan bir denkleme dönüşür. Dikkat edilirse, $\mathbf{W}_1\mathbf{R} = \mathbf{0}$ denklem sistemi k ya göre iki kez türetilerek, soldan **L** vektörü ile çarpılırsa ve elde edilen bağıntı (3.184) ile karşılaştırılırsa bu durumda aşağıdaki bağıntı elde edilir.

$$\tilde{\Gamma} = \frac{1}{2}\frac{dV_g}{dk} = \frac{1}{2}\frac{d^2\omega}{dk^2} \tag{3.188}$$

(3.188) bağıntısı, (3.54) ile belirlenebilir. Şimdi ilgili boyutsuz değişkenleri ve sabitleri aşağıdaki gibi tanımlayalım;

$$\tau = \omega t_2, \quad \xi = k\varepsilon^{-1}(x_2 - V_g t_2) = k(x_1 - V_g t_1),$$

$$\mathscr{A} = k\mathscr{A}_1, \quad \Gamma = k^2\tilde{\Gamma}/\omega, \quad \Delta = \tilde{\Delta}/\omega k^2, \quad \Lambda = \lambda h \tag{3.189}$$

Bu durumda (3.186) kabulü altında (3.183) denklemi

$$i\frac{\partial \mathscr{A}}{\partial \tau} + \Gamma\frac{\partial^2 \mathscr{A}}{\partial \xi^2} + \Delta|\mathscr{A}|^2\mathscr{A} = 0 \tag{3.190}$$

biçimine dönüşür. Elde edilen bu denklem nonlineer Schrödinger (NLS) denklemidir ve bir çok alanda nonlineer dalga modülasyonunun asimptotik analizinde karakteristik denklem olarak ortaya çıkmaktadır. NLS denkleminin bilinen bazı çözümleri ve çözümlerin $\Gamma\Delta$ çarpımı ile ilişkisi tezin dördüncü bölümünde yer almaktadır.

4. SONUÇLAR

4.1 NLS Denkleminin Bazı Çözümleri

Tezin ikinci bölümünde rijit bir cisim üzerine oturtulmuş; homojen, izotrop, nonlineer, hiperelastik, düzgün kalınlıklı bir tabakada SH dalga yayılımı problemi incelenmiş ve bu inceleme sonunda dalga yayılımının self modülasyonunun NLS denklemi ile karakterize edilebileceği gösterilmiştir. Benzer şekilde üçüncü bölümde rijit bir cisim üzerine oturtulmuş; heterojen, izotrop, nonlineer, hiperelastik, düzgün kalınlıklı bir tabakada SH dalga yayılımı problemi incelenmiş ve bu inceleme sonunda dalga yayılımının self modülasyonunun NLS denklemi ile karakterize edilebileceği gösterilmiştir. Bu bölümde NLS denklemiyle daha yakından ilgileneceğiz. Standart bir NLS denklemi

$$i\frac{\partial \mathscr{A}}{\partial \tau}+\Gamma\frac{\partial^2 \mathscr{A}}{\partial \xi^2}+\Delta|\mathscr{A}|^2\mathscr{A}=0 \tag{4.1}$$

biçimindedir. (4.1) ile verilen NLS denkleminin, ϕ bir reel fonksiyon ve K_0, Ω sabitler olmak üzere

$$\mathscr{A}(\xi,\tau)=\phi(\eta)e^{i(K_0\xi-\Omega\tau)}, \quad \eta=\xi-V_0\tau, \quad V_0=\text{sabit} \tag{4.2}$$

formunda ilerleyen dalga çözümleri, Jakobien elliptik fonksiyonlarıyla ifade edilebilirler. Bu çözümler $\Gamma\Delta>0$ ise dn ve $\Gamma\Delta<0$ ise sn fonksiyonları olarak bulunurlar [46]. Bu bölümde bazı basit fakat önemli ilerleyen dalga çözümlerine yer vereceğiz. Bunun için, (4.2) çözüm formunu (4.1) denkleminde kullanırsak

$$\Gamma\frac{d^2\phi}{d\eta^2}+i(2K_0\Gamma-V_0)\frac{d\phi}{d\eta}+(\Omega-\Gamma K_0^2)\phi+\Delta\phi^3=0 \tag{4.3}$$

denklemi elde edilir. $V_0=2K_0\Gamma$ kabulü altında, (4.3) denklemi

$$\Gamma\frac{d^2\phi}{d\eta^2}+(\Omega-\Gamma K_0^2)\phi+\Delta\phi^3=0 \tag{4.4}$$

biçimine indirgenir. (4.4) denklemi, $d\phi/d\eta$ ile çarpılıp bir defa integre edilirse,

$$\left(\frac{d\phi}{d\eta}\right)^2=\frac{\Gamma K_0^2-\Omega}{\Gamma}\phi^2-\frac{\Delta}{2\Gamma}\phi^4+C_0 \tag{4.5}$$

denklemi elde edilir. Şimdi (4.5) denkleminin bilinen bazı çözümlerini verelim. $\Gamma\Delta > 0$ ve $\Gamma K_0^2 - \Omega = \Delta\phi_0^2/2$ ise (4.5) denklemi

$$\left(\frac{d\phi}{d\eta}\right)^2 = \frac{\Delta}{2\Gamma}\phi_0^2\phi^2 - \frac{\Delta}{2\Gamma}\phi^4 + C_0 \tag{4.6}$$

biçimine dönüşür. Eğer $|\eta| \to \infty$ için $\phi \to 0$ ve $d\phi/d\eta \to 0$ ise $C_0 = 0$ olur ve bu durumda (4.6) denkleminin çözümü

$$\phi = \phi_0 \mathrm{sech}\left[\left(\frac{\Delta}{2\Gamma}\right)^{1/2}\phi_0\eta\right] \tag{4.7}$$

biçiminde elde edilir. Elde edilen bu çözüm literatürde "zarf soliton" veya "bright soliton" olarak adlandırılmaktadır [16,17,47–49]. $\Gamma\Delta < 0$ ve $\Gamma K_0^2 - \Omega = \Delta\phi_0^2$ ise (4.5) denklemi

$$\left(\frac{d\phi}{d\eta}\right)^2 = \frac{\Delta}{\Gamma}\phi_0^2\phi^2 - \frac{\Delta}{2\Gamma}\phi^4 + C_0 \tag{4.8}$$

biçimine dönüşür. Eğer $|\eta| \to \infty$ için $\phi \to \phi_0$ ve $d\phi/d\eta \to 0$ ise $C_0 = -\Delta\phi_0^4/2\Gamma$ olur ve bu durumda (4.8) denkleminin çözümü

$$\phi = \phi_0 \tanh\left[\left(-\frac{\Delta}{2\Gamma}\right)^{1/2}\phi_0\eta\right] \tag{4.9}$$

biçiminde elde edilir. Elde edilen bu çözüm bir şok dalga yayılımını karakterize eder. Bu çözümler dışında, $\Gamma\Delta < 0$ için (4.1) denkleminin

$$\mathscr{A}(\xi,\tau) = \phi(\eta)e^{i(\Gamma^2\Delta\phi_0^2\tau - F(\eta))} \tag{4.10}$$

biçiminde çözümü aranırsa ve $|\eta| \to \infty$ için $\mathscr{A} \to \phi_0 e^{i\Gamma^2\Delta\phi_0^2\tau}$ ve $d\mathscr{A}/d\eta \to 0$ olduğu kabul edilirse ϕ ve F fonksiyonları

$$\phi^2 = \phi_0^2(1 - \sin^2 C_0 \,\mathrm{sech}^2\psi) \tag{4.11}$$

$$F = \arctan(\tan C_0 \tanh\psi) \tag{4.12}$$

olarak elde edilirler [50]. Burada C_0 bir sabit ve ψ ile V_0 aşağıdaki gibidir.

$$\psi = \left(-\frac{\Gamma\Delta}{2}\right)^{1/2}\phi_0\eta\sin C_0 \tag{4.13}$$

$$V_0 = \pm 2^{-3/2}\Gamma(-\Gamma\Delta)^{1/2}\phi_0 \tag{4.14}$$

(4.11)-(4.12) ile verilen çözüm literatürde "dark soliton" çözümü olarak bilinir [50,51]. Bu çözümlerden farklı olarak, $\Gamma\Delta > 0$ veya $\Gamma\Delta < 0$ için NLS denkleminin

$$\mathscr{A}(\xi,\tau) = \phi_0 e^{i(K_0\xi - \Omega\tau)} \tag{4.15}$$

formunda düzlem dalga çözümü de mevcuttur. (4.15) çözümü NLS denkleminde yerine konursa, düzlem dalganın ϕ_0 genliği

$$\phi_0^2 = \frac{\Gamma K_0^2 - \Omega}{\Delta} \tag{4.16}$$

bağıntısını sağlar. Özel olarak $K_0 = 0$ alındığında, düzlem dalga çözümü

$$\mathscr{A}(\xi, \tau) = \phi_0 e^{i\Delta|\phi_0^2|\tau} \tag{4.17}$$

şeklini alır.

Yukarıda bahsedilen ilerleyen dalga çözüm formlarından $\Gamma\Delta$ çarpımının işaretinin, çözümün yapısını nasıl etkilediği açıkça görülebilir. Dikkat edilirse, $\Gamma\Delta$'nın işaretinden bağımsız olarak NLS denkleminin (4.15) ile verilen düzlem dalga çözümü mevcuttur. Şimdi bu düzlem dalga çözümünün küçük pertürbasyonlar altında kararlılığına $\Gamma\Delta$ çarpımının işaretinin etkisini inceleyelim. Eğer NLS denkleminin çözümü

$$\mathscr{A}(\xi, \tau) = \frac{a(\xi, \tau)}{2} e^{i\theta(\xi,\tau)} \tag{4.18}$$

şeklinde aranıp, NLS denkleminde yerine yazılıp, reel ve sanal kısımlarına ayrılırsa, a ve θ için

$$a_\tau + \Gamma(a\theta_{\xi\xi} + 2a_\xi \theta_\xi) = 0 \tag{4.19}$$

$$a\theta_\tau - \Gamma(a_{\xi\xi} - a(\theta_\xi)^2) - \frac{1}{4}\Delta a^3 = 0 \tag{4.20}$$

nonlineer diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Şimdi NLS denkleminin $a_0 =$ sabit, $\theta_0 =$ sabit ile belirtilen düzlem dalga çözümünün küçük pertürbasyonlar altında kararlılığını incelemek için a ve θ'yı a_0 ve θ_0 civarında $\varepsilon \ll 1$ olmak üzere ε'a göre seriye açalım;

$$a(\xi, \tau) = a_0 + \varepsilon a_1(\xi, \tau) + \mathscr{O}(\varepsilon^2) \tag{4.21}$$

$$\theta(\xi, \tau) = \theta_0 + \varepsilon \theta_1(\xi, \tau) + \mathscr{O}(\varepsilon^2) \tag{4.22}$$

Bu seri açılımlar (4.19)-(4.20) denklemlerinde kullanılırsa ve ε'dan büyük mertebeli terimler ihmal edilirse aşağıdaki lineer denklemler elde edilir.

$$a_{1_\tau} + \Gamma a_0 \theta_{1_{\xi\xi}} = 0 \tag{4.23}$$

$$a_0 \theta_{1_\tau} - \Gamma \theta_{1_{\xi\xi}} - \frac{3}{4}\Delta a_0^2 a_1 = 0 \tag{4.24}$$

a_1 ve θ_1 için elde edilen bu lineer denklem sisteminin

$$a_1(\xi,\tau) = Ae^{i(K_0\xi - \Omega\tau)}, \quad \theta_1(\xi,\tau) = \Theta e^{i(K_0\xi - \Omega\tau)} \tag{4.25}$$

formunda düzlem dalga çözümlerini arayalım. Bu çözümler (4.23)-(4.24) denklemlerinde kullanılırsa, sıfırdan farklı çözüm elde edilebilmesi için Ω ve K_0 arasında

$$\Omega^2 = K_0^2(-\Gamma\Delta)\left(\frac{3}{4}a_0^2 - \frac{\Gamma}{\Delta}K_0^2\right)^{1/2} \tag{4.26}$$

ilişkisinin sağlanması gerektiği ortaya çıkar. (4.26) bağıntısı (4.18) ile tanımlanan sonsuz küçük pertürbasyon dalgalarına ait dispersiyon bağıntısıdır. Burada, reel bir K_0 değeri için, $\Gamma\Delta < 0$ ise, Ω reel olacaktır ve bu koşul altında a_1 ve Θ_1 sınırlı kalacaklardır. Diğer taraftan, $\Gamma\Delta > 0$ ise, $K_0 < [(3/4)(\Delta/\Gamma)]^{1/2}\ a_0$ değerleri için Ω kompleks değerli olacak ve buna bağlı olarak a_1 ve Θ_1 sınırsız olarak büyüyeceklerdir. Sonuç olarak a_0 ve Θ_0 sabitleri ile tanımlanan bir nonlineer düzgün düzlem katarı sonsuz küçük bir pertürbasyon altında eğer $\Gamma\Delta < 0$ ise kararlı, $\Gamma\Delta > 0$ ise kararsız olacaklardır.

Bu kısımda incelenen lineerleştirilmiş a_1 ve Θ_1 çözümleri kısa zaman aralığında geçerli olmalarına rağmen, NLS denkleminin

$$\mathscr{A}(\xi,0) = \mathscr{A}_0(\xi) \tag{4.27}$$

başlangıç koşulu altında çözümünün uzun zaman aralığında davranışı da $\Gamma\Delta$ çarpımının işaretine bağlıdır. $|\xi| \to \infty$ için sıfır olan başlangıç uyarıları, eğer $\Gamma\Delta < 0$ ise sönen titreşimlere, $\Gamma\Delta > 0$ ise bir dizi zarf solitona dönüşürler [16, 17, 48, 49].

Burada bahsedilenlerin dışında Γ'nın sıfır olması yani dispersiyonun ortadan kalkması hali veya Δ'nın sıfır olması yani nonlineerliğin ortadan kalkması hali olarak bilinen marjinal hal vardır. Bu tür bir durumda kritik dalga sayıları civarında, Γ veya Δ sıfır olmaktadır. Yani dispersiyon ve nonlineerlik birbirini dengeleyememektedir. Marjinal halin ortaya çıkması durumunda (3.59) ile verilen düzgün açılım geçersizdir. Çalışılan kritik dalga sayıları civarında düzgün geçerli bir çözüm inşa etmek gerekir [52, 53].

4.2 Sayısal Sonuçlar ve Tartışma

Şimdi analizin sonuçları görmek amacıyla (2.44) ortam modeli için grafikler verelim. Tezin ikinci bölümünde ele aldığımız problemle ilgili, EK B bölümünde verilen Şekil

B.1'de boyutsuz faz hızı C'nin boyutsuz dalga sayısı K'ya göre değişimi, (2.40) dispersiyon bağıntısının ilk altı dalı için verilmektedir. Buna paralel olarak, Şekil B.2'de boyutsuz grup hızı V_G'nin boyutsuz dalga sayısı K'ya göre değişimi, (2.40) dispersiyon bağıntısının ilk altı dalı için verilmektedir. Boyutsuz dalga sayısının küçük değerleri için yani $K \to 0$ için boyutsuz faz hızı ve boyutsuz grup hızı için sırasıyla $C \to \infty$ ve $V_G \to 0$ elde edilir. Ayrıca boyutsuz dalga sayısının büyük değerleri için yani $K \to \infty$ için boyutsuz faz hızı ve boyutsuz grup hızı için sırasıyla $C \to 1$ ve $V_G \to 1$ elde edilir. Yani yeterince büyük dalga sayıları için boyutsuz faz hızının boyutsuz grup hızına, $C = 1$ veya $V_G = 1$ doğrusu boyunca yaklaştığı gözlenmektedir. İkinci bölümde ele alınan problemde elde edilen (2.135) NLS denkleminin; Γ katsayı fonksiyonunun, (2.40) dispersiyon bağıntısının ilk beş dalı için grafiği Şekil B.13'de verilmektedir. Şimdi grafiklere dispersiyon bağıntısı (2.40)'ın ilk iki dalı için devam edelim. Bu iki dal için Şekil B.14'te Γ'nın grafiği verilmektedir ve her $K > 0$ değeri için pozitif değeri almaktadır. $n_{0_T} > 0$ olmak şartıyla, dispersiyon bağıntısı (2.40)'ın ilk iki dalı için; (2.135) NLS denkleminin, Δ katsayı fonksiyonunun her $K > 0$ değeri için negatif değer aldığı Şekil B.15'te görülmektedir. Aksine, $n_{0_T} < 0$ ise Δ'nın her $K > 0$ değeri ve bu iki dal için pozitif değer aldığı Şekil B.16'da açıkça görülmektedir. $\Gamma\Delta$ çarpımı, (2.137) eşitliğiyle verilmektedir. (2.137) eşitliğinin yapısı incelendiğinde, ortam kaymada yumuşayan bir davranış gösteriyorsa yani $n_{0_T} < 0$ ise $\Gamma\Delta > 0$; ortam kaymada sertleşen bir davranış gösteriyorsa yani $n_{0_T} > 0$ ise $\Gamma\Delta < 0$ olur. Bu durumu dispersiyon bağıntısı (2.40)'ın ilk iki dalı için, sırasıyla Şekil B.17 ve Şekil B.18'de gözlemlemek mümkündür. Dolayısıyla ortam kaymada yumuşayan bir davranış gösteriyorsa bright soliton çözümler vardır; ortam kaymada sertleşen bir davranış gösteriyorsa dark soliton çözümler vardır. Küçük pertürbasyonlar altında dark soliton çözümlerin yapısı kararlı, bright soliton çözümlerin yapısı kararsızdır. Bright soliton çözümlerin, $Z = 0$ düzlemindeki deformasyon alanı, gerekli sayısal veriler

$$c_{0_T} = 1.0, n_{0_T} = -2.0, \phi_0 = 0.01, \varepsilon = 0.01, K = 0.032, K_0 = 10.0 \tag{4.28}$$

biçiminde alınarak, (2.40) dispersiyon bağıntısının birinci ve ikinci dalı için sırasıyla EK B Şekil B.19 ve Şekil B.20'de verilmiştir. Buna paralel olarakta, dark soliton çözümlerin $Z = 0$ düzlemindeki deformasyon alanı, gerekli sayısal veriler

$$c_{0_T} = 1.0, n_{0_T} = 2.0, \phi_0 = 0.01, \varepsilon = 0.01, K = 0.032, C_0 = 0.01 \tag{4.29}$$

biçiminde alınarak, (2.40) dispersiyon bağıntısının birinci ve ikinci dalı için sırasıyla EK B Şekil B.21 ve Şekil B.22'de verilmiştir.

