

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

**HETEROJEN ELASTİK TABAKALI ORTAMDA
NONLİNEER YATAY KAYMA DALGALARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Dicle TUNA

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Programı

TEMMUZ 2021

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

**HETEROJEN ELASTİK TABAKALI ORTAMDA
NONLİNEER YATAY KAYMA DALGALARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Dicle TUNA
(509171205)**

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Programı

**Tez Danışmanı: Doç. Dr. Semra AHMETOLAN
Eş Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Ekin ÖZDEMİR**

TEMMUZ 2021

İTÜ, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü'nün 509171205 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi Dicle TUNA, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı "HETEROJEN ELASTİK TABAKALI ORTAMDA NONLİNEER YATAY KAYMA DALGALARI " başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Semra AHMETOLAN
İstanbul Teknik Üniversitesi

Eş Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Ekin ÖZDEMİR
Piri Reis Üniversitesi

Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Fethi KADIOĞLU
İstanbul Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Ahmet KIRIŞ
İstanbul Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Reşat KÖŞKER
Yıldız Teknik Üniversitesi

Teslim Tarihi : 11 Haziran 2021
Savunma Tarihi : 09 Temmuz 2021

ÖNSÖZ

Tanıştığımız günden bu yana ve bu tez çalışmasının her aşamasında bana inanıp değerli ve engin bilgilerini, tecrübelerini benden esirgemeyen, danıştığım her konuda bana kıymetli zamanını ayırıp sabır, anlayış, büyük bir ilgi ve samimiyetle, faydalı olabilmek için elinden geleni ve fazlasını bana sunan, meslek hayatımda da benimle paylaştığı değerli bilgilerinden azamî ölçüde yararlandığım, saygıdeğer hocam ve çok kıymetli danışmanım Doç. Dr. Semra AHMETOLAN'a teşekkürü bir borç biliyorum; şükranlarımı sunuyorum.

Yine çalışmalarımın kaynağı, yöntem açısından değerli ve yapıcı bilgilerini benimle paylaşarak yoluma ışık tutan eş danışman hocam sayın Dr. Öğr. Üyesi Ekin ÖZDEMİR'e teşekkür ederim.

Ve bugüne dek üzerimde sayısız emeği olan tüm hocalarıma teşekkürü bir borç bilirim.

Manevi desteklerini hep hissettiğim arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Son olarak bugünlere gelmem için büyük emek harcayan, benden maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen sevgili aileme sonsuz teşekkürler.

Temmuz 2021

Dicle TUNA



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖNSÖZ	v
İÇİNDEKİLER	vii
KISALTMALAR	ix
SEMBOLLER	xi
ÇİZELGE LİSTESİ	xiii
ŞEKİL LİSTESİ	xv
ÖZET	xvii
SUMMARY	xix
1. GİRİŞ	1
2. İKİ TABAKALI HİPERELASTİK BİR ORTAMDA SH DALGALARI	5
2.1 Giriş	5
2.2 Problemin Tanımı ve Temel Denklemler.....	5
2.3 İki Tabakalı Elastik Ortamda Lineer SH Dalgalarının Yayılması	7
2.3.1 İki Tabakalı Homojen Elastik Ortamda Lineer SH Dalgalarının Yayılması ve Dispersiyon Bağıntısı.....	7
2.3.1.1 Dispersiyon Bağıntısı.....	9
2.3.2 İki Tabakalı Heterojen Ortamda Lineer SH Dalgalarının Yayılması ve Dispersiyon Bağıntısı.....	10
2.3.2.1 Dispersiyon Bağıntısı.....	14
2.3.3 Dispersiyon Bağıntılarının Grafikleri	14
3. İKİ TABAKALI HİPERELASTİK HETEROJEN ORTAMDA NONLİ- NEER YATAY KAYMA (SH) DALGALARININ MODÜLASYONU	17
3.1 Giriş	17
3.2 Nonlineer Yatay Kayma (SH) Dalgalarının Modülasyonu.....	17
3.2.1 Sayısal Değerlendirme ve Solitary Dalgaların Varlığı	31
4. SONUÇ VE ÖNERİLER	43
KAYNAKLAR	45
EKLER	49
EK A: Heterojen Hiperelastik ortamlarda Genelleştirilmiş Kayma Hareketi	51
EK B:	57
ÖZGEÇMİŞ	65



KISALTMALAR

SH : Shear Horizontal (Enine Kayma)
NLS : Nonlinear Schrödinger





SEMBOLLER

ω	: Açısal frekans
k	: Dalga sayısı
c	: Faz hızı
V_g	: Grup Hızı
μ_i	: Lame Sabiti
n_i	: Nonlinear Malzeme Parametreleri
u, v	: Yer değiştirme vektörü bileşenleri
ρ_i	: Yoğunluk
h_i	: Tabakaların Kalınlığı
γ_i	: Lineer Malzeme Parametresi
Üst İndisler	
T	: Transpozu



ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 3.1: $(B_1, B_2) = (0.5, 1.5)$, $(\Lambda_1, \Lambda_2) = (0.3, 0.3)$, $(\theta_{01}, \theta_{02}) = (2, 2)$ için K, C, Γ, Δ ve $\Gamma\Delta$ 'nın seçilen bazı sayısal değerleri	33
Çizelge 3.2: $(B_1, B_2) = (1.5, 0.5)$, $(\Lambda_1, \Lambda_2) = (0.3, 0.3)$, $(\theta_{01}, \theta_{02}) = (2, 2)$ için K, C, Γ, Δ ve $\Gamma\Delta$ 'nın seçilen bazı sayısal değerleri	34
Çizelge 3.3: $(B_1, B_2) = (1.5, 1.5)$, $(\Lambda_1, \Lambda_2) = (0.3, 0.3)$, $(\theta_{01}, \theta_{02}) = (2, 2)$ için K, C, Γ, Δ ve $\Gamma\Delta$ 'nın seçilen bazı sayısal değerleri	34
Çizelge 3.4: $(B_1, B_2) = (0.5, 0.5)$, $(\Lambda_1, \Lambda_2) = (0.3, 0.3)$, $(\theta_{01}, \theta_{02}) = (2, 2)$ için K, C, Γ, Δ ve $\Gamma\Delta$ 'nın seçilen bazı sayısal değerleri	34
Çizelge 3.5: $(B_1, B_2) = (0.5, 1.5)$, $(\Lambda_1, \Lambda_2) = (0.3, 0.3)$, $(\theta_{01}, \theta_{02}) = (2, -2)$ için K, C, Γ, Δ ve $\Gamma\Delta$ 'nın seçilen bazı sayısal değerleri	35
Çizelge 3.6: $(B_1, B_2) = (1.5, 0.5)$, $(\Lambda_1, \Lambda_2) = (0.3, 0.3)$, $(\theta_{01}, \theta_{02}) = (2, -2)$ için K, C, Γ, Δ ve $\Gamma\Delta$ 'nın seçilen bazı sayısal değerleri	35
Çizelge 3.7: $(B_1, B_2) = (1.5, 1.5)$, $(\Lambda_1, \Lambda_2) = (0.3, 0.3)$, $(\theta_{01}, \theta_{02}) = (2, -2)$ için K, C, Γ, Δ ve $\Gamma\Delta$ 'nın seçilen bazı sayısal değerleri	37
Çizelge 3.8: $(B_1, B_2) = (0.5, 0.5)$, $(\Lambda_1, \Lambda_2) = (0.3, 0.3)$, $(\theta_{01}, \theta_{02}) = (2, -2)$ için K, C, Γ, Δ ve $\Gamma\Delta$ 'nın seçilen bazı sayısal değerleri	37
Çizelge 3.9: $(\theta_{01}, \theta_{02}) = (2, 2)$, $(B_1, B_2) = (1.5, 1.5)$ ve $(\Lambda_1, \Lambda_2) = (0.3, 0.3)$ için K, C, Γ, Δ ve $\Gamma\Delta$ 'nın seçilen bazı sayısal değerleri	40
Çizelge 3.10 $(\theta_{01}, \theta_{02}) = (2, 2)$, $(B_1, B_2) = (1.5, 1.5)$ ve $(\Lambda_1, \Lambda_2) = (0.3, 0.9)$ için K, C, Γ, Δ ve $\Gamma\Delta$ 'nın seçilen bazı sayısal değerleri	40
Çizelge 3.11 $(\theta_{01}, \theta_{02}) = (2, 2)$, $(B_1, B_2) = (1.5, 1.5)$ ve $(\Lambda_1, \Lambda_2) = (0.9, 0.9)$ için K, C, Γ, Δ ve $\Gamma\Delta$ 'nın seçilen bazı sayısal değerleri	40
Çizelge 3.12 $(\theta_{01}, \theta_{02}) = (2, 2)$, $(B_1, B_2) = (1.5, 1.5)$ ve $(\Lambda_1, \Lambda_2) = (0.9, 0.3)$ için K, C, Γ, Δ ve $\Gamma\Delta$ 'nın seçilen bazı sayısal değerleri	41



ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 2.1 : Elastik ortamın geometrisi.....	5
Şekil 2.2 : Dört farklı durumda (a) $H = 1$ için (b) $H = 5$ için, boyutsuz faz hızı C 'nin boyutsuz dalga sayısı K 'ya göre değişimi	15
Şekil 2.3 : İki tabakalı ortamda (a) $H = 1$ için (b) $H = 5$ için, çeşitli lineer heterojenlik parametreleri için boyutsuz faz hızı C 'nin boyutsuz dalga sayısı K 'ya göre değişimi.....	16
Şekil 3.1 : Heterojen iki tabakaya ait farklı lineer heterojenlik parametreleri için Γ 'nın K 'ya göre değişimi ($H = 1$).....	32
Şekil 3.2 : $\theta_{0_1} = \theta_{0_2} = 2$ ve $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 0.3$ için kaymada sertleşen, heterojen iki tabakaya ait farklı lineer heterojenlik parametreleri için Δ 'nın K 'ya göre değişimi ($H = 1$).....	32
Şekil 3.3 : $\theta_{0_1} = \theta_{0_2} = 2$ ve $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 0.3$ için kaymada sertleşen, heterojen iki tabakaya ait farklı lineer heterojenlik parametreleri için $\Gamma\Delta$ 'nın K 'ya göre değişimi ($H = 1$).....	33
Şekil 3.4 : $\theta_{0_1} = 2, \theta_{0_2} = -2$ ve $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 0.3$ için kaymada sertleşen üst tabaka ve yumuşayan alt tabakaya ait farklı lineer heterojenlik parametreleri için Δ 'nın K 'ya göre değişimi ($H = 1$).....	36
Şekil 3.5 : $\theta_{0_1} = 2, \theta_{0_2} = -2$ ve $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 0.3$ için kaymada sertleşen üst tabaka ve yumuşayan alt tabakaya ait farklı lineer heterojenlik parametreleri için $\Gamma\Delta$ 'nın K 'ya göre değişimi ($H = 1$)	36
Şekil 3.6 : $\theta_{0_1} = \theta_{0_2} = 2$ ve $B_1 = B_2 = 1.5$ için kaymada sertleşen, heterojen iki tabakaya ait farklı nonlinear heterojenlik parametreleri için Δ 'nın K 'ya göre değişimi ($H = 1$).....	38
Şekil 3.7 : $\theta_{0_1} = \theta_{0_2} = 2$ ve $B_1 = B_2 = 1.5$ için kaymada sertleşen, heterojen iki tabakaya ait farklı nonlinear heterojenlik parametreleri için $\Gamma\Delta$ 'nın K 'ya göre değişimi ($H = 1$).....	38
Şekil 3.8 : $\theta_{0_1} = 2, \theta_{0_2} = -2$ ve $B_1 = B_2 = 1.5$ için kaymada sertleşen üst tabaka ve yumuşayan alt tabakaya ait farklı nonlinear heterojenlik parametreleri için Δ 'nın K 'ya göre değişimi ($H = 1$).....	39
Şekil 3.9 : $\theta_{0_1} = 2, \theta_{0_2} = -2$ ve $B_1 = B_2 = 1.5$ için kaymada sertleşen üst tabaka ve yumuşayan alt tabakaya ait farklı nonlinear heterojenlik parametreleri için $\Gamma\Delta$ 'nın K 'ya göre değişimi ($H = 1$)	39



HETEROJEN ELASTİK TABAKALI ORTAMDA NONLİNEER YATAY KAYMA DALGALARI

ÖZET

Bu çalışmada, düzgün kalınlıklı, izotrop, homojen olmayan (heterojen) ve farklı hiperelastik malzeme özelliklerine sahip iki tabakadan oluşan bir ortamda sonlu genlikli lineer olmayan yatay kayma (SH) dalgalarının yayılmasını modelleyen bir sınır değer problemi incelenmiştir. Problemin asimptotik çözümü çoklu ölçekler yöntemi kullanılarak inşa edilmiştir.

İncelemede ortamı oluşturan tabakaların heterojen malzemelerden oluştuğu ve malzeme özelliklerinin derinlik doğrultusunda değişime sahip olduğu, yani tabakaların malzeme özelliklerinin dikey doğrultuda değiştiği kabul edilmiştir. Ayrıca serbest yüzeylerde gerilmelerin olmadığı, tabakalar arası arayüzeyde ise yer değiştirmelerin ve gerilmelerin sürekli olduğu kabul edilmiştir.