Tezin üçüncü bölümünde ele aldığımız problemde ortam heterojen olduğundan, ortamın lineer kayma modülünü, yoğunluğunu ve buna paralel olarakta nonlineerliği temsil eden katsayıyı y değişkenine bağlı almıştık ve ilgili parametreleri $B = \beta h$ ve $\Lambda = \lambda h$ biçiminde boyutsuzlaştırmıştık. EK B bölümünde verilen Şekil B.1, Şekil B.3, Şekil B.5, Şekil B.7, Şekil B.9 ve Şekil B.11'de boyutsuz faz hızı C'nin boyutsuz dalga sayısı K'ya göre değişimleri sırasıyla $B \to 0$ limiti (homojen durum), $B = 0.5, 1.0, 1.5, 10, 20$ değerleri ve (3.47) dispersiyon bağıntısının ilk altı dalı için verilmektedir. Buna paralel olarak Şekil B.2, Şekil B.4, Şekil B.6, Şekil B.8, Şekil B.10 ve Şekil B.12'de boyutsuz grup hızı V_G'nin boyutsuz dalga sayısı K'ya göre değişimleri sırasıyla $B \to 0$ limiti (homojen ortam), $B = 0.5, 1.0, 1.5, 10, 20$ değerleri ve (3.47) dispersiyon bağıntısının ilk altı dalı için verilmektedir. Boyutsuz dalga sayısının küçük değerleri için yani $K \to 0$ için boyutsuz faz hızı ve boyutsuz grup hızı için sırasıyla $C \to \infty$ ve $V_G \to 0$ elde edilir. Ayrıca boyutsuz dalga sayısının büyük değerleri için yani $K \to \infty$ için boyutsuz faz hızı ve boyutsuz grup hızı için sırasıyla $C \to 1$ ve $V_G \to 1$ elde edilir. Yani yeterince büyük dalga sayıları için boyutsuz faz hızının boyutsuz grup hızına yaklaştığı gözlenmektedir. EK B'de Şekil B.13, Şekil B.23, Şekil B.24, Şekil B.25 ve Şekil B.26'da boyutsuz Γ'nın boyutsuz dalga sayısı K'ya göre değişimleri sırasıyla $B \to 0$ limiti (homojen ortam), $B = 0.5, 1.5, 10, 20$ değerleri ve (3.47) dispersiyon bağıntısının ilk beş dalı için verilmektedir. $B \to 0$ limiti (homojen durum) ve $B = 0.5, 1.0, 1.5$ değerleri için boyutsuz Γ'nın boyutsuz dalga sayısı K'ya göre değişiminin ikinci dal üzerindeki etkisi Şekil B.27 ile verilmektedir. Ayrıca ikinci dal üzerindeki etkinin daha iyi gözlenebilmesi için boyutsuz $B = 10, 20, 30$ değerleri için Şekil B.28 elde edilmiştir. B'nin sıfıra yakın değerleri için Γ'ların aynı değerleri aldığı gözlenmiştir. Bir önceki kısımda NLS denkleminin çözümlerinin $\Gamma\Delta$ çarpımının işaretine bağlı olduğunu vurgulamıştık. Üçüncü bölümünde elde edilen (3.190) NLS denklemi, ikinci bölümde elde edilen (2.135) NLS denkleminden daha geneldir. Yani bir başka ifadeyle; (3.190) NLS denkleminin katsayıları, (2.135) NLS denkleminin katsayılarına indirgenebilir. Bu indirgemenin yapılabilmesi için (3.190) NLS denkleminin katsayılarının tanımlarına giren; $\mathbf{F}, \mathbf{R}, \mathbf{L}$ vektörlerinden, $\mathbf{W}_1$ matrisinden ve dispersiyon bağıntısından; $\beta \to 0$

ve $\lambda \to 0$ limitleri alınır (yani bunun sonucu olarak $B \to 0$ ve $\Lambda \to 0$ alınırsa) ve bu limitler altında Γ ve Δ hesaplanırsa bu katsayıların (2.135) NLS denkleminin katsayılarıyla aynı olduğu görülür. Şimdi (3.190) NLS denkleminin katsayılarıyla yakından ilgilenelim. (3.190) NLS denkleminin çözümlerinin davranışlarını belirleyebilmek için bu denklemin katsayı fonksiyonlarının, $\Gamma\Delta$ çarpımının işaretinin, dalga sayısına ve malzeme özelliklerine göre değişimini incelemek gerekir. Fakat bu terimlerin yapıları biraz karmaşık olduğundan nümerik işlem yapmak gerekir. Dolayısıyla tabakayı meydana getiren malzemenin lineer özellikleri sabit tutulmuş, bunların nonlineer özellikleri ve tabakanın heterojenlik özellikleri için çeşitli değerler seçilerek Δ'nın ve $\Gamma\Delta$'nın boyutsuz dalga sayısı K'ya göre değişimi incelenmiştir. Dispersiyon bağıntısı (3.47)'ün ikinci dalı, $B \to 0.0$, $B \to 0.5$ limitleri, $B = 1.0, 1.5$ değerleri ve sertleşen malzeme modeli $n_{0_T} = 1$ için boyutsuz Δ'nın boyutsuz dalga sayısı K'ya göre değişimleri, $\Lambda = 0.5$ değeri için EK B'de Şekil B.29 ile verilmiştir. Benzer biçimde dispersiyon bağıntısı (3.47)'ün ikinci dalı, $B \to 0.0$, $B \to 0.5$ limitleri, $B = 1.0, 1.5$ değerleri ve yumuşayan malzeme modeli $n_{0_T} = -1$ için boyutsuz Δ'nın boyutsuz dalga sayısı K'ya göre değişimleri, $\Lambda = 0.5$ değeri için EK B'de Şekil B.30 ile verilmiştir. Şekil B.29, Şekil B.30 şekillerinde nonlineerlik sabit tutularak heterojenliğin etkisi gözlenmiştir. Benzer şekilde nonlineerliğin etkisinin ortaya çıkarılması için; dispersiyon bağıntısı (3.47)'ün ikinci dalı, $B \to 0.0$, $B \to 1.0$ limitleri, $B = 0.5, 1.5$ değerleri ve sertleşen malzeme modeli $n_{0_T} = 1$ için boyutsuz Δ'nın boyutsuz dalga sayısı K'ya göre değişimleri, $\Lambda = 1.0$ değeri için EK B'de Şekil B.31 ile verilmiştir. Benzer biçimde dispersiyon bağıntısı (3.47)'ün ikinci dalı, $B \to 0.0$, $B \to 1.0$ limitleri, $B = 0.5, 1.5$ değerleri ve yumuşayan malzeme modeli $n_{0_T} = -1$ için boyutsuz Δ'nın boyutsuz dalga sayısı K'ya göre değişimleri, $\Lambda = 1.0$ değeri için EK B'de Şekil B.32 ile verilmiştir. Grafiklerden de görüldüğü üzere, ikinci dal için sertleşen malzeme modelinde boyutsuz Δ'nın negatif değer aldığı, buna karşın yumuşayan malzeme modeli için pozitif değer aldığı gözlenmiştir. Şimdi $\Gamma\Delta$ çarpımı ile ilgili olan grafiklerle ilgilenelim. Dispersiyon bağıntısı (3.47)'ün ikinci dalı, $B \to 0.0$, $B \to 0.5$ limitleri, $B = 1.0, 1.5$ değerleri ve sertleşen malzeme modeli $n_{0_T} = 1$ için boyutsuz $\Gamma\Delta$'nın boyutsuz dalga sayısı K'ya göre değişimleri, $\Lambda = 0.5$ değeri için EK B'de Şekil B.33 ile verilmiştir. Benzer biçimde dispersiyon bağıntısı (3.47)'ün ikinci dalı, $B \to 0.0$, $B \to 0.5$ limitleri, $B = 1.0, 1.5$ değerleri ve yumuşayan malzeme modeli $n_{0_T} = -1$ için boyutsuz $\Gamma\Delta$'nın boyutsuz dalga sayısı K'ya göre değişimleri,

$\Lambda = 0.5$ değeri için EK B'de Şekil B.34 ile verilmiştir. Şekil B.33 ve Şekil B.34'de nonlineerlik sabit tutularak heterojenliğin etkisi $\Gamma\Delta$ için gözlenmiştir. Benzer şekilde $\Gamma\Delta$ için nonlineerliğin etkisinin ortaya çıkarılması; dispersiyon bağıntısı (3.47)'ün ikinci dalı, $B \to 0.0$, $B \to 1.0$ limitleri, $B = 0.5, 1.5$ değerleri ve sertleşen malzeme modeli $n_{0_T} = 1$ için boyutsuz $\Gamma\Delta$'nın boyutsuz dalga sayısı K'ya göre değişimleri, $\Lambda = 1.0$ değeri için EK B'de Şekil B.35 ile verilmiştir. Benzer biçimde dispersiyon bağıntısı (3.47)'ün ikinci dalı, $B \to 0.0$, $B \to 1.0$ limitleri, $B = 0.5, 1.5$ değerleri ve yumuşayan malzeme modeli $n_{0_T} = -1$ için boyutsuz $\Gamma\Delta$'nın boyutsuz dalga sayısı K'ya göre değişimleri, $\Lambda = 1.0$ değeri için EK B'de Şekil B.36 ile verilmiştir. Grafiklerden de görüldüğü üzere, ikinci dal için sertleşen malzeme modelinde boyutsuz $\Gamma\Delta$'nın negatif değer aldığı, buna karşın yumuşayan malzeme modeli için pozitif değer aldığı gözlenmiştir. Sonuç olarak, her $K > 0$ değeri için; $n_{0_T} > 0$ ise (3.190) NLS denkleminin, dark soliton çözümleri vardır; $n_{0_T} < 0$ ise (3.190) NLS denkleminin bright soliton çözümleri vardır. Ayrıca bright soliton çözümlerin yapısı kararsız, dark soliton çözümlerin yapısı kararlıdır. Ancak bu analizde K'nın sıfıra yakın değerlerinde Δ'nın sınırsız olarak büyüdüğü ve dolayısıyla birinci dal için dipersiyon ile nonlineerliğin birbirlerini dengeleyemedikleri gözlenmektedir. Bu dengenin kurulabilmesi için etkileşim problemlerinin gözönüne alınması gerekebilir ve bu durum başka çalışmalara konu olabilir.

KAYNAKLAR

[1] **Love, A. E. H.** (1944). *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. New York: Dover Publications Inc.

[2] **Graff K. F.** (1975). *Wave Motion in Elastic Solids*, New York: Dover Publications Inc.

[3] **Ewing, W. M., Jardetsky, W. S., Press, F.** (1957). *Elastic Waves in Layered Media*. New York: McGraw-Hill.

[4] **Love, A. E. H.** (1911). *Some Problems of Geodynamics*. Cambridge: Cambridge University Press.

[5] **Gutenberg, B.** (1924). Dispersion und extinktion von seismischen oberflächenwellen und der aufbau der obersten erdschicten, *Physik. Z.*, 25, 377-381.

[6] **Stoneley, R., Tillotson, E.** (1928). The effect of a double surface layer on Love waves, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, Goephys. Suppl.1, 521-527.

[7] **Stoneley, R.** (1928). Dispersion of waves in a double surface layer, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, Goephys. Suppl.1, 527-531.

[8] **Jeffreys, H.** (1931). The formation of Love waves in a two-layer crust., *Gerlands. Beitr. Geophys.*, 30, 336-350.

[9] **Bullen, K. E.** (1963). *An Introduction to the Theory of Seismology*. Cambridge: Cambridge University Press.

[10] **Achenbach, J. D.** (1973). *Wave Propagation in Elastic Solids*. Amsterdam: North Holland Publishing Co.

[11] **Miklowitz, J.** (1978). *The Theory of Elastic Waves and Waveguides*. Amsterdam: North Holland Publishing Co.

[12] **Farnell, G. W.** (1978). Types and Properties of Surface Waves. In A.A. Oliner (Ed.), *Acoustic Surface Waves* (pp.13-60). Berlin: Springer.

[13] **Maugin, G. A.** (1983). Elastic Surface Waves with Transverse Horizontal Polarization. In J.W. Hutchinson (Ed.), *Advances in Applied Mechanics* (23, pp.373-434). New Tork: Academic Press.

[14] **Whitham, G. B.** (1974). *Linear and Nonlinear Waves*. New York: John Wiley and Sons.

[15] **Jeffrey, A., Kawahara, T.** (1981). *Asymptotic Methods in Nonlinear Wave Theory*. Boston: Pitman.

[16] **Dodd, R. K, Eilbeck, J. C., Gibbon, J. D., Morris, H. C.** (1982). *Solitons and Nonlinear Wave Equations*. London: Academic Press.

[17] **Ablowitz, M. J., Clarkson, P. A.** (1991). *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*. Cambridge: Cambridge University Press.

[18] **Johnson, R. S.** (1997). *A Modern Introduction to the Mathematical Theory of Water Waves*. Cambridge: Cambridge University Press.

[19] **Bataille K., Lund, F.** (1982). Nonlinear waves in elastic media, *Physica D*, 6, 95-104.

[20] **Soerensen, M. P., Christiansen, P. L., Lomdahl, P. S.** (1984). Solitary waves in roads I, *J. Acoust. Soc. Am.*, 24, 871-879.

[21] **Teymur, M.** (1988). Nonlinear modulation of Love waves in a compressible hyperelastic layered half space, *Int. J. Eng. Sci.*, 26, 907-927.

[22] **Teymur, M.** (1996). Small but finite amplitude waves in a two-layered incompressible elastic medium, *Int. J. Eng. Sci.,* 34, 227-241.

[23] **Teymur, M.** (2007). Propagation of Long Extensional Nonlinear Waves in a Hyperelastic Layer. In E. Inan, A. Kiris (Eds.), *Springer Proceeding in Physics* (Vol. 111, pp.109-233). Dordrecht: Springer-Verlag.

[24] **Maugin, G. A., Hadouaj, H.** (1991). Solitary surface transverse waves on an elastic substrate coated with a thin film, *Phy. Rev. B., 44* (3), 1266-1280.

[25] **Mayer, A. P., Parker D. F., Maradudin, A. A.** (1992). On the role of second-order nonlinearity in the evolution of shear-horizontal guided acoustic waves, *Phys. Lett. A.*, 164, 171-176.

[26] **Fu, Y. B.** (1996). On the propagation of nonlinear travelling waves in an incompressible elastic plate, *Wave Motion*, 19, 271-292.

[27] **Porubov, A. V., Samsonov, A. M.** (1995). Long nonlinear strain waves in layered elastic half space, *Int. J. Eng. Sci.*, *30* (6), 861-877.

[28] **Ferreira, E. R., Boulanger, Ph.** (2008). Large amplitude Love waves, *Q. Jl. Mech. Appl. Math.*, *61* (3), 353-371.

[29] **Pucci, E., Saccomandi, G.** (2013). Secondary motions associated with anti-plane shear in nonlinear isotropic elasticity, *Q. Jl. Mech. Appl. Math.*, 66, 221-239.

[30] **Ahmetolan, S., Teymur, M.** (2007). Nonlinear modulation of SH waves in an incompressible hyperelastic plate, *Z. angew. Math. Phy.*, 58, 457-474.

[31] **Ahmetolan, S., Teymur, M.** (2003). Nonlinear modulation of SH waves in a two layered plate and formation of surface SH waves, *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 38, 1237-1250.

[32] **Destrade, M., Goriely, M. A. Saccomandi,G.** (2011). Scalar evolution equations for shear waves in incompressible solids: a simple derivation of the Z, ZK, KZK and KP equations, *Proc. R. Soc. A*, 467, 1823-1834.

[33] **Teymur, M., Demirci, A., Ahmetolan, S.** (2014). Propagation of surface SH waves on a half space covered by a nonlinear thin layer, *Int. J. Eng. Sci.*, 85, 150-162.

[34] **Parker, D. F., Maugin, G. A.** (1988). (Eds.), Recent Developments in Surface Acoustic Waves, *Springer Series on Wave Phenomena* (Vol. 7). Berlin: Springer-Verlag.

[35] **Maugin, G. A.** (1994). Physical and Mathematical Models of Nonlinear Waves in Solids. In A. Jeffrey, J. Engelbrecht (Eds.), Nonlinear Waves in Solids, *International Centre for Mechanical Sciences* (Course and Lectures-No.341, pp.109-233). New York: Springer-Verlag.

[36] **Parker, D. F.** (1994). Nonlinear Surface Acoustic Waves and Waves on Stratified Media. In A. Jeffrey, J. Engelbrecht (Eds.), Nonlinear Waves in Solids, *International Centre for Mechanical Sciences* (Course and Lectures-No.341, pp.289-347). New York: Springer-Verlag.

[37] **Samsonov, A. M.** (1994). Nonlinear Strain Waves In Elastic Wave Guides. In A. Jeffrey, J. Engelbrecht (Eds.), Nonlinear Waves in Solids, *International Centre for Mechanical Sciences* (Course And Lectures-No.341, pp.289-347). New York: Springer-Verlag.

[38] **Mayer, A. P.** (1995). Surface acoustic waves in nonlinear elastic media, *Physics Reports*, 256, 4-5.

[39] **Norris, A.** (1998). Finite Amplitude Waves in Solids. In M.F. Hamilton and D.T. Blackstock (Eds.), *Nonlinear Acoustics* (Chap. 9, pp.263-277). San Diego: Academic Press.

[40] **Porubov, A. V.** (2003). *Amplification of Nonlinear Strain Waves in Solids*. Singapore: World Scientific.

[41] **Hudson, J. A.** (1962). Love waves in a heterogeneous medium, *R. Astr. Soc. The Geophys. Jou.*, 6, 131-147.

[42] **Avtar, P.** (1967). Love waves in a two-layered crust overlying a vertically inhomogeneous halfspace., *Pageoph.*, Vol.66.

[43] **Singh, B. M., Singh, S. J., Chopra, S. D., Gogna, M. L.** (1976). On Love waves in laterally and vertically heterogeneous layered media., *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 45, 357-370.

[44] **Kakar, S., Kakar, R.** (2012). Propagation of Love waves in a non-homogeneous elastic media., *J. Acad. Indus. Res.*, *Vol.1* (6).

[45] **Gupta, S., Majhi, D. K., Kundu, S., Vıshwakarma, S. K.** (2012). Propagation of Love waves in non-homogeneous substratum over initially stressed heterogeneous half-space., *Appl. Math. Mech. Eng. Ed.*, DOI 10.1007/s10483-013-1667-7.

[46] **Hasimoto, H., Ono, H.** (1972). Nonlinear modulation of gravity waves, *J. Phys. Soc. Jpn.*, 33, 805-811.

[47] **Samsonov, A. M.** (2001). *Strain Solitons in Solids.* USA: Chapman-Hall/CRC.

[48] **Drazin, P. G., Johnson, R. S.** (1989). *Solitons: An Inroduction.* Cambridge: Cambridge University Press.

[49] **Ramoissenet, M.** (1999). *Waves Called Solitons: Concepts and Experiments.* Berlin: Springer-Verlag.

[50] **Zakharov, V. E., Shabat, A. B.** (1973). Interaction between solitons in a stable medium, *Sov. Phys. JETP,* 37, 823-828.

[51] **Zakharov, V. E., Shabat, A. B.** (1972). Exact theory of two-dimentional self-focusing and one dimensional self-modulation of waves in nonlinear media, *Sov. Phys. JETP, 34* (1), 62-69.

[52] **Kakutani, T., Michihihiro, K.** (1983). Marginal state of modulational instability, *J. Phys. Soc. Jpn.*, *52* (12), 4129-4137.

[53] **Parkes, E. J.** (1987). The modulation of weakly nonlinear waves near the marginal state of instability, *J. Phys. A: Math. Gen.,* 20, 2025-2036.

[54] **Eringen, A. C.,** (1967). *Mechanics of Continua*. New York.