Çalışma üç bölümden oluşmaktadır:

Giriş bölümünde, değişik ortamlarda elastik dalgaların yayılımının incelendiği çalışmalar hakkında kısaca bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde, ilk olarak düzgün kalınlıklı iki tabakadan oluşan ortamda lineer olmayan SH dalgalarının yayılmasını betimleyen hareket denklemleri ve sınır koşulları verilmektedir. Daha sonra sırasıyla bu problem için homojen ortam ve heterojen ortamda lineer SH dalgaları incelenmiş, dispersiyon bağıntısı ve grafikleri verilmiştir. Bilindiği gibi böyle bir geometriye sahip homojen ortamda c_1 üst tabakada, c_2 ise alt tabakada yayılan lineer kayma dalgalarının yayılma hızlarını, c ise SH dalgalarının faz hızını göstermek üzere $c_1 < c_2$ kabulü yapılmıştır. Bu kabul altında bu tip dalgaların yayılabilmesi için $c_1 < c_2 < c$ ya da $c_2 < c_1 < c$ eşitsizliklerinden birinin gerçekleşmesi gerekmektedir. Aynı geometriye sahip heterojen ortamda dalgaların yayılabilmesi için de benzer eşitsizlikler mevcuttur. Tabakaları oluşturan lineer malzeme parametreleri için β_j heterojenliği temsil eden parametre, μ_j ortamın lineer kayma modülü ve ρ_j ortamdaki malzemelerin yoğunluğu olmak üzere

$$\mu_j = \mu_{0j} e^{\beta_j Y}, \quad \rho_j = \rho_{0j} e^{\beta_j Y}, \quad j = 1, 2 \quad \beta_j = \text{sbt}$$

kabulü altında dalgaların faz hızının

$$c_{01} \sqrt{1 + \beta_1^2 / 4k^2} < c_{02} \sqrt{1 + \beta_2^2 / 4k^2} < c, \quad c_{0j}^2 = \mu_{0j} / \rho_{0j} \quad j = 1, 2$$

eşitsizliğini sağladığı kabul edilmektedir. Bu kabul altında lineer SH dalgalarının yayılımı problemi için inceleme yürütülmüştür.

Dalgaların faz hızının bu eşitsizliği sağlaması durumunda, nonlinear SH dalgalarının modülasyonu problemi üçüncü bölümde ele alınmıştır. Problem bir asimptotik pertürbasyon metodu olan çoklu ölçekler metodu ile incelenmiş ve nonlinear SH dalgalarının self modülasyonunun asimptotik olarak bir nonlinear Schrödinger (NLS) denklemi ile karakterize edilebileceği gösterilmiştir. Tabakaların hem lineer heterojen hem de lineer olmayan heterojen malzeme parametrelerinin değişiminin dalga yayılımı üzerindeki etkisi bazı seçilen malzeme parametreleri için grafiklerle gözlemlenmiştir.



SHEAR HORIZONTAL WAVES IN A NONLINEAR HETEROGENEOUS ELASTIC LAYERD MEDIA

SUMMARY

In this work, we consider a boundary value problem modelling the propagation of nonlinear horizontal shear (SH) waves in an elastic medium consisting of two layers of uniform thickness;

$$P_1 = \{(X, Y, Z) \mid 0 \leq Y \leq h_1, -\infty < (X, Z) < \infty\} \quad (1)$$

and

$$P_2 = \{(X, Y, Z) \mid -h_2 \leq Y \leq 0, -\infty < (X, Z) < \infty\} \quad (2)$$

where P_1 and P_2 denote the upper and lower layers with thickness h_1 and h_2 , respectively. The constituent materials of the layers are assumed to be heterogeneous, isotropic elastic. It is assumed that the layers have different heterogeneous materials and the material properties have a change in the depth direction, that is, they change in the vertical direction to the layers. It is also assumed that the free boundaries, $Y = h_1$ and $Y = -h_2$, are free of traction and stresses, and displacements are continuous at the interface $Y = 0$. Consider an SH deformation of a particle which is an anti-plane shear motion described by the equations

$$\begin{aligned} x = X, \quad y = Y, \quad z = Z + u(X, Y, t) & \quad \text{in } P_1 \\ x = X, \quad y = Y, \quad z = Z + v(X, Y, t) & \quad \text{in } P_2 \end{aligned}$$

where t is the time, and u and v are the displacement of a particle in P_1 and P_2 , respectively, in the Z -direction because of the polarization of waves.

In this work, since the propagation of finite but small amplitude waves will be examined, we obtain the following approximate equations and the boundary conditions involving terms not higher than the third degree in the deformation gradients are obtained;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_1^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \right) - \frac{1}{\rho_1} \left(\frac{d(\rho_1 c_1^2)}{dY} \frac{\partial u}{\partial Y} \right) = \quad (3)$$

$$n_1 \left(\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial u}{\partial X} Q(u) \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial u}{\partial Y} Q(u) \right) \right) + \frac{1}{\rho_1} Q(u) \left(\frac{\partial}{\partial Y} (\rho_1 n_1) \frac{\partial u}{\partial Y} \right) \quad \text{in } P_1,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_2^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial Y^2} \right) - \frac{1}{\rho_2} \left(\frac{d(\rho_2 c_2^2)}{dY} \frac{\partial v}{\partial Y} \right) = \quad (4)$$

$$n_2 \left(\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial v}{\partial X} Q(v) \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial v}{\partial Y} Q(v) \right) \right) + \frac{1}{\rho_2} Q(v) \left(\frac{\partial}{\partial Y} (\rho_2 n_2) \frac{\partial v}{\partial Y} \right) \quad \text{in } P_2.$$

$$\frac{\partial u}{\partial Y} + \theta_1 Q(u) \frac{\partial u}{\partial Y} = 0 \quad \text{on } Y = h_1, \quad (5)$$

$$u - v = 0 \quad \text{on } Y = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial Y} - \gamma \frac{\partial v}{\partial Y} = \theta_2 \gamma Q(v) \frac{\partial v}{\partial Y} - \theta_1 Q(u) \frac{\partial u}{\partial Y} \quad \text{on } Y = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial v}{\partial Y} + \theta_2 Q(v) \frac{\partial v}{\partial Y} = 0 \quad \text{on } Y = -h_2. \quad (8)$$

The nonlinear operator Q is defined as

$$Q(\psi) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial Y} \right)^2. \quad (9)$$

Here c_j is the propagation velocity of linear shear waves in P_j ; μ_j is the linear shear modulus in P_j ; ρ_j indicates the density of the material in P_j n_j is function that represents the nonlinear properties of the material in P_j .

c_j^2 , θ_j , γ , $j = 1, 2$ are defined as follows.

$$c_\alpha^2 = \frac{\mu_\alpha}{\rho_\alpha} \quad \gamma = \frac{\mu_2}{\mu_1} \quad \text{and} \quad \theta_\alpha = \frac{n_\alpha}{c_\alpha^2} \quad (10)$$

In this work, we assumed that linear and nonlinear material parameters are exponential functions of the dept variable, Y ;

$$\mu_j = \mu_{0j} e^{\beta_j Y}, \quad \rho_j = \rho_{0j} e^{\beta_j Y}, \quad n_j = n_{0j} e^{\lambda_j Y} \quad j = 1, 2 \quad \beta_j, \lambda_j = \text{constants.}$$

It may be assumed that between the linear shear wave velocities of the layers, the inequality $c_{01} \sqrt{1 + (\beta_1^2/4k^2)} < c_{02} \sqrt{1 + (\beta_2^2/4k^2)}$ is valid where $c_{0j}^2 = \mu_{0j}/\rho_{0j}$. For the existence of an SH wave in such a medium, the phase velocity c of the wave must satisfy either

$$c_{01} \sqrt{1 + (\beta_1^2/4k^2)} < c_{02} \sqrt{1 + (\beta_2^2/4k^2)} < c$$

or

$$c_{01} \sqrt{1 + (\beta_1^2/4k^2)} < c < c_{02} \sqrt{1 + (\beta_2^2/4k^2)}$$

Here the problem for the first inequality will be investigated.

The multiple scales method is employed to examine the self-modulation of nonlinear SH waves. For this purpose, instead of the variables X , Y and t we introduced the following new independent variables

$$x_i = \varepsilon^i X, \quad t_i = \varepsilon^i t, \quad y = Y, \quad i = 0, 1, 2. \quad (11)$$

Here, $\varepsilon > 0$ is a small parameter that measures the degree of nonlinearity. The variables $\{x_1, x_2, t_1, t_2\}$ are the slow variables introduced to specify the slow variations of the amplitude whereas $\{x_0, y, t_0\}$ are the fast variables. It is assumed that the displacement functions u and v have a uniformly valid asymptotic expansion in ε ;

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n(x_0, x_1, x_2, y, t_0, t_1, t_2), \quad (12)$$

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n v_n(x_0, x_1, x_2, y, t_0, t_1, t_2).$$

The following relations are valid between the derivative operators according to the old and new variables:

$$\frac{\partial}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial x_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2}, \quad \frac{\partial}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial y}. \quad (13)$$

Employing these new variables (11) and the expansions (12) with (13) into the equations of motion (3)-(4) together with the boundary conditions (5)-(8), and then arranging the resulting expressions in like powers of ε , a hierarchy of equations is obtained. The equations up to third order in ε from which it is possible to determine u_n and v_n , successively are as follows;