[55] **Var, H. I.** (1997). *Tabakalı bir hiperelastik yarım uzayda nonlineer yüzey SH dalgalarının yayılması*. (Doktora Tezi). İ.T.Ü, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

EKLER

EK A : Heterojen Hiperelastik Ortamlarda Genelleştirilmiş Kayma Hareketi
EK B : Şekiller

EK A Heterojen Hiperelastik Ortamlarda Genelleştirilmiş Kayma Hareketi

Üç boyutlu uzayda bir noktanın, aynı dik kartezyen eksen takımına göre uzaysal ve maddesel koordinatları sırasıyla (x_1, x_2, x_3) ve (X_1, X_2, X_3) üçlü sıralı sayıları ile gösterilmek üzere,

$$x_k = X_K \delta_{kK} + u_3(X_\Delta, t)\delta_{k3} \tag{A.1}$$

denklemi ile belirtilen bir şekil değiştirme genelleştirilmiş kayma hareketi olarak adlandırılır [54]. (A.1) denkleminde t zamanı, δ_{kK} Kronecker sembolünü ve u_3'te bir parçacığın X_3 doğrultusundaki yerdeğiştirme fonksiyonunu göstermektedir. Ayrıca bu bölümde, Latin indislerinin $(1,2,3)$, Yunan indislerinin ise $(1,2)$ değerlerini alacaklarını ve (A.1)'de ve bundan sonra, tekrarlanan iki Latin indisi üzerinde 1'den 3'e kadar, tekrarlanan iki Yunan indisi üzerinde ise 1'den 2'ye kadar toplam yapılacağını kabul edelim. (A.1) ile tanımlanan genelleştirilmiş kayma hareketine ait şekil değiştirme gradyanları sırasıyla,

$$[x_{k,K}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ u_{3,1} & u_{3,2} & 1 \end{bmatrix}, \quad [X_{K,k}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -u_{3,1} & -u_{3,2} & 1 \end{bmatrix} \tag{A.2}$$

olarak hesaplanır. (A.2)'de virgülden sonraki alt indis, bunun belirttiği kartezyen koordinata göre kısmi türevi göstermektedir. (A.2)'deki ilk şekil değiştirme gradyanının determinantı hesaplanırsa,

$$j = \det[x_{k,K}] = 1 \tag{A.3}$$

olduğu görülür. Yani genelleştirilmiş kayma hareketi esnasında hacim değişimi olmaz. Bu tür şekil değiştirmelere izokorik denilmektedir. Ortamın heterojen olması nedeniyle

$$\rho = \rho(\boldsymbol{X}) \tag{A.4}$$

olur. Yani ortamın yoğunluğu $\mathbf{X}$'e bağlıdır. (A.4) bağıntısında ve bundan sonra $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$ olarak alınmaktadır. (A.2)'deki ilk gradyandan faydalanılarak Finger şekil değiştirme tansörü olarak bilinen tansörün bileşenleri

$$c^{-1}_{kl} = x_{k,K} x_{l,K} \tag{A.5}$$

şeklinde yazılabilir. Bu tansörün asal invaryantları bilindiği gibi

$$I_1 = \mathrm{tr}\boldsymbol{c}^{-1}, \quad 2I_2 = (\mathrm{tr}\boldsymbol{c}^{-1})^2 - \mathrm{tr}(\boldsymbol{c}^{-2}), \quad I_3 = \det\boldsymbol{c}^{-1} \tag{A.6}$$

şeklindedir. (A.2) kullanılarak, (A.1) hareketi için c^{-1}_{kl} ve $c^{-1}_{km}c^{-1}_{ml}$ tansörlerinin bileşenleri,

$$\boldsymbol{c}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & u_{3,1} \\ 0 & 1 & u_{3,2} \\ u_{3,1} & u_{3,2} & 1+K^2 \end{bmatrix},$$

$$
\boldsymbol{c}^{-2} = \begin{bmatrix} 1+u_{3,1}^2 & u_{3,1}u_{3,2} & (2+K^2)u_{3,1} \\ u_{3,1}u_{3,2} & 1+u_{3,2}^2 & (2+K^2)u_{3,2} \\ (2+K^2)u_{3,1} & (2+K^2)u_{3,2} & K^2+(1+K^2)^2 \end{bmatrix} \tag{A.7}
$$

olarak bulunur. Burada

$$
K^2 = u_{3,\Delta}u_{3,\Delta} \tag{A.8}
$$

olarak tanımlanmaktadır. t_{kl} ile Cauchy gerilme tansörü olarak bilinen tansörün bileşenlerini ve T_{Kl} ile birinci tür Piola-Kirchoff gerilme tansörü olarak bilinen tansörün bileşenlerini göstermek üzere aralarında

$$
T_{Kl} = jX_{K,k}t_{kl} \tag{A.9}
$$

bağıntısı vardır [54]. Bu çalışmada, çeşitli ortamlarda genelleştirilmiş kayma hareketinin kütle kuvvetlerine ihtiyaç duyulmadan yaratılabileceği gösterilmektedir. Önce ortamın heterojen, izotrop, sıkışabilir hiperelastik olduğunu kabul edelim. Maddesel koordinatlarda geçerli hareket denklemleri

$$
T_{Kk,K} + \rho f_k = \rho \frac{\partial^2 x_k}{\partial t^2} \tag{A.10}
$$

şeklindedir [54]. Burada f_k ile kütle kuvvetinin bileşenleri gösterilmektedir. Kütle kuvvetleri bulunmadığında, (A.10) denklemi genelleştirilmiş kayma hareketi için ifade edilirse, başlangıç konumunda geçerli

$$
T_{\Delta\beta,\Delta} = 0, \quad T_{\Delta 3,\Delta} = \rho \ddot{u}_3 \tag{A.11}
$$

denklemleri elde edilir. Burada u_3'ün üzerindeki bir nokta zamana göre kısmi türevi göstermektedir. (A.11) hareket denklemleri, (A.2), (A.3) ve (A.9) bağıntıları kullanılarak, Cauchy gerilme tansörü cinsinden,

$$
(\delta_{\Delta\alpha}t_{\alpha\beta})_{,\Delta} = 0, \quad (\delta_{\Delta\alpha}t_{\alpha 3})_{,\Delta} = \rho \ddot{u}_3 \tag{A.12}
$$

şeklinde ifade edilebilir. Heterojen, izotrop, sıkışabilir hiperelastik bir ortam için gerilme bünye denklemleri, [54];

$$
t_{kl} = a_o\delta_{kl} + a_1 c_{kl}^{-1} + a_2 c_{km}^{-1} c_{ml}^{-1} \tag{A.13}
$$

şeklinde yazılabilir. Burada a_o, a_1 ve a_2 malzeme fonksiyonları Finger şekil değiştirme tansörünün I_1, I_2, I_3 invaryantlarına ve $\boldsymbol{X}$ parçacığına bağlıdır. Bu üç fonksiyon da tek bir gerilme potansiyeli fonksiyonu Σ tarafından üretilmiş olup,

$$
\begin{aligned}
a_o(I_1,I_2,I_3,\boldsymbol{X}) &= 2\sqrt{I_3}\frac{\partial\Sigma}{\partial I_3} \\
a_1(I_1,I_2,I_3,\boldsymbol{X}) &= \frac{2}{\sqrt{I_3}}\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial I_1} + I_1\frac{\partial\Sigma}{\partial I_2}\right) \\
a_2(I_1,I_2,I_3,\boldsymbol{X}) &= -\frac{2}{\sqrt{I_3}}\frac{\partial\Sigma}{\partial I_2}
\end{aligned} \tag{A.14}
$$

bağıntılarıyla belirlenir.

Başlangıç konumunu doğal durum olarak seçiyoruz ve bu durumda ortamın gerilmesiz olduğunu kabul ediyoruz, yani

$$
c_{kl}^{-1} = \delta_{kl} \quad \text{için} \quad t_{kl} = 0 \tag{A.15}
$$

olur. Doğal durum için asal invaryantlar hesaplanırsa

$$I_1 = I_2 = 3, \quad I_3 = 1 \tag{A.16}$$

olduğu görülür. (A.15) ve (A.16) bağıntıları (A.13)'te kullanılırsa gerilme potansiyeli fonksiyonu Σ'nın doğal durumda

$$\left(\frac{\partial \Sigma}{\partial I_1}\right)_\mathrm{o} + 2\left(\frac{\partial \Sigma}{\partial I_2}\right)_\mathrm{o} + \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial I_3}\right)_\mathrm{o} = 0 \tag{A.17}$$

bağıntısını sağlaması gerekir. Burada kullanılan "o" alt indisi doğal duruma vurgu için kullanılmıştır.
(A.6)'daki bağıntılarla tanımlanan asal invaryantlar, (A.1)'de tanımlanan hareket için hesaplanırsa,

$$I_1 = I_2 = 3 + K^2, \quad I_3 = 1; \quad K^2 = u_{3,\Delta} u_{3,\Delta} \tag{A.18}$$

elde edilir. Yani asal invaryantlar K^2'ye bağlıdır. Diğer yandan heterojen, izotrop bir ortam için Σ'nın asal invaryantlara ve $\boldsymbol{X}$'e bağlı olması gerekir. Bu durumda Σ, K^2 ve $\boldsymbol{X}$'in bir fonksiyonudur. Dolayısıyla bir tek u_3 fonksiyonu tarafından sağlanması gereken üç tane hareket denklemi bulunmaktadır. (A.13) bünye denklemi ile tanımlanan herhangi bir sıkışabilir hiperelastik ortam için (A.12)'deki ilk iki denklem, eğer buradaki üçüncü denklemin bir çözümü tarafından sağlanırsa (A.1) ile tanımlanan genelleştirilmiş kayma hareketi kütle kuvvetleri olmadan böyle bir ortamda var olacaklardır. Genel olarak, Σ gerilme potansiyeli fonksiyonuna herhangi bir kısıtlama konulmadan, bu hareket ancak $\boldsymbol{X}$ düzleminde etkiyen sürekli kütle kuvvetleri ile yaratılabilir. Kütle kuvvetleri olmadan, (A.1) ile tanımlanan hareketin var olabilmesi için Σ gerilme potansiyeli fonksiyonuna bazı kısıtlamaların geleceği açıktır. Şimdi bu kısıtlamaları ortaya çıkaralım. Dikkatle incelendiğinde, (A.12)'deki ilk iki denklemin özdeş olarak sağlanması için (A.1) haraketinin $t_{\alpha\beta}$ gerilme bileşenlerinin sıfır olduğunu kabul etmek yeterlidir. Bu durumda u_3 fonksiyonu (A.12)'deki üçüncü denklemin bir çözümü olarak belirlenir. Yani böyle bir ortam için, kütle kuvvetleri olmadan, (A.1) hareketi yaratılabilecektir. Şimdi lineer ortamlar için durumun böyle olduğunu gösterelim.
(A.7)'deki tansör bileşenleri (A.13)'te kullanılırsa, gerilme bileşenleri

$$t_{11} = 2\frac{\partial \Sigma}{\partial I_1} + 2(2+u_{3,2}^2)\frac{\partial \Sigma}{\partial I_2} + 2\frac{\partial \Sigma}{\partial I_3}, \quad t_{12} = t_{21} = -2\frac{\partial \Sigma}{\partial I_2} u_{3,1} u_{3,2}$$

$$t_{13} = t_{31} = 2\left(\frac{\partial \Sigma}{\partial I_1} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_2}\right) u_{3,1}, \quad t_{22} = 2\frac{\partial \Sigma}{\partial I_1} + 2(2+u_{3,1}^2)\frac{\partial \Sigma}{\partial I_2} + 2\frac{\partial \Sigma}{\partial I_3}$$

$$t_{23} = t_{32} = 2\left(\frac{\partial \Sigma}{\partial I_1} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_2}\right) u_{3,2}, \quad t_{33} = 2(1+K^2)\frac{\partial \Sigma}{\partial I_1} + 2(2+K^2)\frac{\partial \Sigma}{\partial I_2} + 2\frac{\partial \Sigma}{\partial I_3} \tag{A.19}$$

olarak bulunur. Şimdi

$$\tau = \sqrt{t_{13}^2 + t_{23}^2} \tag{A.20}$$

bağıntısıyla bir kayma gerilmesi tanımlayalım. (A.19)'daki t_{13} ve t_{23} gerilme bileşenleri kullanılırsa

$$\tau = 2\left(\frac{\partial \Sigma}{\partial I_1} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_2}\right) K \tag{A.21}$$

bağıntısı elde edilir. Bu bağıntıda K kayma deformasyonunu ölçtüğünden K'nın katsayısı ortamın genelleştirilmiş kayma modülü olarak

$$\hat{\mu} = 2\left(\frac{\partial \Sigma}{\partial I_1} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_2}\right) \tag{A.22}$$

şeklinde tanımlanabilir. (A.18) bağıntılarını kullanarak

$$\hat{\mu} = \frac{1}{K}\frac{\partial \Sigma}{\partial K} \tag{A.23}$$

ve

$$\tau = \hat{\mu}K = \frac{\partial \Sigma}{\partial K} \tag{A.24}$$

yazabiliriz. Çözüm bölgesinde

$$\hat{\mu} = \frac{1}{K}\frac{\partial \Sigma}{\partial K} > 0 \tag{A.25}$$

olduğunu kabul edelim. Ayrıca, μ klasik La'me sabiti olmak üzere

$$\hat{\mu}(0,\boldsymbol{X}) = \mu(\boldsymbol{X}) = \mu \tag{A.26}$$

bağıntısı geçerlidir. Çözüm bölgesinde

$$\frac{\partial \hat{\mu}}{\partial K} > 0 \tag{A.27}$$

ise ortam kaymada düzgün olarak sertleşme (hardening in shear), fakat

$$\frac{\partial \hat{\mu}}{\partial K} < 0 \tag{A.28}$$

ise ortam kaymada düzgün olarak yumuşama (softening in shear) davranışı gösterir. (A.24) bağıntısı K'ya göre türetilirse,

$$K^2\frac{\partial \hat{\mu}}{\partial K} = K\frac{\partial \tau}{\partial K} - \tau \tag{A.29}$$

yazılabilir. Bu durumda sertleşen malzemeler için

$$K\frac{\partial \tau}{\partial K} > \tau \tag{A.30}$$

ve yumuşayan malzemeler için

$$K\frac{\partial \tau}{\partial K} < \tau \tag{A.31}$$

eşitsizlikleri yazılır.
(A.12)'deki üçüncü hareket denkleminde, genelleştirilmiş kayma modülünün tanımı kullanılırsa,

$$(\hat{\mu}u_{3,1})_{,1} + (\hat{\mu}u_{3,2})_{,2} = \rho\ddot{u}_3 \tag{A.32}$$

elde edilir. Şimdi bu denklemin hiperbolik bir denklem olması koşulunun Σ üzerine getireceği kısıtlamayı ortaya çıkaralım. ρ pozitif olduğundan, (A.32) denkleminin çözüm bölgesinde hiperbolik olması için, (A.32) denkleminin sol tarafının bu bölgede eliptik bir operatör olması gerekir. Bunun için,

$$\left(\frac{1}{K}\frac{\partial\hat{\mu}}{\partial K}u_{3,1}^2+\hat{\mu}\right)\left(\frac{1}{K}\frac{\partial\hat{\mu}}{\partial K}u_{3,2}^2+\hat{\mu}\right)-\left(\frac{1}{K}\frac{\partial\hat{\mu}}{\partial K}\right)^2 u_{3,1}^2u_{3,2}^2>0 \tag{A.33}$$

eşitsizliği sağlanmalıdır. Bu eşitsizlikte (A.24) ve (A.29) kullanılarak

$$\hat{\mu}\left(K\frac{\partial\hat{\mu}}{\partial K}+\hat{\mu}\right)=\hat{\mu}\frac{\partial\tau}{\partial K}>0 \tag{A.34}$$

olması gerektiği ortaya çıkar. $\hat{\mu}>0$ kabul edildiğinden, (A.34) eşitsizliğinin gerçekleşmesi için

$$K\frac{\partial\hat{\mu}}{\partial K}+\hat{\mu}>0 \quad \text{veya} \quad \frac{\partial\tau}{\partial K}>0 \tag{A.35}$$

olmalıdır. (A.35) eşitsizliğinde (A.24) kullanılırsa,

$$\frac{\partial^2\Sigma}{\partial K^2}>0 \tag{A.36}$$

elde edilir. Şimdi

$$I_1=I_2, \quad I_3=1 \tag{A.37}$$

koşulu altında, gerilme potansiyeli fonksiyonu Σ'nın

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial I_1}+\frac{\partial\Sigma}{\partial I_3}=\frac{\partial\Sigma}{\partial I_2}=0 \tag{A.38}$$

bağıntısını sağlayan bir ortam gözönüne alalım. Seçilen böyle bir ortam için (A.38) koşulunu sağlayan her hareket için (A.13) gerilme bünye denklemi

$$t_{kl}=2\frac{\partial\Sigma}{\partial I_1}(c_{kl}^{-1}-\delta_{kl}) \tag{A.39}$$

şeklini alır.

Dikkat edilirse (A.1) ile tanımlanan genelleştirilmiş kayma hareketi için, (A.18)'den (A.37) koşulunun sağlandığı görülür. Bu koşul altında, (A.38) koşulunu sağlayan her ortam için gerilme bileşenleri (A.39)'dan

$$t_{\alpha\beta}\equiv 0, \quad t_{\alpha 3}=2\frac{\partial\Sigma}{\partial I_1}u_{3,\alpha}, \quad t_{33}=2K^2\frac{\partial\Sigma}{\partial I_1} \tag{A.40}$$

şeklinde elde edilir. Böyle bir ortam için, $t_{\alpha\beta}\equiv 0$ olduğundan, (A.12)'deki ilk iki hareket denklemi özdeş olarak sağlanır ve

$$\hat{\mu}=2\frac{\partial\Sigma}{\partial I_1} \tag{A.41}$$

olmak üzere, üçüncü denklem ise (A.32) denklemine dönüşür.

Bu çalışmada sonlu fakat küçük genlikli dalga yayılımı problemleri ele alındığından, gerilme potansiyeli fonksiyonu Σ'nın (A.37) koşulu altında (A.38) bağıntısını sağlayan ortamlar için gerilme-şekil değiştirme bağıntılarının ve hareket denklemlerinin yaklaşık formları kullanılacaktır. Bu yaklaşık denklemleri türetmek amacıyla, Σ'nın I_1, I_2 ve I_3'ün analitik fonksiyonu olduğunu kabul ederek, bu fonksiyonu doğal durum civarında $(I_1-3),(I_2-3)$ ve (I_3-1)'in kuvvetleri cinsinden aşağıdaki formda bir seri olarak yazabiliriz:

$$\Sigma(I_1,I_2,I_3,\boldsymbol{X})=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}c_{pqr}(I_1-3)^p(I_2-3)^q(I_3-1)^r \tag{A.42}$$

Burada c_{pqr} katsayıları, ortam heterojen olduğundan, $\boldsymbol{X}$'e bağlı olup

$$c_{pqr}=c_{pqr}(\boldsymbol{X})=\frac{1}{(p+q+r)!}\frac{\partial^{p+q+r}\Sigma(3,3,1,\boldsymbol{X})}{\partial I_1^p\partial I_2^q\partial I_3^r} \tag{A.43}$$

şeklinde tanımlanır. Başlangıç durumunda enerjinin sıfır olması için

$$c_{000}=0 \tag{A.44}$$

olması gerekir. Ayrıca başlangıç durumunda ortamın gerilmesiz olması için (A.17) bağıntısından

$$c_{100}+2c_{010}+c_{001}=0 \tag{A.45}$$

elde edilir.

Şimdi lineer bir ortam gözönüne alalım. Bu durumda, (A.42)'deki açılımda sadece birinci mertebeden terimleri gözönüne alarak, gerilme potansiyeli fonksiyonunu

$$\Sigma=c_{100}(I_1-3)+c_{010}(I_2-3)+c_{001}(I_3-1) \tag{A.46}$$

biçiminde seçelim. (A.37) koşulu gerçeklendiğinde (A.38) bağıntısının sağlanabilmesi için

$$c_{010}=0,\quad c_{100}+c_{001}=0 \tag{A.47}$$

olmalıdır.

Dikkatle incelenirse, başlangıç konumunda (A.45) bağıntısının sağlaması gerektiğinden, $c_{010}=0$ olduğunda (A.47)'deki ikinci bağıntı özdeş olarak sağlanacaktır. Bu durumda genelleştirilmiş kayma modülü

$$\hat{\mu}=2c_{100}=\mu \tag{A.48}$$

olarak hesaplanır.

Bu bölümde lineer bir ortamda çalışıldığından, (A.40)'dan gerilme bileşenleri

$$t_{\alpha\beta}=0,\quad t_{\alpha 3}=\mu u_{3,\alpha},\quad t_{33}=0 \tag{A.49}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla, lineer ortamlar için (A.12)'deki ilk iki hareket denklemi özdeş olarak sağlanır ve üçüncü denklem ise

$$[2c_{100}u_{3,1}]_{,1}+[2c_{100}u_{3,2}]_{,2}=\rho\ddot{u}_3$$

veya açıkça

$$\ddot{u}_3-c^2u_{3,\Delta\Delta}-\frac{(\rho c^2)_{,\Delta}}{\rho}u_{3,\Delta}=0 \tag{A.50}$$

şeklinde yazılır. Burada

$$c^2=\frac{\mu}{\rho} \tag{A.51}$$

olarak tanımlanmaktadır. Dikkat edilirse, ortamın homojen olması halinde (A.51) bağıntısındaki μ ve ρ sabit olur ve dolayısıyla c^2 sabit olur. Böylece (A.50) denkleminin sol tarafındaki son terim sıfır olur. Bu durum [55]'de yapılan çalışmadaki (A.48) bağıntısıyla örtüşür. Sonuç olarak, $\boldsymbol{X}$ düzleminde etkiyen kuvvetleri bulunmadan da lineer ortamlar için (A.1) ile tanımlanan hareket yaratılabilmektedir.

Şimdi nonlineer bir ortam gözönüne alalım. Yine sonlu fakat küçük genlikli genelleştirilmiş kayma hareketi için hareket denklemlerinin yaklaşık formlarını türetelim. (A.42)'deki seri açılımında (A.18) bağıntıları kullanılırsa,

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial I_1} = c_{100} + (2c_{200} + c_{110})K^2 + \mathscr{O}(K^4)$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial I_2} = c_{010} + (2c_{020} + c_{110})K^2 + \mathscr{O}(K^4)$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial I_3} = c_{001} + (c_{101} + c_{011})K^2 + \mathscr{O}(K^4) \tag{A.52}$$

elde edilir. Eğer Σ'nın seri açılımındaki bazı malzeme fonksiyonları arasında (A.47) ve buna ek olarak

$$2c_{200} + c_{110} + c_{101} + c_{011} = 0, \quad 2c_{020} + c_{110} = 0 \tag{A.53}$$

bağıntıları geçerli ise

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial I_1} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_3} = \mathscr{O}(K^4), \quad \frac{\partial \Sigma}{\partial I_2} = \mathscr{O}(K^4) \tag{A.54}$$

olur. Bu koşullar altında gerilme bileşenleri

$$t_{\alpha\beta} = \mathscr{O}(K^4), \quad t_{\alpha 3} = 2[c_{100} + 2(c_{200} + c_{020} + c_{110})K^2]u_{3,\alpha} + \mathscr{O}(K^4)$$

$$t_{33} = 2c_{100}K^2 + \mathscr{O}(K^4) \tag{A.55}$$

şeklinde yazılabilir.

Nonlineer teori için gerilme-şekil değiştirme bağıntılarında mertebesi K^4 ve daha yüksek terimlerin ihmal edilmesi durumunda, (A.12)'deki ilk iki hareket denklemi özdeş olarak sağlanır ve üçüncü denklem ise

$$\{2[c_{100}+2(c_{200}+c_{020}+c_{110})K^2]u_{3,1}\}_{,1} + \{2[c_{100}+2(c_{200}+c_{020}+c_{110})K^2]u_{3,2}\}_{,2} = \rho \ddot{u}_3$$

veya açıkça

$$\ddot{u}_3 - c^2 u_{3,\Delta\Delta} - \frac{(\rho c^2)_{,\Delta}}{\rho} u_{3,\Delta} = n\,[\mathscr{N}(u_3)]_{,\Delta} + \frac{(\rho n)_{,\Delta}}{\rho}\mathscr{N}(u_3) \tag{A.56}$$

$$n = 4(c_{200} + c_{020} + c_{110})/\rho \tag{A.57}$$

$$\mathscr{N}(u_3) = u_{3,\Delta}K^2 \tag{A.58}$$

şeklinde yazılır. Dikkat edilirse, ortamın homojen olması durumunda, [55]'deki (A.54) bağıntısı elde edilir.

Yukarıdaki yaklaşım altında genelleştirilmiş kayma modülü

$$\frac{\hat{\mu}}{\rho} = c^2 + nK^2 \tag{A.59}$$

olur. Dikkat edilirse, $c^2 > 0$ olduğu için eğer $n > 0$ ise K arttıkça $\hat{\mu}$ monoton olarak artacak; $n < 0$ ise monoton olarak azalacaktır. Bu gözlem $n > 0$ olduğunda ortamın kayma hareketinde sertleşen davranış gösterdiğini; $n < 0$ olduğunda ise yumuşayan bir davranış gösterdiğini söylemektedir. $\hat{\mu}(K,\boldsymbol{X}) > 0$ kabul edildiğinden, çözüm bölgesinde

$$c^2 + nK^2 > 0 \tag{A.60}$$

olmalıdır. Diğer taraftan (A.56) denkleminin hiperbolik olması için de (A.34)'den çözüm bölgesi için

$$c^2 + 3nK^2 > 0 \tag{A.61}$$

eşitsizliğinin sağlanması gerektiği anlaşılır. $n > 0$ olması durumunda (A.60) ve (A.61) eşitsizlikleri çözüm bölgesinde sağlanır. Ancak, $n < 0$ ise bu eşitsizliklerin her ikisinin aynı anda sağlanabilmesi için

$$0 < K^2 < \frac{c^2}{3|n|} \tag{A.62}$$

koşulunun sağlanması gerekli ve yeterlidir. K kayma deformasyonunu ölçtüğü için (A.62) eşitsizliği dalga hareketinin genliğine bir kısıtlama getirir. Çalışmada sonlu fakat küçük genlikli dalga hareketleri ile ilgilenildiğinden bunun sağlandığı kabul edilebilir.

Şimdi ortamın heterojen, izotrop, sıkışmaz hiperelastik malzemeden oluştuğunu düşünelim. Bu durumda (A.12) bünye bağıntısı, [54];

$$t_{kl} = -p\delta_{kl} + a_1 c_{kl}^{-1} + a_2 c_{km}^{-1} c_{ml}^{-1} \tag{A.63}$$

şeklini alır. Burada $p = p(X_K, t)$ basınç fonksiyonudur ve harekete bağlı olarak hesaplanır. Ayrıca,

$$a_1(I_1, I_2, \boldsymbol{X}) = 2\left(\frac{\partial \Sigma}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_2}\right), \quad a_2(I_1, I_2, \boldsymbol{X}) = -2\frac{\partial \Sigma}{\partial I_2} \tag{A.64}$$

olarak tanımlanır ve $\Sigma = \Sigma(I_1, I_2, \boldsymbol{X})$ olur.

(A.7) bileşenleri, (A.63)'te kullanılırsa, gerilme bileşenleri

$$t_{11} = -p + 2\frac{\partial \Sigma}{\partial I_1} + 2(2 + u_{3,2}^2)\frac{\partial \Sigma}{\partial I_2}, \quad t_{12} = t_{21} = -2\frac{\partial \Sigma}{\partial I_2} u_{3,1} u_{3,2}$$

$$t_{\alpha 3} = 2\left(\frac{\partial \Sigma}{\partial I_1} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_2}\right) u_{3,\alpha}, \quad t_{22} = -p + 2\frac{\partial \Sigma}{\partial I_1} + 2(2 + u_{3,1}^2)\frac{\partial \Sigma}{\partial I_2}$$

$$t_{33} = -p + 2(1 + K^2)\frac{\partial \Sigma}{\partial I_1} + 2(2 + K^2)\frac{\partial \Sigma}{\partial I_2} \tag{A.65}$$

elde edilir. Bu kısımda, p basınç fonksiyonunun X_1 ve X_2'nin yanısıra X_3'ün de fonksiyonu olduğunu gözönünde tutarsak, hareket denklemleri başlangıç durumunda, kütle kuvvetleri bulunmadığında Cauchy gerilmeleri cinsinden

$$t_{11,1} + t_{21,2} - u_{3,1} t_{11,3} = 0$$

$$t_{12,1} + t_{22,2} - u_{3,2} t_{22,3} = 0$$

$$t_{13,1} + t_{23,2} + t_{33,3} = \rho \ddot{u}_3 \tag{A.66}$$

yazılır. (A.65) gerilme bileşenleri (A.66)'da yazılırsa,

$$\left[-p+2\frac{\partial\Sigma}{\partial I_1}+4\frac{\partial\Sigma}{\partial I_2}\right]_{,1}+\left[2\left(u_{3,2}\frac{\partial\Sigma}{\partial I_2}\right)_{,1}u_{3,2}-2\left(u_{3,2}\frac{\partial\Sigma}{\partial I_2}\right)_{,2}u_{3,1}\right]+u_{3,1}p_{,3}=0$$

$$\left[-p+2\frac{\partial\Sigma}{\partial I_1}+4\frac{\partial\Sigma}{\partial I_2}\right]_{,2}+\left[2\left(u_{3,1}\frac{\partial\Sigma}{\partial I_2}\right)_{,2}u_{3,1}-2\left(u_{3,1}\frac{\partial\Sigma}{\partial I_2}\right)_{,1}u_{3,2}\right]+u_{3,2}p_{,3}=0$$

$$\left[2\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial I_1}+\frac{\partial\Sigma}{\partial I_2}\right)u_{3,1}\right]_{,1}+\left[2\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial I_1}+\frac{\partial\Sigma}{\partial I_2}\right)u_{3,2}\right]_{,2}-\rho\ddot{u}_3=p_{,3} \tag{A.67}$$

denklemleri elde edilir.
Sıkışabilir ortamlar için tanımlanan kayma gerilmesi, sıkışmaz ortamlar içinde (A.20) bağıntısıyla tanımlanır. Bu durumda genelleştirilmiş kayma modülü (A.22) bağıntısıyla verilir. Dolayısıyla (A.67)'deki son denklem

$$(\hat{\mu}u_{3,1})_{,1}+(\hat{\mu}u_{3,2})_{,2}=\rho\ddot{u}_3+p_{,3} \tag{A.68}$$

şeklinde ifade edilir. Bu denklemin hiperbolik olması için, $\hat{\mu}>0$ kabul edildiğinden, (A.35) koşulunun sağlanması gerekir. (A.67)'deki son denklemin sol tarafı X_1,X_2 ve t'nin fonksiyonu olduğundan

$$p_{,3}=\kappa_0(X_1,X_2,t) \tag{A.69}$$

yazılır. Bu durumda, p için

$$p=\kappa_0(X_1,X_2,t)X_3+\kappa_1(X_1,X_2,t) \tag{A.70}$$

bağıntısı elde edilir. Burada κ_0 ve κ_1 birer keyfi fonksiyondur. (A.67)'deki ilk iki denklemde, (A.70) bağıntısı kullanılırsa, her X_3 için bu iki denklemin sağlanması için

$$\kappa_{0,1}=0,\quad \kappa_{0,2}=0 \tag{A.71}$$

olması gerekir. Buradan da f keyfi bir fonksiyonu göstermek üzere

$$\kappa_0=f(t) \tag{A.72}$$

yazılır. Sonuç olarak, (A.67)'deki ilk iki denklem

$$\left[-\kappa_1+2\frac{\partial\Sigma}{\partial I_1}+4\frac{\partial\Sigma}{\partial I_2}+u_3f(t)\right]_{,1}+2\left[\left(u_{3,2}\frac{\partial\Sigma}{\partial I_2}\right)_{,1}u_{3,2}-\left(u_{3,2}\frac{\partial\Sigma}{\partial I_2}\right)_{,2}u_{3,1}\right]=0$$

$$\left[-\kappa_1+2\frac{\partial\Sigma}{\partial I_1}+4\frac{\partial\Sigma}{\partial I_2}+u_3f(t)\right]_{,2}+2\left[\left(u_{3,1}\frac{\partial\Sigma}{\partial I_2}\right)_{,2}u_{3,1}-\left(u_{3,1}\frac{\partial\Sigma}{\partial I_2}\right)_{,1}u_{3,2}\right]=0 \tag{A.73}$$

şeklini alır. Bu denklemlerin ilki X_2'ye ikincisi de X_1'e göre türetilir ve ilk sonuçtan ikincisi çıkartılırsa,

$$\left[\left(u_{3,2}\frac{\partial\Sigma}{\partial I_2}\right)_{,1}u_{3,2}-\left(u_{3,2}\frac{\partial\Sigma}{\partial I_2}\right)_{,2}u_{3,1}\right]_{,2}-\left[\left(u_{3,1}\frac{\partial\Sigma}{\partial I_2}\right)_{,2}u_{3,1}-\left(u_{3,1}\frac{\partial\Sigma}{\partial I_2}\right)_{,1}u_{3,2}\right]_{,1}=0 \tag{A.74}$$

uygunluk denklemi elde edilir. (A.67)'daki son denklemin bir çözümü, verilen sıkışmaz malzeme için (A.74) uygunluk koşulunu sağlıyorsa, bu durumda bu çözümün tanımladığı hareket, bu ortam içinde kütle kuvvetlerine ihtiyaç duyulmadan yaratılır. Şimdi

$$I_1 = I_2 \tag{A.75}$$

olduğunda, gerilme potansiyeli fonksiyonu

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial I_2} = 0 \tag{A.76}$$

bağıntısını sağlayan sıkışmaz bir ortam gözönüne alalım. Böyle bir ortam için (A.74) uygunluk koşulu doğrudan sağlanır ve (A.73)'deki denklemler

$$\left[-\kappa_1 + 2\frac{\partial \Sigma}{\partial I_1} + u_3 f(t)\right]_{,1} = 0, \quad \left[-\kappa_1 + 2\frac{\partial \Sigma}{\partial I_1} + u_3 f(t)\right]_{,2} = 0 \tag{A.77}$$

şeklini alır. Bu denklemleri integre edersek,

$$\kappa_1 = 2\frac{\partial \Sigma}{\partial I_1} + u_3 f(t) + g(t) \tag{A.78}$$

bulunur. Burada g keyfi bir fonksiyondur. Sonuç olarak p basınç fonksiyonu

$$p = f(t)X_3 + 2\frac{\partial \Sigma}{\partial I_1} + u_3 f(t) + g(t) \tag{A.79}$$

bağıntısıyla belirlenir. Basınç fonksiyonu (A.65)'de yerleştirilirse,

$$t_{11} = t_{22} = -f(t)X_3 - u_3 f(t) - g(t), \quad t_{12} = t_{21} = 0, \quad t_{\alpha 3} = 2\frac{\partial \Sigma}{\partial I_1} u_{3,\alpha}$$

$$t_{33} = -f(t)X_3 - u_3 f(t) - g(t) + 2K^2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_1} \tag{A.80}$$

elde edilir. (A.80) deki gerilmeler dikkatle incelenirse, $|X_3| \to \infty$ için t_{11}, t_{22}, t_{33} sonsuza gider. Öte yandan bu limitle gerilmelerin sınırlı kalmaları gerektiği için

$$f(t) = 0 \tag{A.81}$$

olması gerekir. Ayrıca doğal durumu gerilmesiz kabul ettiğimiz için

$$g(t) = 0 \tag{A.82}$$

olması gerekir. (A.81) ve (A.82) bağıntıları (A.80)'de yerleştirilirse,

$$t_{\alpha\beta} = 0, \quad t_{\alpha 3} = 2\frac{\partial \Sigma}{\partial I_1} u_{3,\alpha}, \quad t_{33} = 2K^2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_1} \tag{A.83}$$

elde edilir ve p basınç fonksiyonu da (A.79)'dan

$$p = 2\frac{\partial \Sigma}{\partial I_1} \tag{A.84}$$

formuna dönüşür. Bu durumda, (A.66)'da yer alan ilk iki denklem özdeş olarak sağlanır ve üçüncü denklem de

$$\hat{\mu} = 2\frac{\partial \Sigma}{\partial I_1} \tag{A.85}$$

olmak üzere yine (A.32)'ye dönüşür. Sonuç olarak (A.75) olduğunda (A.76) koşulunu sağlayan ortamlar için genelleştirilmiş kayma hareketi $\boldsymbol{X}$ düzleminde etkiyen sürekli kütle kuvvetlerine ihtiyaç duyulmadan yaratılır.

Şimdi nonlineer, sıkışmaz bir ortamda sonlu fakat küçük genlikli dalgaların hareket denklemlerinin yaklaşık formlarını türeteceğiz. Bunun için Σ'nın I_1 ve I_2'nin analitik fonksiyonu kabul ederek seriye açalım:

$$\Sigma(I_1, I_2, \boldsymbol{X}) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} c_{pq0}(I_1 - 3)^p (I_2 - 3)^q \tag{A.86}$$

Burada c_{pq0} katsayıları, ortam heterojen olduğundan, $\boldsymbol{X}$'e bağlı olup

$$c_{pq0} = c_{pq0}(\boldsymbol{X}) = \frac{1}{(p+q)!} \frac{\partial^{p+q} \Sigma(3,3,\boldsymbol{X})}{\partial I_1^p \partial I_2^q} \tag{A.87}$$

şeklinde tanımlanabilir. Başlangıç durumunda enerjinin sıfır olması için

$$c_{000} = 0 \tag{A.88}$$

olması gerekir. (A.86) seri açılımında (A.18) bağıntısı kullanılırsa,

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial I_1} = c_{100} + (2c_{200} + c_{110})K^2 + \mathscr{O}(K^4)$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial I_2} = c_{010} + (2c_{020} + c_{110})K^2 + \mathscr{O}(K^4) \tag{A.89}$$

yazılır. Eğer

$$c_{010} = 0, \quad c_{110} + 2c_{020} = 0 \tag{A.90}$$

ise (A.76) koşulu altında

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial I_2} = \mathscr{O}(K^4) \tag{A.91}$$

olur ve bu durumda gerilme bileşenleri

$$t_{\alpha\beta} = \mathscr{O}(K^4), \quad t_{\alpha 3} = 2[c_{100} + (2c_{200} + c_{110})K^2]u_{3,\alpha} + \mathscr{O}(K^4)$$

$$t_{33} = 2c_{100}K^2 + \mathscr{O}(K^4) \tag{A.92}$$

şeklinde yazılır. Bu durumunda, mertebesi K^4 ve daha yüksek terimler ihmal edilirse, (A.12)'deki ilk iki hareket denklemi özdeş olarak sağlanır ve üçüncü denklem de

$$n = 2(c_{110} + 2c_{200})/\rho \tag{A.93}$$

olmak üzere (A.56) denklemine dönüşür. Bu denklemde yine c, (A.51) bağıntısıyla ve μ'de (A.48) bağıntısıyla verilir. Genelleştirilmiş kayma modülü de n, (A.93) bağıntısıyla tanımlanmak üzere (A.59) bağıntısı ile verilir ve bundan sonra yapılan tartışma bu durumda da aynen geçerlidir.