$\mathcal{O}(\varepsilon)$:

$$\mathcal{L}_0^{(1)} u_1 = 0 \quad \text{in } P_1, \quad (14)$$

$$\mathcal{L}_0^{(2)} v_1 = 0 \quad \text{in } P_2. \quad (15)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = 0 \quad \text{on } y = h_1, \quad (16)$$

$$u_1 - v_1 = 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} - \gamma \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \quad \text{on } y = 0, \quad (17)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \quad \text{on } y = -h_2. \quad (18)$$

$\mathcal{O}(\varepsilon)^2$:

$$\mathcal{L}_0^{(1)} u_2 = \mathcal{L}_1^{(1)} u_1 \quad \text{in } P_1, \quad (19)$$

$$\mathcal{L}_0^{(2)} v_2 = \mathcal{L}_1^{(2)} v_1 \quad \text{in } P_2, \quad (20)$$

$$\text{on } y = h_1, \quad \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0, \quad (21)$$

$$\text{on } y = 0, \quad u_2 - v_2 = 0, \quad (22)$$

$$\text{on } y = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial y} - \gamma \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0, \quad (23)$$

$$\text{on } y = -h_2, \quad \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0. \quad (24)$$

$\mathcal{O}(\varepsilon)^3$:

$$\mathcal{L}_0^{(1)} u_3 = \mathcal{L}_1^{(1)} u_2 + \mathcal{L}_2^{(1)} u_1 + \mathcal{N}(u_1) \quad \text{in } P_1, \quad (25)$$

$$\mathcal{L}_0^{(2)} v_3 = \mathcal{L}_1^{(2)} v_2 + \mathcal{L}_2^{(2)} v_1 + \mathcal{N}(v_1) \quad \text{in } P_2. \quad (26)$$

$$\text{on } y = h_1, \quad \frac{\partial u_3}{\partial y} + \theta_1 Q(u_1) \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0, \quad (27)$$

$$\text{on } y = 0, \quad u_3 - v_3 = 0, \quad (28)$$

$$\text{on } y = 0, \quad \frac{\partial u_3}{\partial y} - \gamma \frac{\partial v_3}{\partial y} = \gamma \theta_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} Q(v_1) - \theta_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} Q(u_1), \quad (29)$$

$$\text{on } y = -h_2, \quad \frac{\partial v_3}{\partial y} + \theta_2 Q(v_1) \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0. \quad (30)$$

Here, $\mathcal{L}_0^{(m)}, \mathcal{L}_1^{(m)}, \mathcal{L}_2^{(m)}$ linear operators with $m = 1, 2$; The nonlinear operators \mathcal{N} and Q are defined as follows:

$$\mathcal{L}_0^{(m)}(\psi) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t_0^2} - c_m^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\mu'_m}{\rho_m} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right), \quad (31)$$

$$\mathcal{L}_1^{(m)}(\psi) = 2 \left(c_m^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_0 \partial x_1} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t_0 \partial t_1} \right), \quad (32)$$

$$\mathcal{L}_2^{(m)}(\psi) = c_m^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_0 \partial x_2} \right) - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t_0 \partial t_2}, \quad (33)$$

$$\mathcal{N}(\psi) = \frac{1}{\rho_m} \left[\frac{\partial}{\partial x_0} \left(\rho_m n_m Q(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x_0} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho_m n_m Q(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right]. \quad (34)$$

$$Q(\psi) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2. \quad (35)$$

By applying the method of separation of variables to the equations (14)-(15), we can get the solutions of the first-order problem in the following form:

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{\mu_{01} e^{\beta_1 y}}} \sum_{l=1}^{\infty} [A_1^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{i l k r_1 y} + B_1^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{-i l k r_1 y}] e^{i l \phi} + c.c. \quad (36)$$

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{\mu_{02} e^{\beta_2 y}}} \sum_{l=1}^{\infty} [C_1^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{i l k r_2 y} + D_1^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{-i l k r_2 y}] e^{i l \phi} + c.c. \quad (37)$$

where

$$r_1 = \left(\frac{c^2}{c_{01}^2} - \frac{\beta_1^2}{4k^2 l^2} - 1 \right)^{1/2}, \quad r_2 = \left(\frac{c^2}{c_{02}^2} - \frac{\beta_2^2}{4k^2 l^2} - 1 \right)^{1/2}, \quad \phi = kx_0 - \omega t_0. \quad (38)$$

Here $A_1^{(l)}, B_1^{(l)}, C_1^{(l)}, D_1^{(l)}$ are first-order wave amplitude functions dependent on slow variables (x_1, x_2, t_1, t_2) and are determined using the boundary conditions of the problem. k and ω are the wave numbers and angular frequency, respectively and "c.c." represents the complex conjugate of the preceding terms