Son olarak bu kısımda, neo-Hookean adı verilen malzemeler için, yani gerilme potansiyeli fonksiyonunun yanlızca I_1 invaryantına bağlı olması durumunda, malzemenin heterojen ve sıkışmaz olduğunu düşünerek çalışalım. Böyle malzemeler için (A.63) bünye bağıntısı, [54];

$$t_{kl} = -p\delta_{kl} + a_1 c_{kl}^{-1} \tag{A.94}$$

şeklini alır. (A.74) uygunluk koşulu sağlanacağından buna bağlı olarak hareket denklemlerinin ilk ikisi özdeş olarak sağlanır ve üçüncü denklem de yine $\hat{\mu}$, (A.85) bağıntısıyla verilmek üzere (A.32)'ye dönüşür.
Böyle ortamlar için gerilme potansiyeli fonksiyonunun Σ'nın I_1'in analitik fonksiyonu olduğunu kabul ederek aşağıdaki şekilde seriye açabiliriz.

$$\Sigma(I_1, \boldsymbol{X}) = \sum_{p=0}^{\infty} c_{p00}(I_1 - 3)^p \tag{A.95}$$

Burada c_{p00} katsayıları, ortam heterojen olduğundan, $\boldsymbol{X}$'e bağlı olup

$$c_{p00} = c_{p00}(\boldsymbol{X}) = \frac{1}{p!} \frac{\partial^p \Sigma(3, \boldsymbol{X})}{\partial I_1^p} \tag{A.96}$$

şeklinde tanımlanır. Başlangıç durumunda enerjinin sıfır olması için

$$c_{000} = 0 \tag{A.97}$$

olması gerekir. (A.95) seri açılımında (A.18) bağıntısı kullanılırsa,

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial I_1} = c_{100} + 2c_{200}K^2 + \mathscr{O}(K^4) \tag{A.98}$$

yazılır ve dolayısıyla gerilme bileşenleri

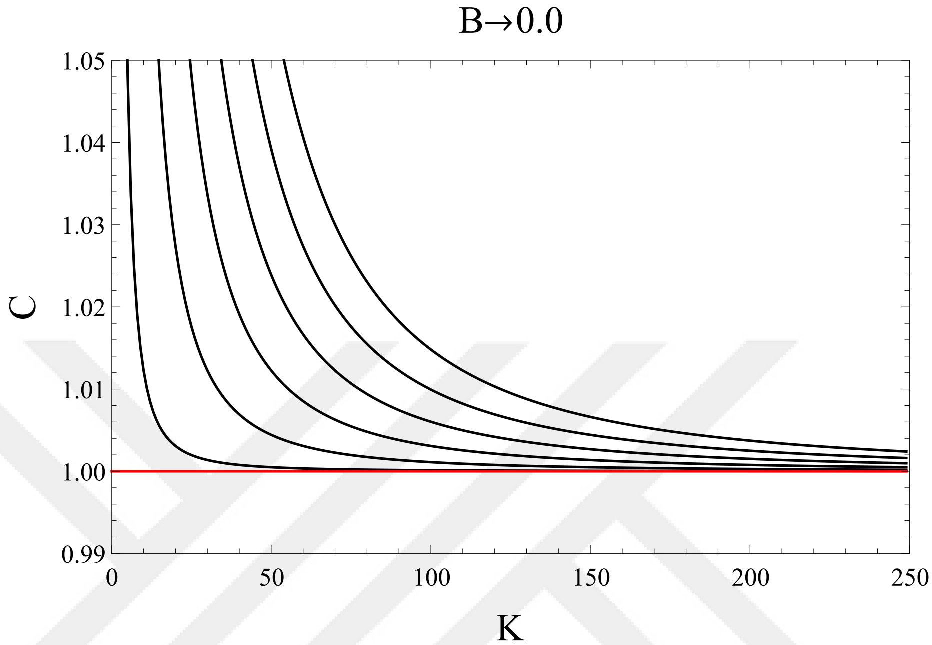
$$t_{\alpha\beta} = \mathscr{O}(K^4), \quad t_{\alpha 3} = 2(c_{100} + 2c_{200}K^2)u_{3,\alpha} + \mathscr{O}(K^4)$$
$$t_{33} = 2c_{100}K^2 + \mathscr{O}(K^4) \tag{A.99}$$

şeklinde elde edilir. (A.32) denkleminde mertebesi K^4 ve daha yüksek terimler ihmal edilirse, bu denklem yine

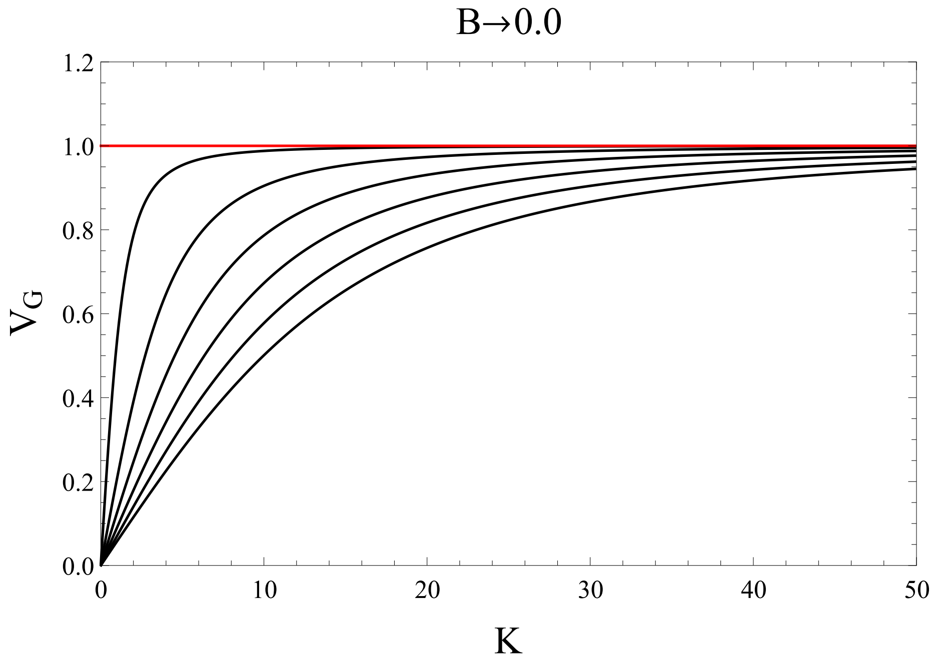
$$n = 4c_{200}/\rho \tag{A.100}$$

olmak üzere (A.56) denklemine dönüşür. Burada c, (A.51) ve μ'de (A.48) bağıntılarıyla verilmektedir. Genelleştirilmiş kayma modülü de n, (A.100) bağıntısıyla tanımlanmak üzere (A.59) bağıntısı ile verilir ve (A.59)'dan sonraki tartışma da aynen geçerlidir.

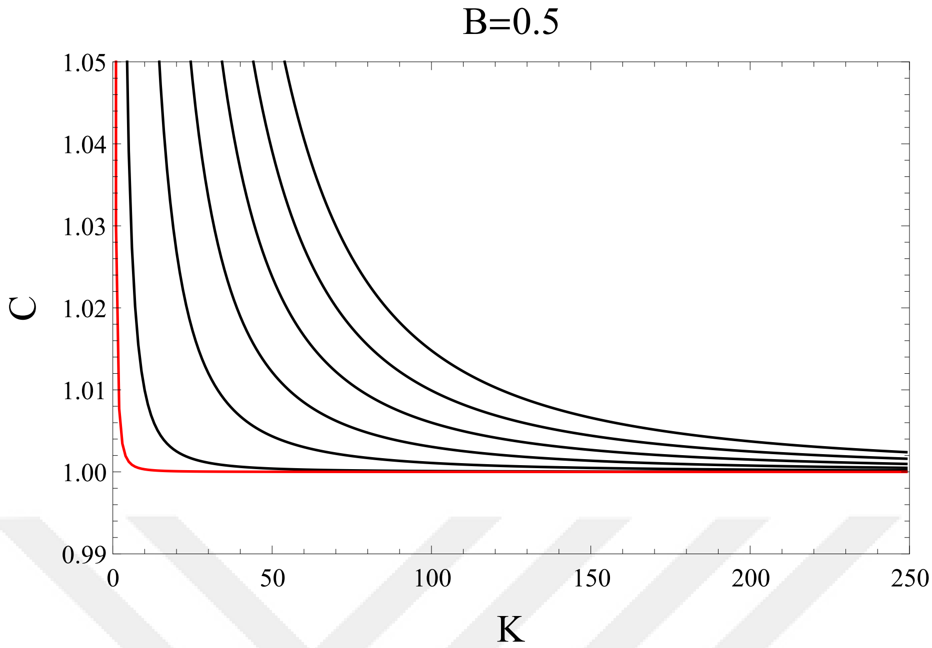
EK B Şekiller



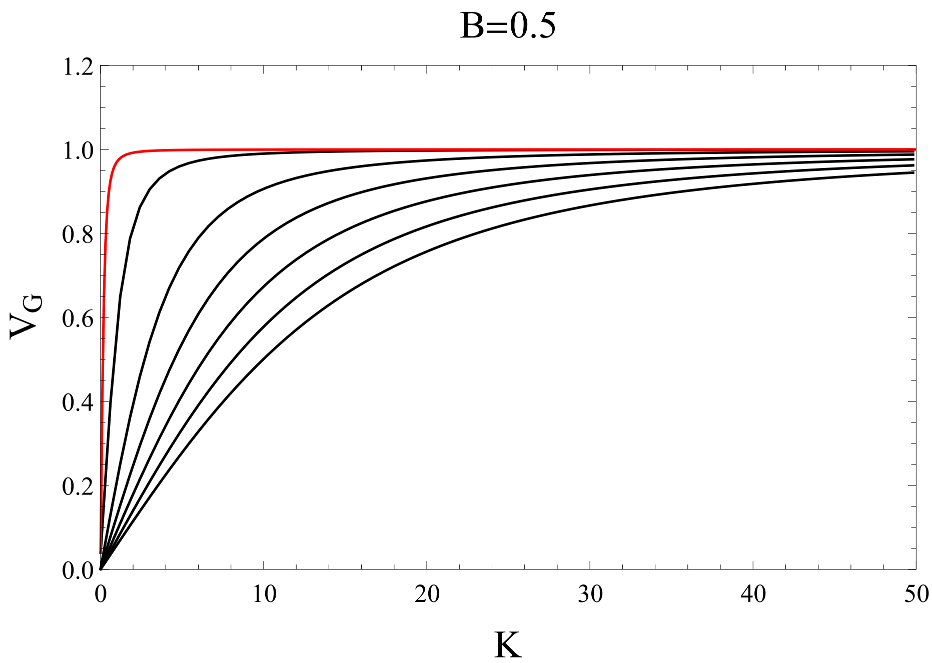
Şekil B.1 : Dispersiyon bağıntısı (2.40)'ın ilk altı dalı veya (3.47)'nin ilk altı dalı ve $B \to 0.0$ için C'nin K'ya göre değişimi.



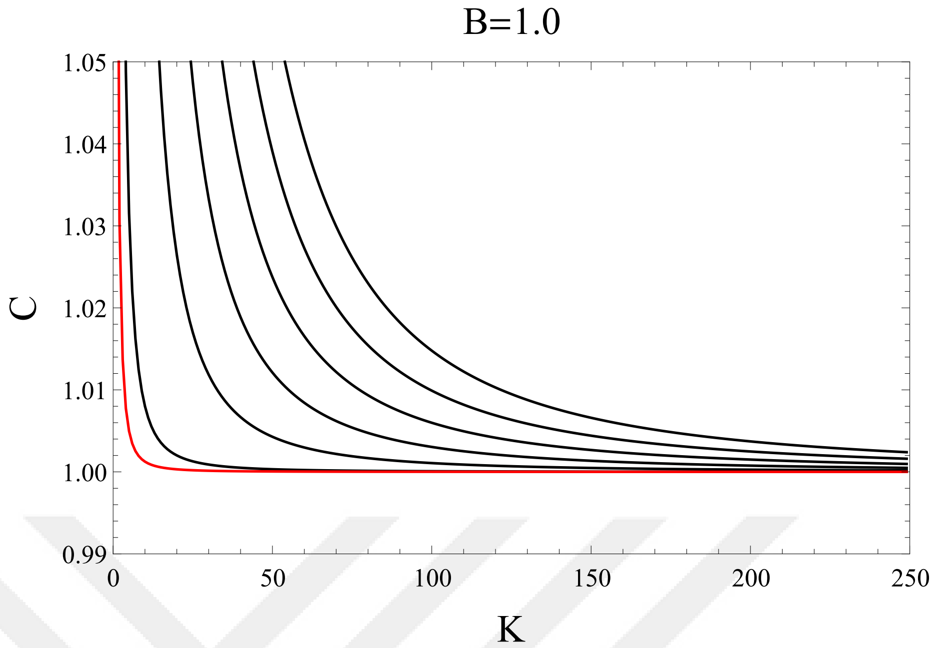
Şekil B.2 : Dispersiyon bağıntısı (2.40)'ın ilk altı dalı veya (3.47)'nin ilk altı dalı ve $B \to 0.0$ için V_G'nin K'ya göre değişimi.



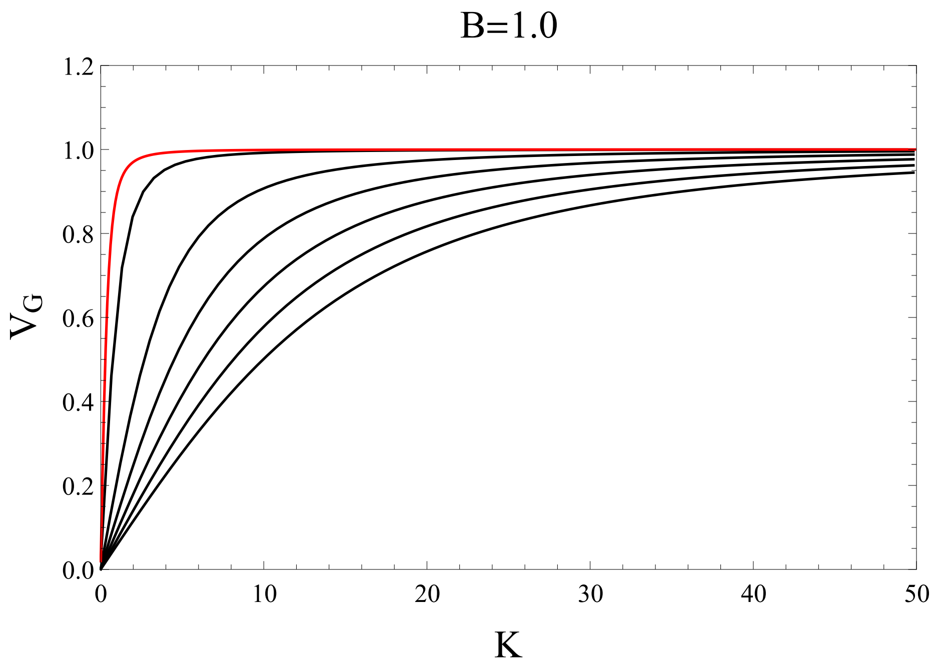
Şekil B.3 : Dispersiyon bağıntısı (3.47)'nin ilk altı dalı ve $B = 0.5$ için C'nin K'ya göre değişimi.



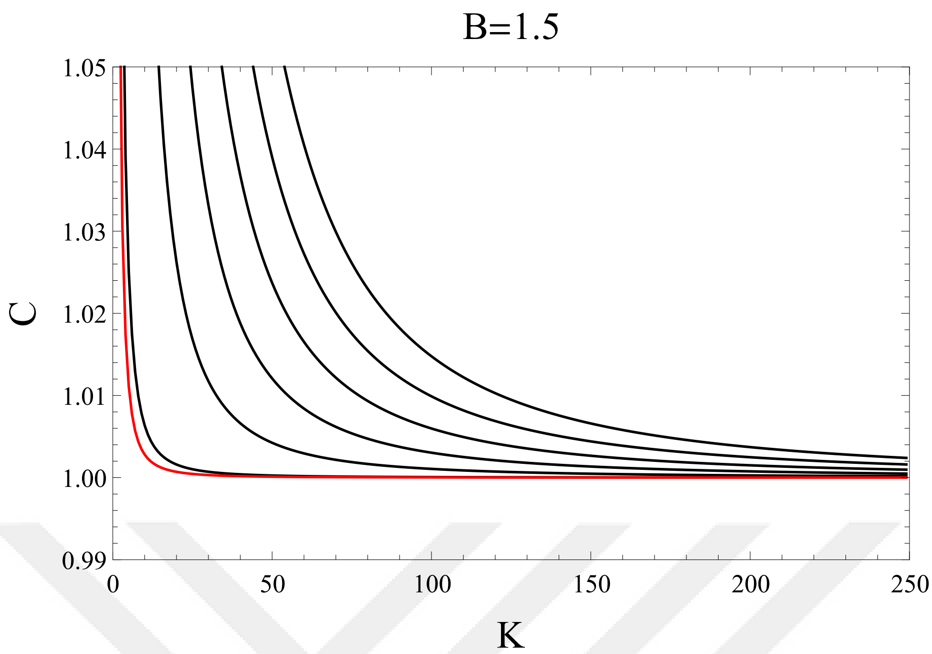
Şekil B.4 : Dispersiyon bağıntısı (3.47)'nin ilk altı dalı ve $B = 0.5$ için V_G'nin K'ya göre değişimi.



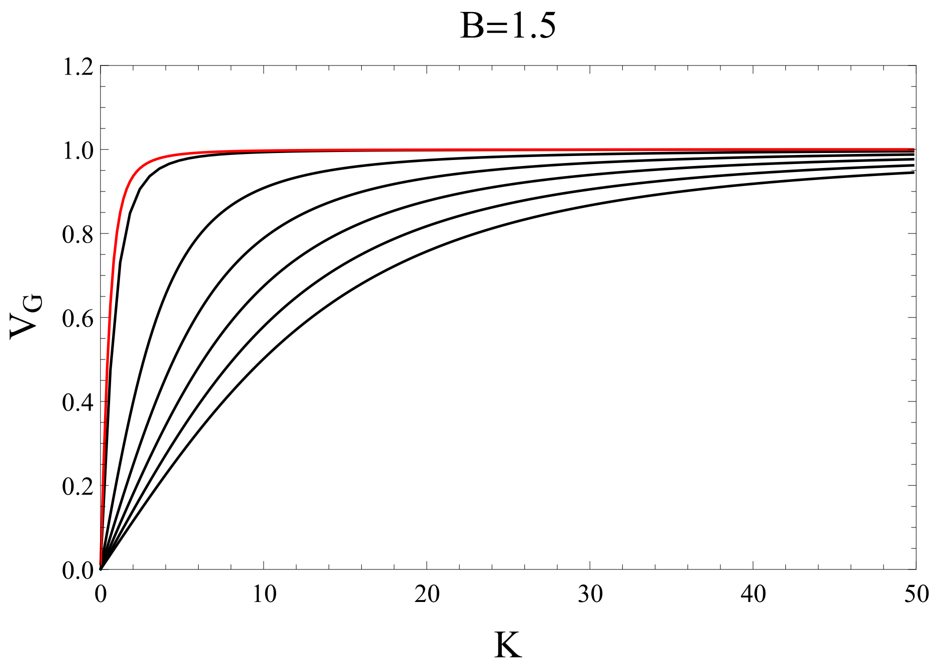
Şekil B.5 : Dispersiyon bağıntısı (3.47)'nin ilk altı dalı ve $B = 1.0$ için C'nin K'ya göre değişimi.



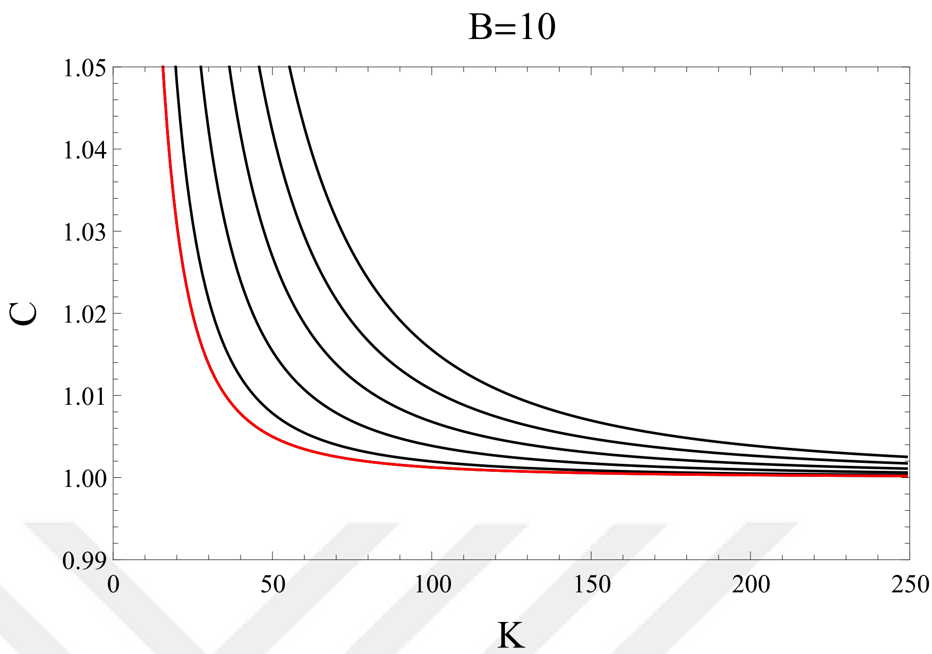
Şekil B.6 : Dispersiyon bağıntısı (3.47)'nin ilk altı dalı ve $B = 1.0$ için V_G'nin K'ya göre değişimi.



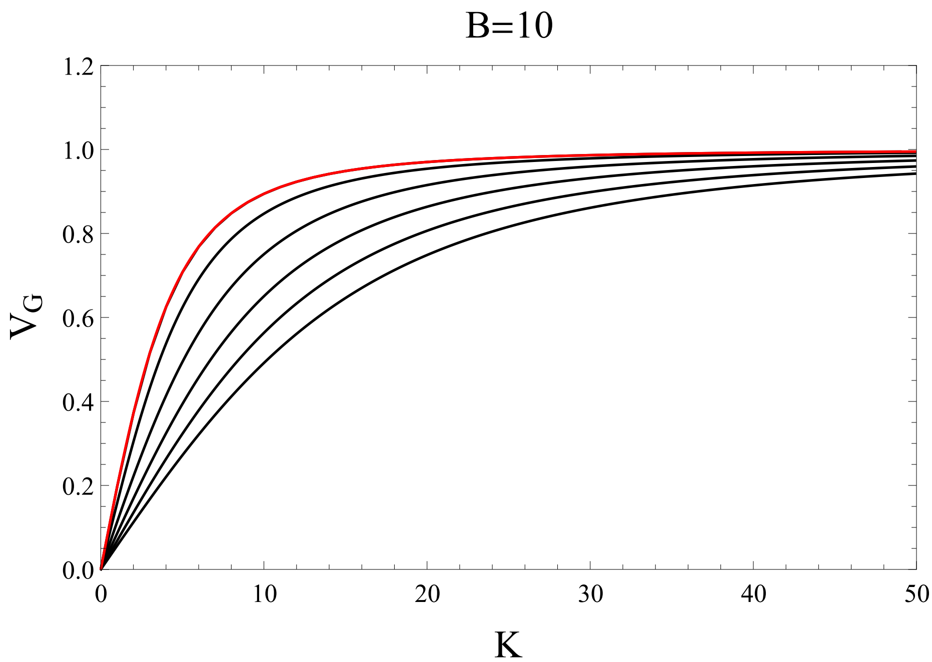
Şekil B.7 : Dispersiyon bağıntısı (3.47)'nin ilk altı dalı ve $B = 1.5$ için C'nin K'ya göre değişimi.



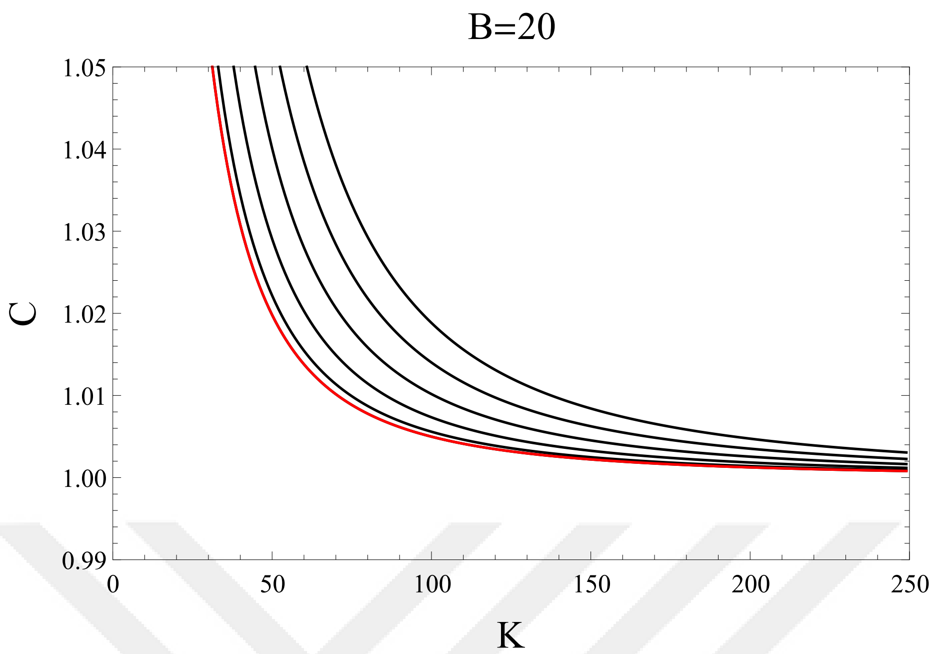
Şekil B.8 : Dispersiyon bağıntısı (3.47)'nin ilk altı dalı ve $B = 1.5$ için V_G'nin K'ya göre değişimi.



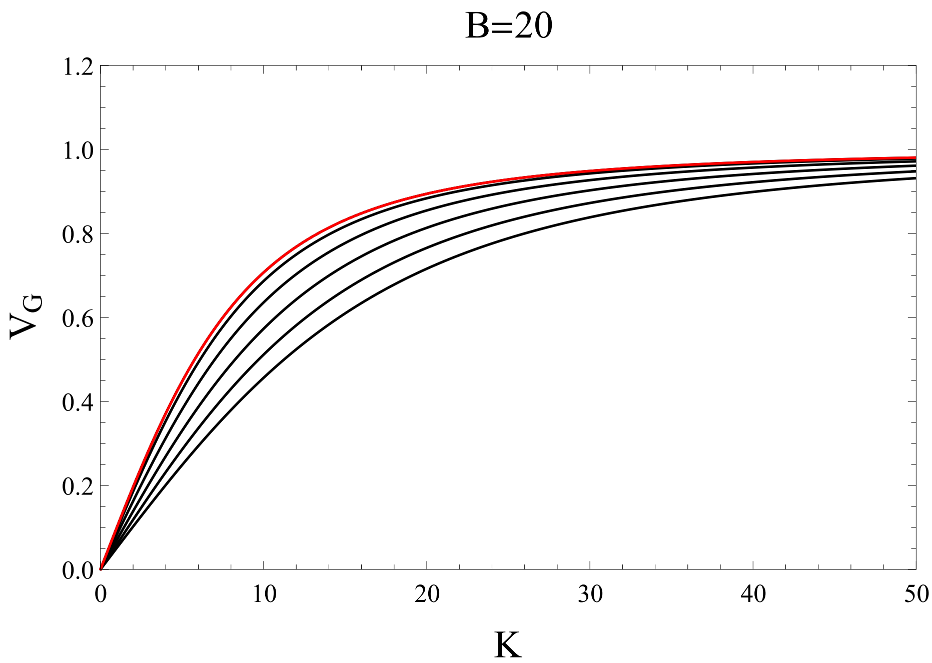
Şekil B.9 : Dispersiyon bağıntısı (3.47)'nin ilk altı dalı ve $B = 10$ için C'nin K'ya göre değişimi.



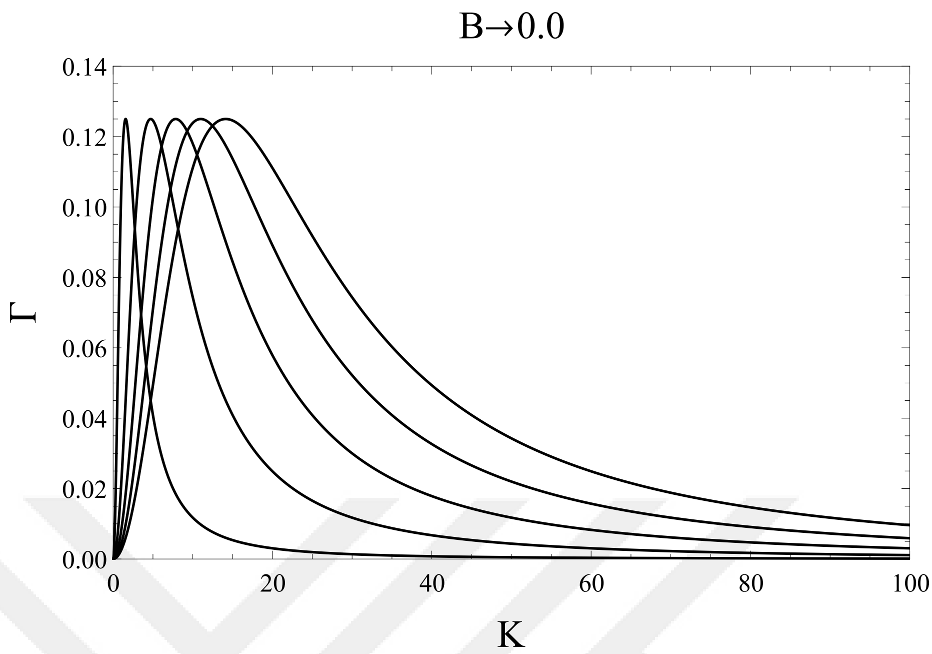
Şekil B.10 : Dispersiyon bağıntısı (3.47)'nin ilk altı dalı ve $B = 10$ için V_G'nin K'ya göre değişimi.



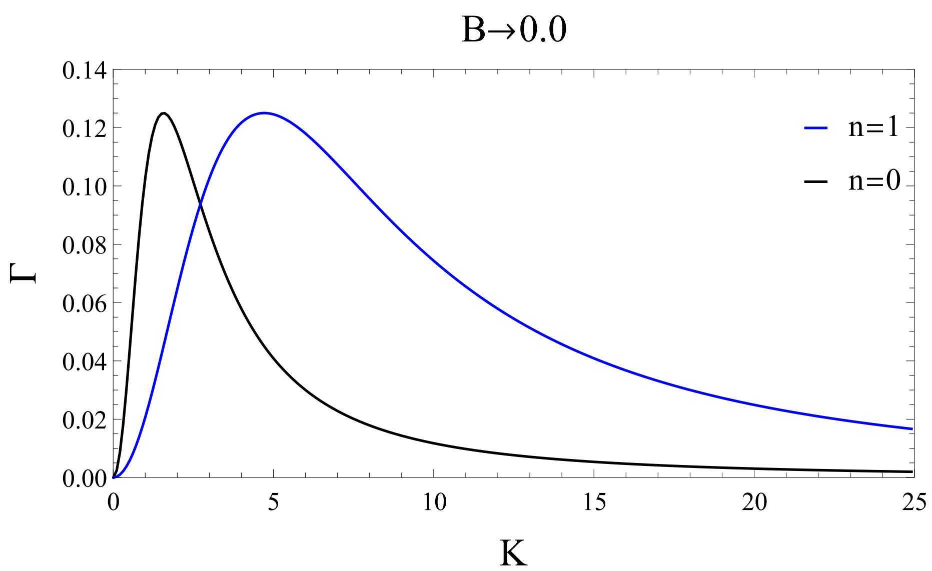
Şekil B.11 : Dispersiyon bağıntısı (3.47)'nin ilk altı dalı ve $B = 20$ için C'nin K'ya göre değişimi.



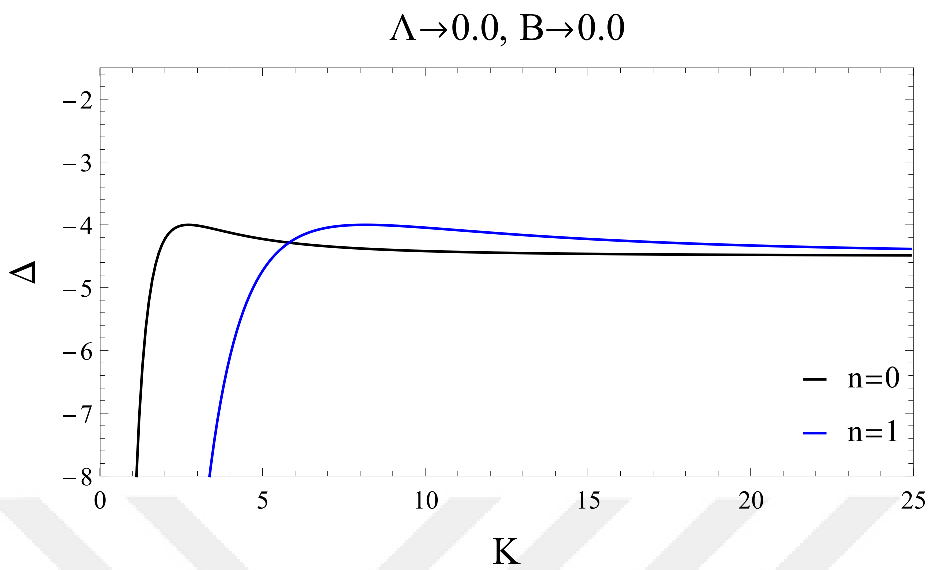
Şekil B.12 : Dispersiyon bağıntısı (3.47)'nin ilk altı dalı ve $B = 20$ için V_G'nin K'ya göre değişimi.



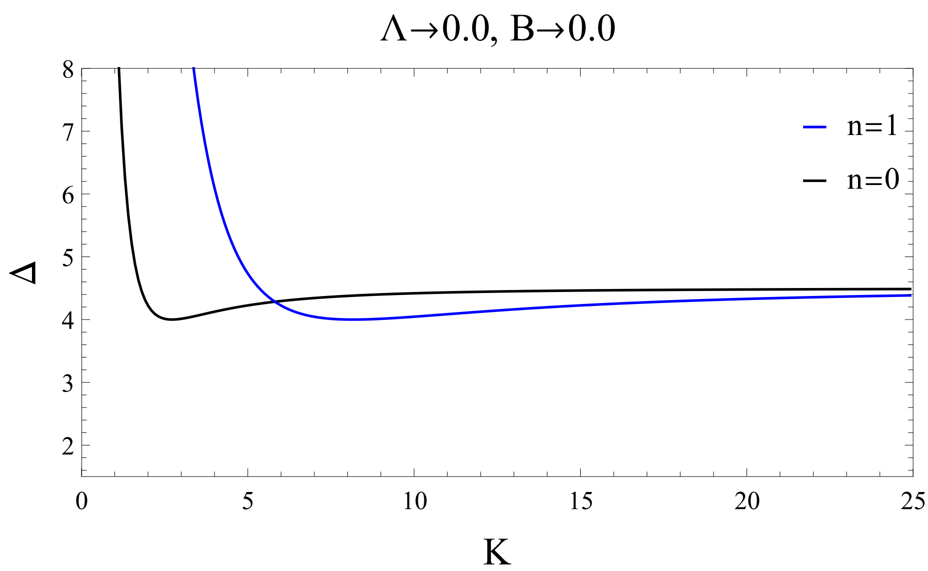
Şekil B.13 : Dispersiyon bağıntısı (2.40)'ın ilk beş dalı veya (3.47)'nin ilk beş dalı ve $B \to 0.0$ için Γ'nin K'ya göre değişimi.



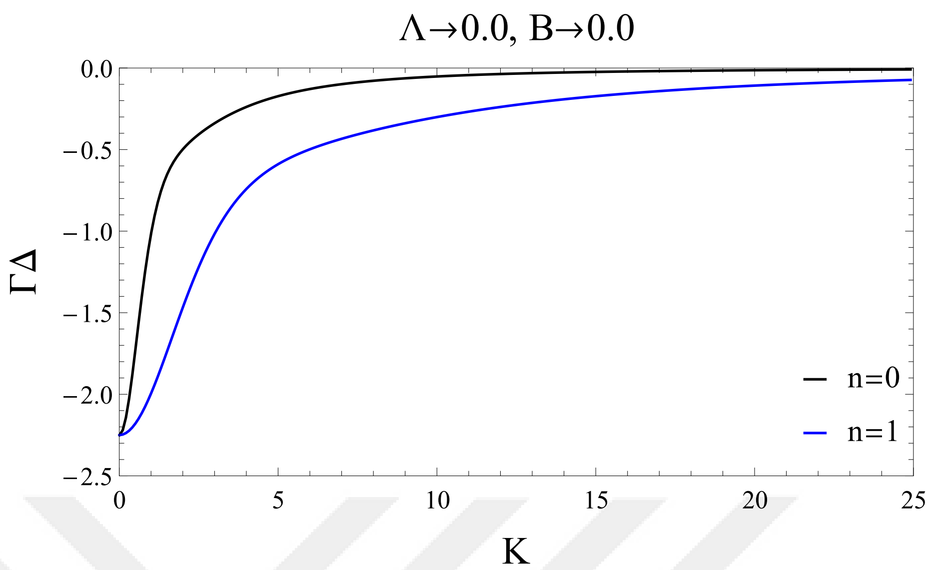
Şekil B.14 : Dispersiyon bağıntısı (2.40)'ın ilk iki dalı veya (3.47)'nin ilk iki dalı ve $B \to 0.0$ için Γ'nin K'ya göre değişimi.



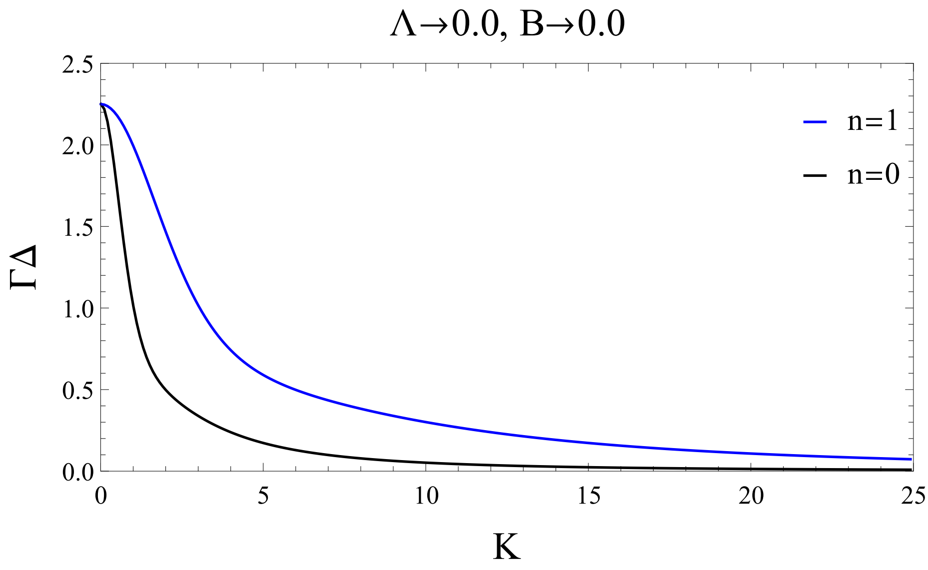
Şekil B.15 : Dispersiyon bağıntısı (2.40)'ın ilk iki dalı, sertleşen malzeme modeli veya (3.47)'nin ilk iki dalı, $\Lambda \to 0.0$, $B \to 0.0$ ve sertleşen malzeme modeli için Δ'nin K'ya göre değişimi.