If the solution forms in (36)-(37) are used in the homogeneous boundary conditions (16)-(18), one obtains the following system of homogeneous equations

$$\mathbf{W}_l \mathbf{U}_1^{(l)} = \mathbf{0} \quad l = 1, 2, 3, \dots \quad (39)$$

The explicit form of the dispersion matrix W_l is given as;

$$\mathbf{W}_l = \begin{pmatrix} \frac{ie^{i k r_1 l h_1} (2k r_1 l + i \beta_1)}{2\sqrt{\mu_{01}} e^{\beta_1 h_1}} & \frac{e^{-i k r_1 l h_1} (-2i k r_1 l - \beta_1)}{2\sqrt{\mu_{01}} e^{\beta_1 h_1}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\mu_{01}}} & \frac{1}{\sqrt{\mu_{01}}} & -\frac{1}{\sqrt{\mu_{02}}} & -\frac{1}{\sqrt{\mu_{02}}} \\ \frac{i k r_1 l - \frac{\beta_1}{2}}{\sqrt{\mu_{01}}} & \frac{-i k r_1 l - \frac{\beta_1}{2}}{\sqrt{\mu_{01}}} & \frac{\gamma(-i k r_2 l + \frac{\beta_2}{2})}{\sqrt{\mu_{02}}} & \frac{\gamma(i k r_2 l + \frac{\beta_2}{2})}{\sqrt{\mu_{02}}} \\ 0 & 0 & \frac{e^{h_2(-i k r_2 l + \frac{\beta_2}{2})} (i k r_2 l - \frac{\beta_2}{2})}{\sqrt{\mu_{02}}} & \frac{e^{h_2(i k r_2 l + \frac{\beta_2}{2})} (-i k r_2 l - \frac{\beta_2}{2})}{\sqrt{\mu_{02}}} \end{pmatrix}$$

In this work, we are examining the nonlinear self-modulation of a wave train centred around a wave number k , therefore it is assumed that the wave number of the fundamental wave does not satisfy the harmonic resonance phenomena, i.e. for $l \neq 1$ $\det \mathbf{W}_l \neq 0$. Then the solutions of the algebraic system of equations (39) are found to be

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_1^{(1)} &= \mathcal{A}_1 \mathbf{R} \quad \text{for } l = 1 \\ \mathbf{U}_1^{(l)} &\equiv \mathbf{0} \quad \text{for } l \geq 2 \end{aligned}$$

where \mathcal{A}_1 is the complex function of the slow variables, i.e., $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_1(x_1, x_2, t_1, t_2)$ represent the first order slowly varying amplitude of the waves and \mathbf{R} is a column vector satisfying $\mathbf{W}_1 \mathbf{R} = \mathbf{0}$. The solutions of the first order problem, u_1 and v_1 are written explicitly as;

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\mathcal{A}_1(x_1, x_2, t_1, t_2)}{\sqrt{\mu_{01} e^{\beta_1 y}}} (R_1 e^{ikp_1 y} + R_2 e^{-ikp_1 y}) e^{i\phi} + c.c. \\ v_1 &= \frac{\mathcal{A}_1(x_1, x_2, t_1, t_2)}{\sqrt{\mu_{02} e^{\beta_2 y}}} (R_3 e^{ikp_2 y} + R_4 e^{-ikp_2 y}) e^{i\phi} + c.c. \end{aligned} \tag{40}$$

$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_1(x_1, x_2, t_1, t_2)$ is a complex function representing the first order slowly varying amplitude of the wave modulation. To find the first order solutions completely, \mathcal{A}_1 has to be determined. This has been done by examining the higher order perturbation problems. A compatibility condition in the second order perturbation problem shows that $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_1(x_1 - V_g t_1, x_2, t_2)$ where V_g is the group velocity of the waves. Then, if we assume that the second order slowly varying amplitude function \mathcal{A}_2 also remains constant in a frame of reference moving with group velocity, V_g , of the waves, i.e., $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_2(x_1 - V_g t_1, x_2, t_2)$, a compatibility condition in the third order problem yields the following NLS equation for $\mathcal{A} = k\mathcal{A}_1$

$$i \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \tau} + \Gamma \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial \xi^2} + \Delta |\mathcal{A}|^2 \mathcal{A} = 0 \tag{41}$$

where the non dimensional variables and constants τ , ξ , Γ and Δ are defined as

$$\tau = \omega t_2, \xi = k\epsilon^{-1}(x_2 - V_g t_2) = k(x_1 - V_g t_1), \mathcal{A} = k\mathcal{A}_1, \Gamma = k^2 \tilde{\Gamma} / \omega, \Delta = \tilde{\Delta} / \omega k^2. \tag{42}$$