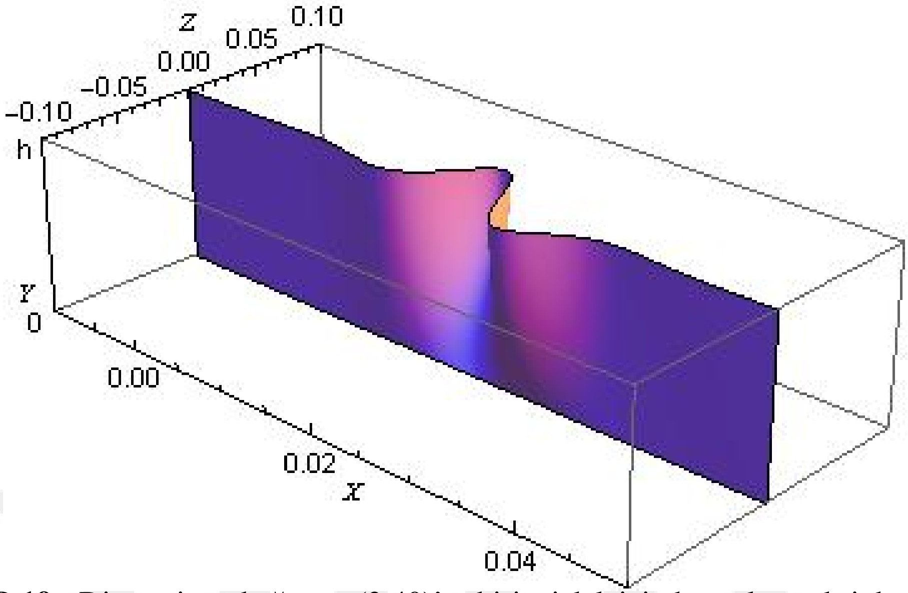
Şekil B.16 : Dispersiyon bağıntısı (2.40)'ın ilk iki dalı, yumuşayan malzeme modeli veya (3.47)'nin ilk iki dalı, $\Lambda \to 0.0$, $B \to 0.0$ ve yumuşayan malzeme modeli için Δ'nin K'ya göre değişimi.



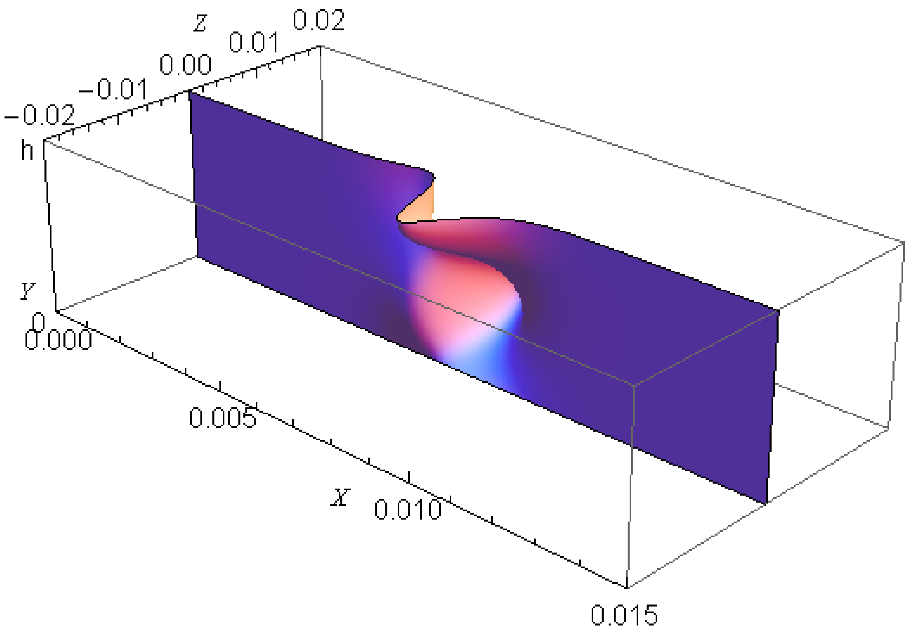
Şekil B.17 : Dispersiyon bağıntısı (2.40)'ın ilk iki dalı, sertleşen malzeme modeli veya (3.47)'nin ilk iki dalı, $\Lambda \to 0.0$, $B \to 0.0$ ve sertleşen malzeme modeli için $\Gamma\Delta$'nin K'ya göre değişimi.



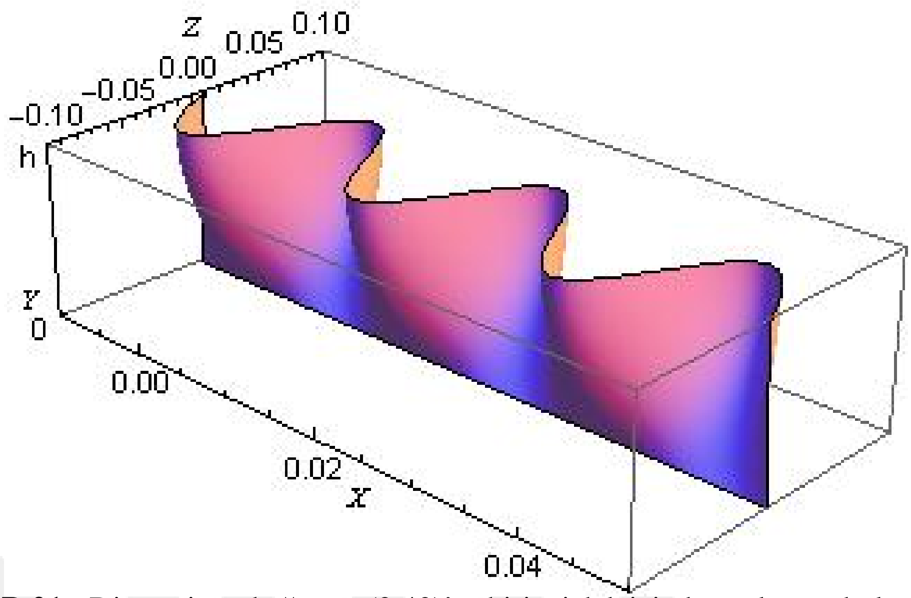
Şekil B.18 : Dispersiyon bağıntısı (2.40)'ın ilk iki dalı, yumuşayan malzeme modeli veya (3.47)'nin ilk iki dalı, $\Lambda \to 0.0$, $B \to 0.0$ ve yumuşayan malzeme modeli için $\Gamma\Delta$'nin K'ya göre değişimi.



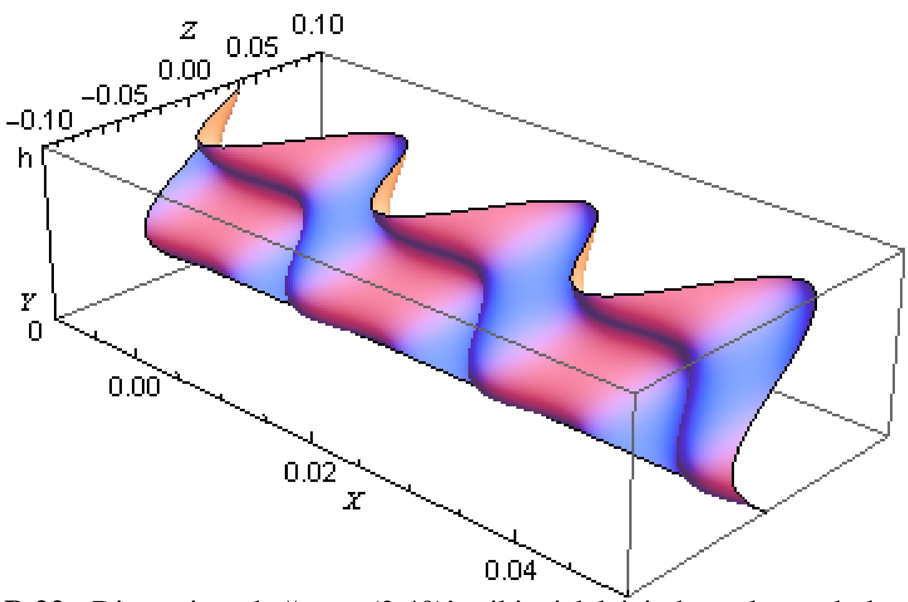
Şekil B.19 : Dispersiyon bağıntısı (2.40)'ın birinci dalı için hesaplanan bright soliton çözümün, tabakadaki $Z = 0$ düzlemine karşı gelen deformasyon alanı.



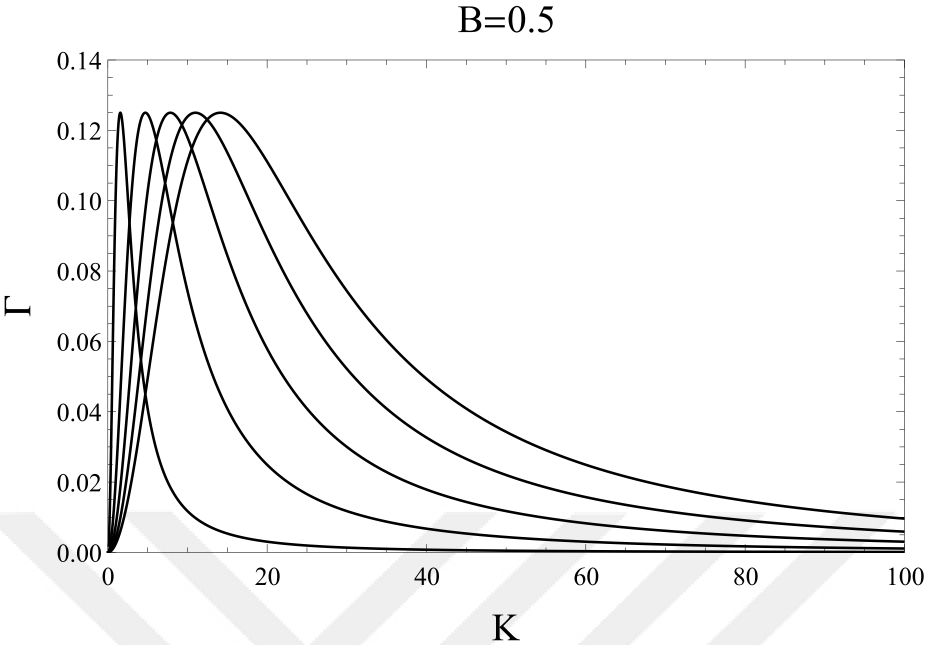
Şekil B.20 : Dispersiyon bağıntısı (2.40)'ın ikinci dalı için hesaplanan bright soliton çözümün, tabakadaki $Z = 0$ düzlemine karşı gelen deformasyon alanı.



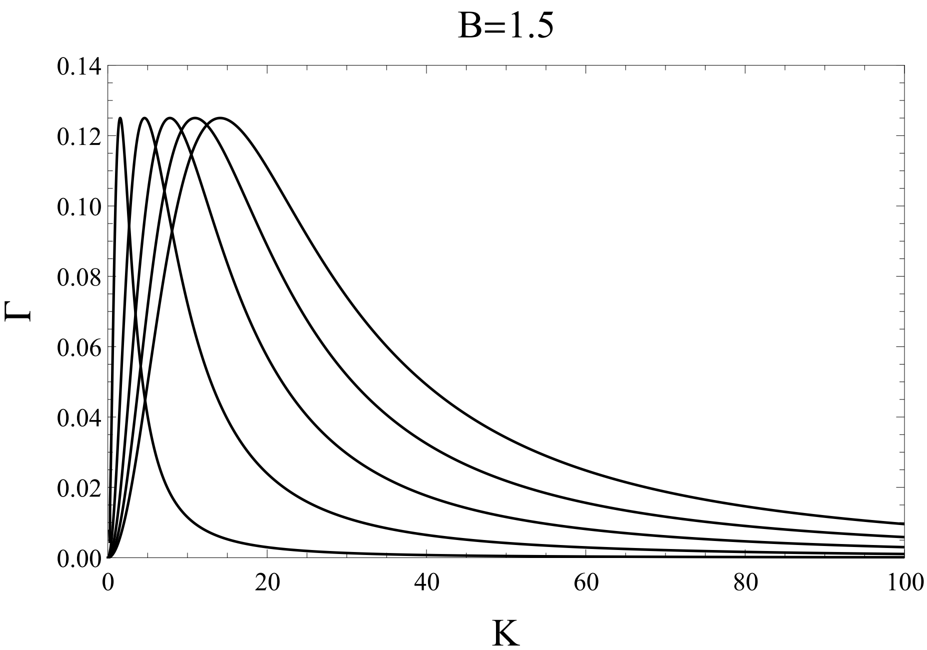
Şekil B.21 : Dispersiyon bağıntısı (2.40)'ın birinci dalı için hesaplanan dark soliton çözümün, tabakadaki $Z = 0$ düzlemine karşı gelen deformasyon alanı.



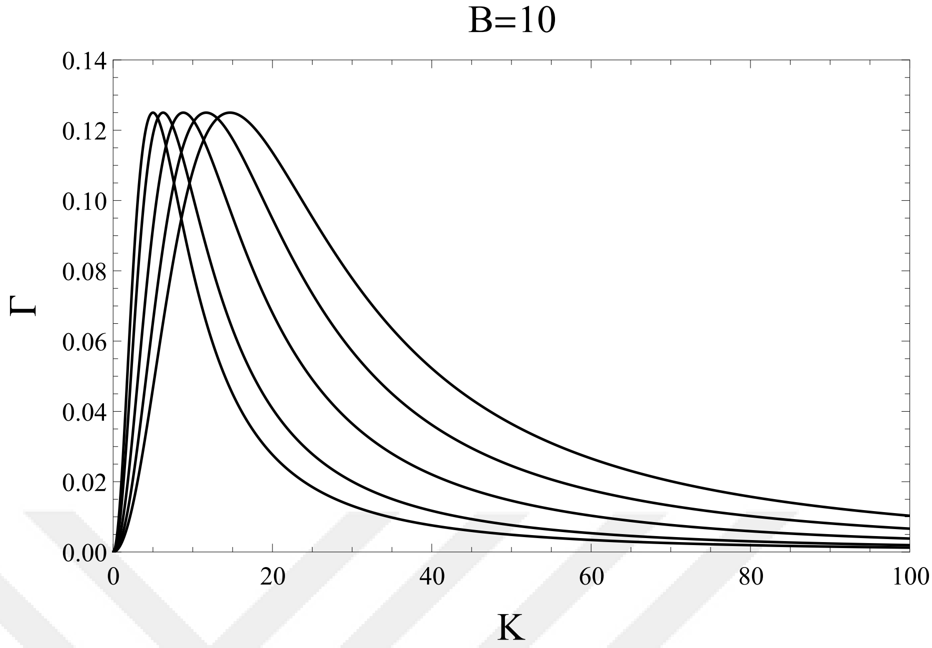
Şekil B.22 : Dispersiyon bağıntısı (2.40)'ın ikinci dalı için hesaplanan dark soliton çözümün, tabakadaki $Z = 0$ düzlemine karşı gelen deformasyon alanı.



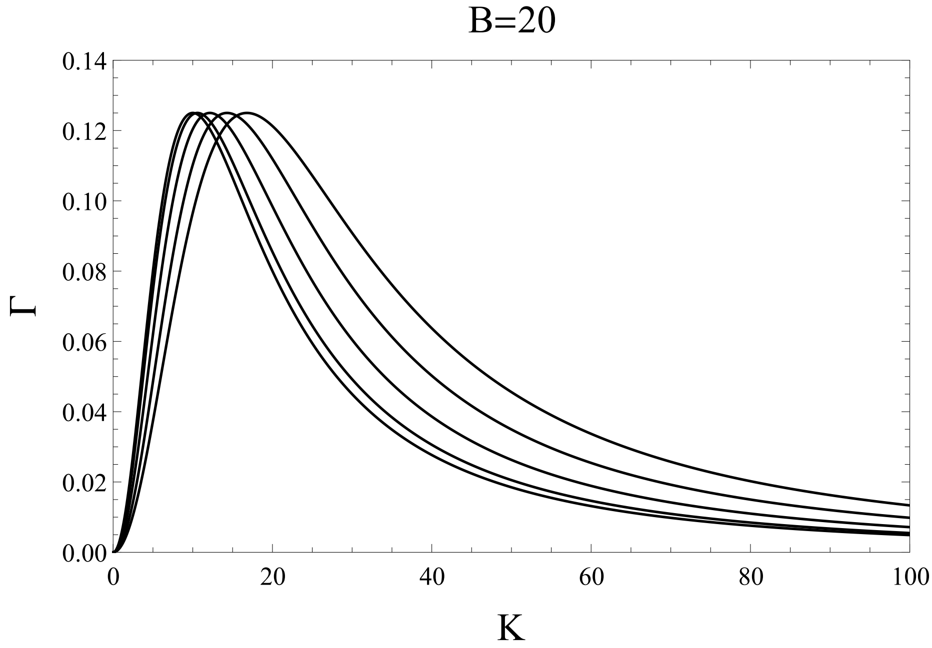
Şekil B.23 : Dispersiyon bağıntısı (3.47)'nin ilk beş dalı ve $B = 0.5$ için Γ'nın K'ya göre değişimi.



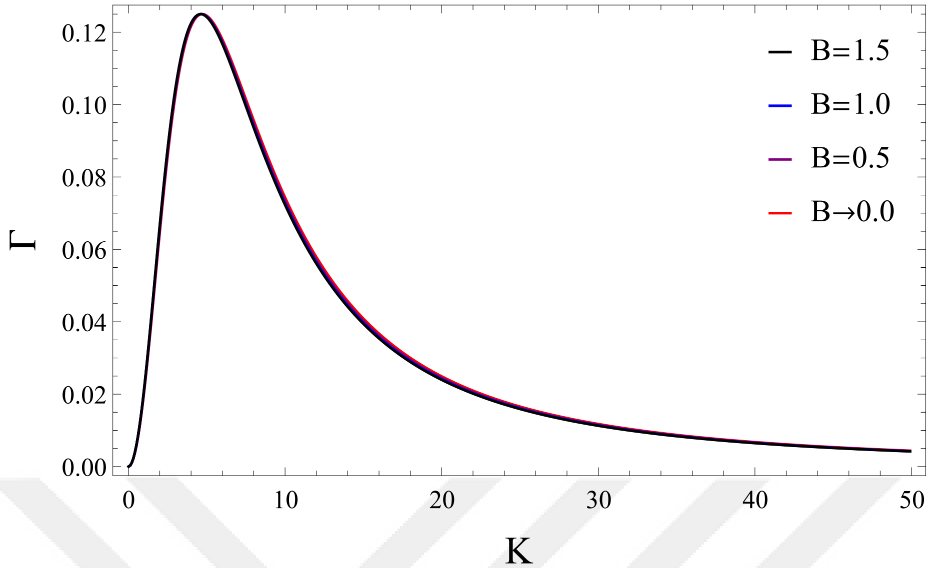
Şekil B.24 : Dispersiyon bağıntısı (3.47)'nin ilk beş dalı ve $B = 1.5$ için Γ'nın K'ya göre değişimi.



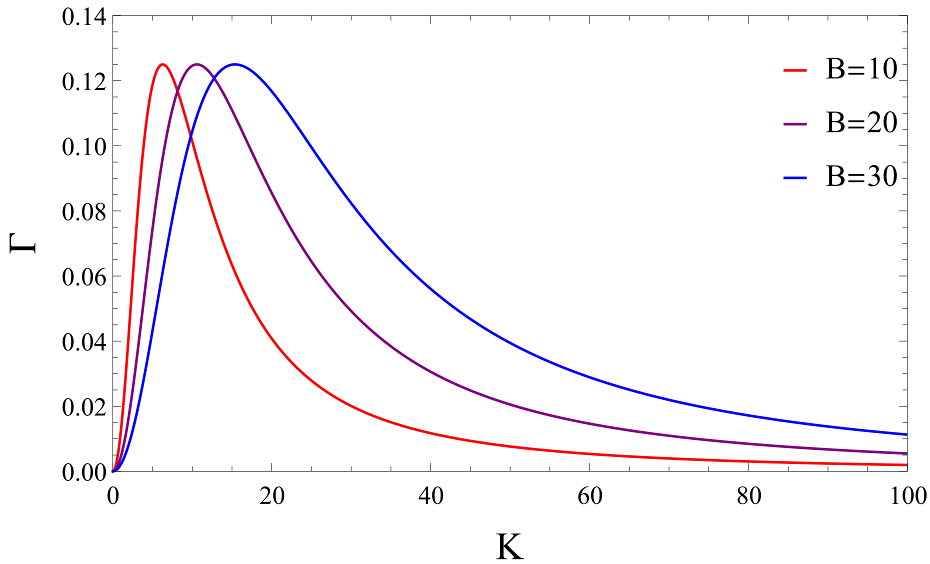
Şekil B.25 : Dispersiyon bağıntısı (3.47)'nin ilk beş dalı ve $B = 10$ için Γ'nın K'ya göre değişimi.



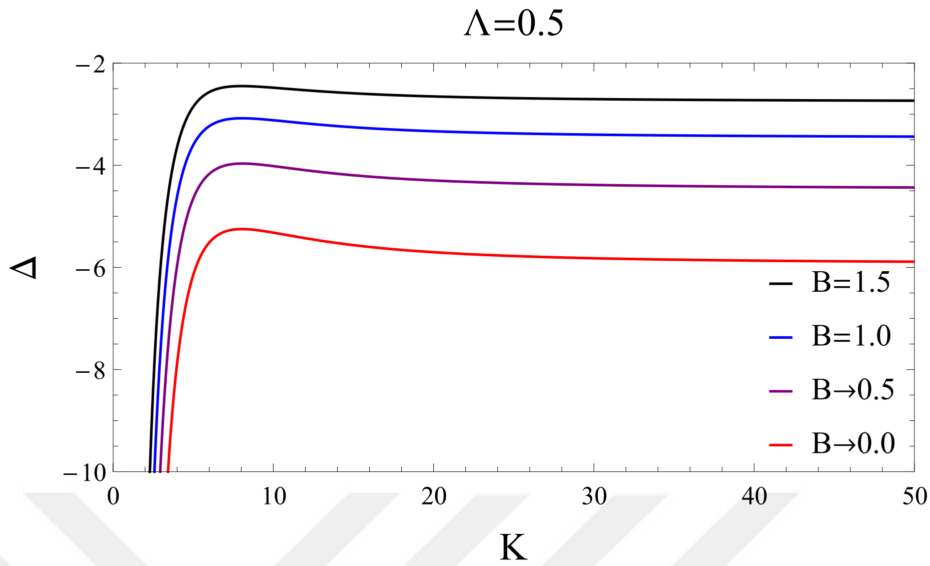
Şekil B.26 : Dispersiyon bağıntısı (3.47)'nin ilk beş dalı ve $B = 20$ için Γ'nın K'ya göre değişimi.



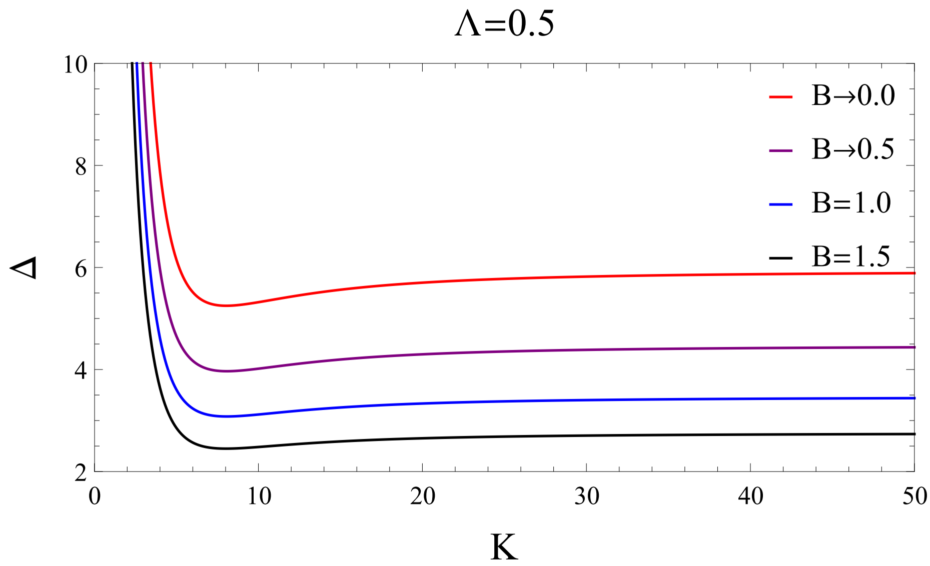
Şekil B.27 : Dispersiyon bağıntısı (3.47)'nin ikinci dalı ve $B \to 0.0, B = 0.5,\ 1.0, 1.5$ için, Γ'nın K'ya göre değişimi.



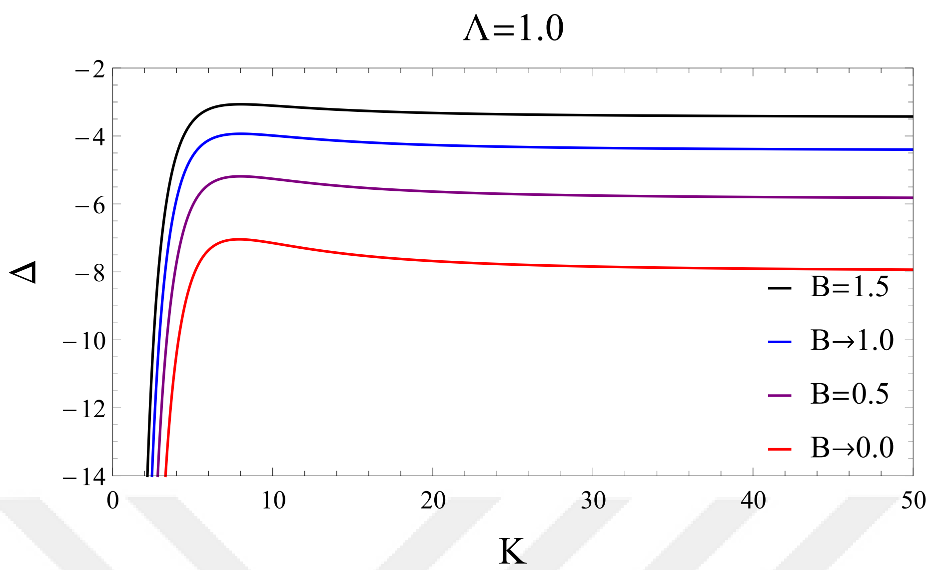
Şekil B.28 : Dispersiyon bağıntısı (3.47)'nin ikinci dalı ve $B = 10, 20, 30$ için, Γ'nın K'ya göre değişimi.



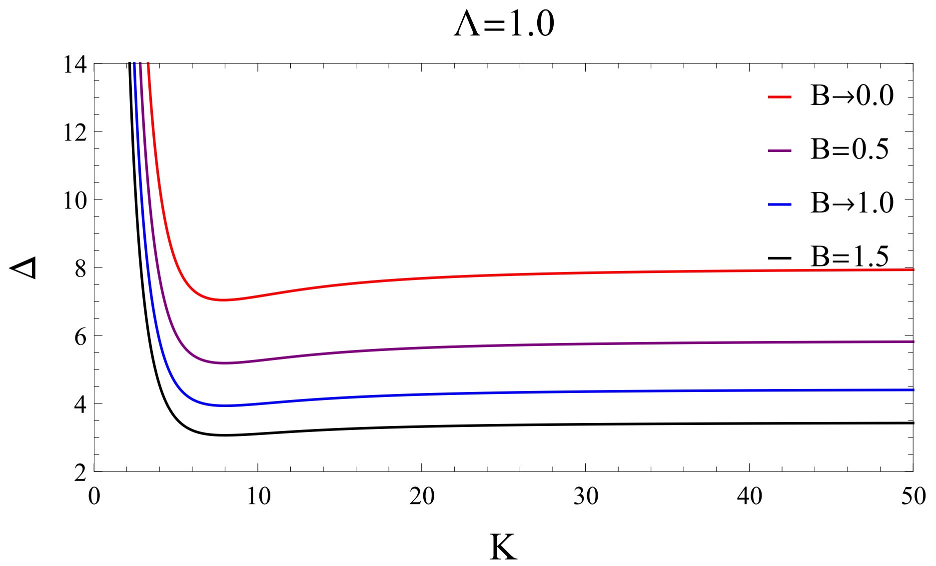
Şekil B.29 : Dispersiyon bağıntısı (3.47)'nin ikinci dalı, $B \to 0.0, B \to 0.5$, $B = 1.0, 1.5$; $\Lambda = 0.5$ ve sertleşen malzeme modeli için, Δ'nın K'ya göre değişimi.



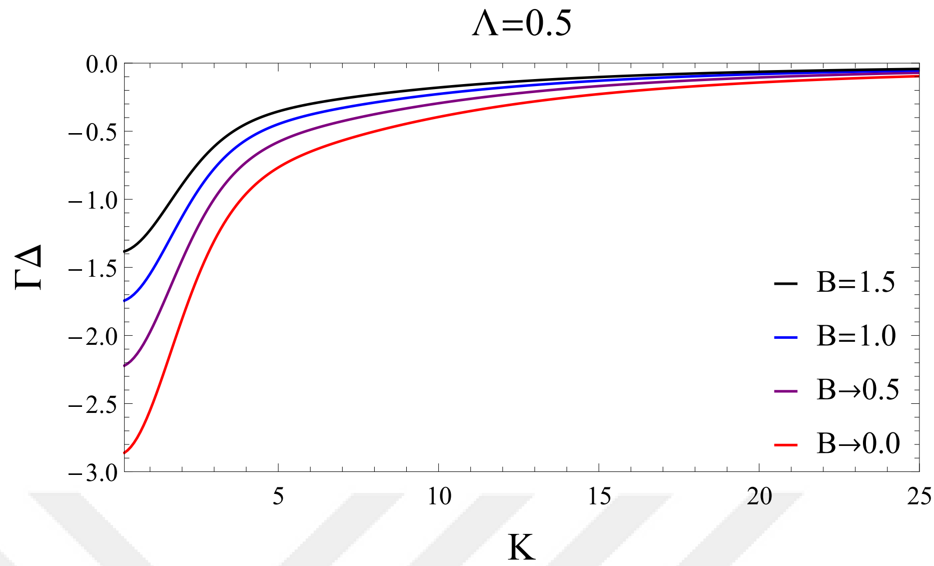
Şekil B.30 : Dispersiyon bağıntısı (3.47)'nin ikinci dalı, $B \to 0.0, B \to 0.5$, $B = 1.0, 1.5$; $\Lambda = 0.5$ ve yumuşayan malzeme modeli için, Δ'nın K'ya göre değişimi.



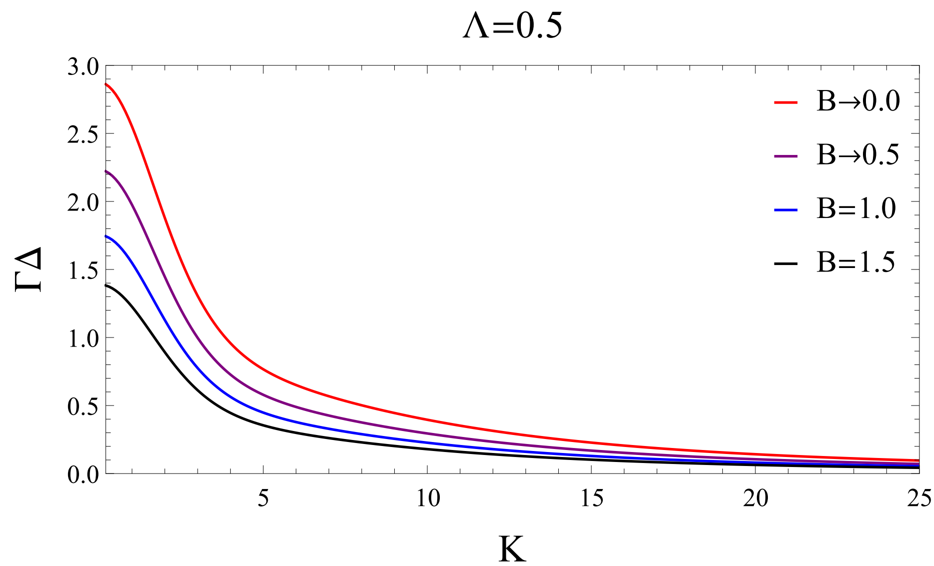
Şekil B.31 : Dispersiyon bağıntısı (3.47)'nin ikinci dalı, $B \to 0.0, B \to 1.0$, $B = 0.5, 1.5;\ \Lambda = 1.0$ ve sertleşen malzeme modeli için, Δ'nın K'ya göre değişimi.



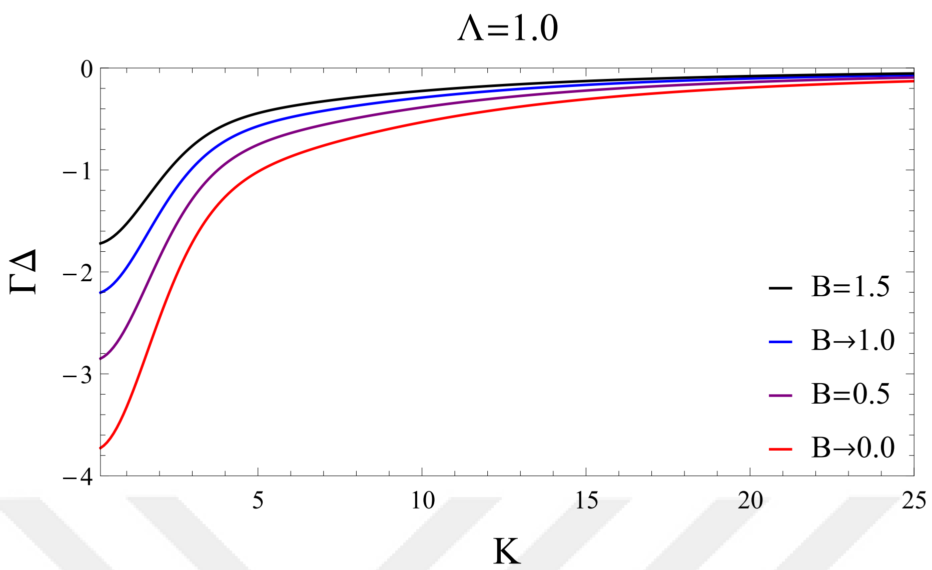
Şekil B.32 : Dispersiyon bağıntısı (3.47)'nin ikinci dalı, $B \to 0.0, B \to 1.0$, $B = 0.5, 1.5;\ \Lambda = 1.0$ ve yumuşayan malzeme modeli için, Δ'nın K'ya göre değişimi.



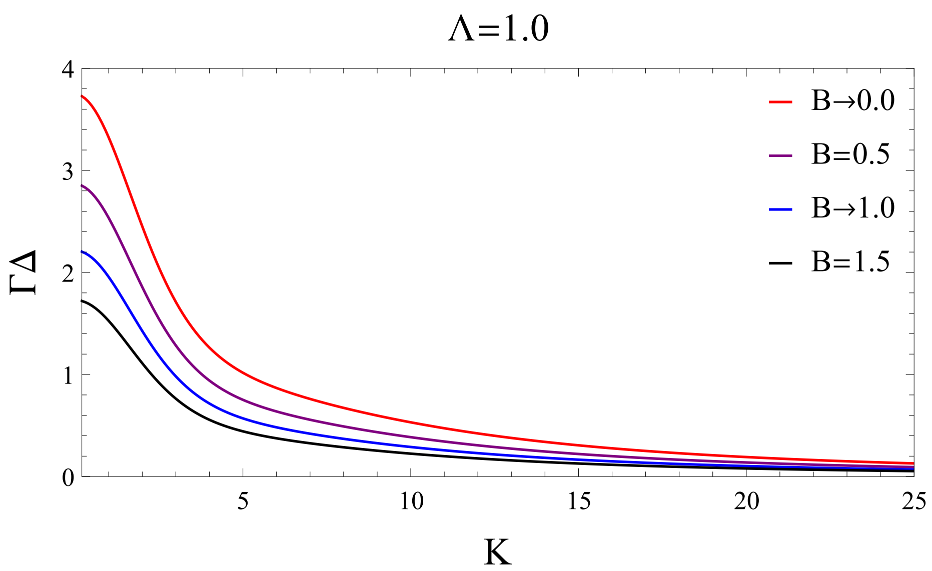
Şekil B.33 : Dispersiyon bağıntısı (3.47)'nin ikinci dalı, $B \to 0.0, B \to 0.5$, $B = 1.0, 1.5$; $\Lambda = 0.5$ ve sertleşen malzeme modeli için, $\Gamma\Delta$'nın K'ya göre değişimi.



Şekil B.34 : Dispersiyon bağıntısı (3.47)'nin ikinci dalı, $B \to 0.0, B \to 0.5$, $B = 1.0, 1.5$; $\Lambda = 0.5$ ve yumuşayan malzeme modeli için, $\Gamma\Delta$'nın K'ya göre değişimi.



Şekil B.35 : Dispersiyon bağıntısı (3.47)'nin ikinci dalı, $B \to 0.0, B \to 1.0$, $B = 0.5, 1.5$; $\Lambda = 1.0$ ve sertleşen malzeme modeli için, $\Gamma\Delta$'nın K'ya göre değişimi.



Şekil B.36 : Dispersiyon bağıntısı (3.47)'nin ikinci dalı, $B \to 0.0, B \to 1.0$, $B = 0.5, 1.5$; $\Lambda = 1.0$ ve yumuşayan malzeme modeli için, $\Gamma\Delta$'nın K'ya göre değişimi.

ÖZGEÇMİŞ

PHOTO

Ad-Soyad : Dilek Demirkuş

Doğum Tarihi ve Yeri : 22.03.1982 / Ardahan

E-Posta : demirkusdilek@itu.edu.tr

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2003, İ.Ü., Fen, Matematik.
- **Tezli Yüksek Lisans** : 2010, İ.Ü., Matematik, Matematik.
- **Tezsiz Yüksek Lisans** : 2011, İ.Ü., Matematik Öğrt., Matematik Öğrt.

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:

- 2010 yılında TEV Yüksek Lisans Onur Ödülü'nü kazandı.
- 2010-2012 yılları arasında İstanbul Aydın Üniversitesi'nde öğretim görevlisi olarak çalıştı.
- 2012-2013 yılları arasında Bahçeşehir Üniversitesi'nde araştırma görevlisi olarak çalıştı.
- 2013-2016 yılları arasında İstanbul Teknik Üniversitesi'nde araştırma görevlisi olarak çalıştı.

TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR/SUNUMLAR

- **Demirkus D.**, Teymur M., 2016. Shear Horizontal Waves in a Nonlinear Elastic Layer Overlying a Rigid Substratum, *Hacettepe University Journal of Mathematics and Statistics* (kabul edildi).
- **Demirkuş D.**, Teymur M., Shear Horizontal Waves in an Exponentially Graded Heterogeneous Elastic Layer, *International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling*, June 8-12, 2015 Istanbul, Turkey.

- **Demirkuş D.**, SH Waves in a Nonlinear Elastic Layer over a Rigid Substratum, *9th European Solid Mechanics Conference*, July 6-10, 2015 Madrid, Spain.

DİĞER YAYINLAR SUNUMLAR VE PATENTLER:

- **Demirkuş D.**, Teymur M., Shear Horizontal Waves in a Heterogenous Elastic Layer, *3rd International Conference on Applied Mathematics and Approximation Theory*, May 28-30, 2015 Ankara, Turkey.