Here $\tilde{\Gamma}$ and $\tilde{\Delta}$ are constants:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma} &= -\left[\frac{1}{2} \mathbf{L} (V_g^2 \frac{\partial^2 \mathbf{W}_1}{\partial \omega^2} + 2V_g \frac{\partial^2 \mathbf{W}_1}{\partial \omega \partial k} + \frac{\partial^2 \mathbf{W}_1}{\partial k^2}) \mathbf{R} \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{L} \left(\frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k} + V_g \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial k} + V_g \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \omega} \right) \right] / \left(\mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega} \mathbf{R} \right), \end{aligned} \tag{43}$$

$$\tilde{\Delta} = -\mathbf{L} \mathbf{F} / \left(\mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega} \mathbf{R} \right) \tag{44}$$

The coefficient Γ only depends on linear material properties while the coefficients Δ also depends on nonlinear material properties. The NLS equation has been derived in many different fields in the literature to characterize nonlinear wave modulation asymptotically. Thus once solutions for \mathcal{A} is derived from (41) for given initial values

of the form $\mathcal{A}(\xi, 0) = \mathcal{A}_0(\xi)$, then the first order solutions u_1 and v_1 can be constructed by (40). As is known, the solutions of the NLS equation depend on the sign of the product of the coefficients of the equation's dispersion term and the nonlinear term. Solitary envelope solutions exist if this product is positive.

The effects of linear and nonlinear heterogeneous material properties of the layered medium on the linear stability of the plane wave solutions and the existence of solitary envelope solutions of NLS equation are observed.



1. GİRİŞ

Elastisite, bir cismin dış kuvvetler etkisiyle belirli bir sınıra kadar şekil değiştirmesi ve kuvvetlerin kaldırılması ile başlangıç şeklini yeniden bulması özelliğidir. Elastisitenin matematiksel teorisi, dengeleyici bir kuvvetler sisteminin hareketine tabi olan veya küçük bir iç bağıl hareket durumunda olan katı bir cisim içindeki gerinim veya bağıl yer değiştirme durumunu hesaplamaya indirgeme girişimi ile ilgilenir. Elastisite teorisinin temelleri 1822' de Cauchy tarafından atılmıştır. Cauchy elastik bir ortama hareketin gerilme ve yerdeğiştirme denklemleri kavramlarını getirmiş ve hareket denklemlerini, yerdeğiştirmeler cinsinden elde etmiştir. Elastik dalga yayılımı ile ilgili çeşitli problemlerin incelenmesi ayrı bir matematiksel fizik dalı olarak devam etmiş ve bu problemler sismoloji, jeofizik, petrol mühendisliği, deprem mühendisliği, sensörlerin tasarımı, 1950'lerden itibaren malzeme yüzeylerinin hasarsız muayenesi, 1970'lerde elektronik sinyal işlem cihazları teknolojisinde birçok önemli uygulama alanları bulmuştur. Uygulamalar ve incelemeler hakkında daha fazla bilgi için Ewing [1], Achenbach [2], Farnell [3]' e bakılabilir.

Yer kabuğu içerisinde meydana gelen deprem, patlama ya da çökme anında çok büyük miktarlarda enerji açığa çıkar. Bu enerjilerin bir kısmı faylanma için kullanılırken kalan kısmı ise yer içerisinde elastik dalgalar şeklinde yayılır. Yer içinde yayılıp yeryüzeyinde sismograflar tarafından kayıt edilen elastik yayılımlara sismik dalgalar veya deprem dalgaları denir. Deprem olayında sismograflara başlıca iki dalga türü ulaşır. Bunlar cisim dalgaları (body waves) ve yüzey dalgaları (surface waves)'dir. Cisim dalgaları yerin derinliklerinde yüzeyine oranla daha hızlı yayılırlar. Bunlar P (primary) ve S (secondary veya shear) dalgalarıdır. Yeryüzünün iç yapısında deprem ya da patlama gibi sismik bir olay sonucu meydana gelen cisim dalgalarından en hızlı olanı ve sismometreler tarafından ilk ölçüleni P dalgasıdır. P dalgası boyuna (sıkışma) dalgadır, yani taneciklerin titreşim hareketi dalganın yayılma doğrultusuna her zaman paraleldir ve katı, gerilimi ve sıkışabilir gerilmeyi iletir. Hızı daha yavaş olan ve ikinci ölçülen dalga S dalgasıdır. S dalgası enine (kayma) dalgadır yani tanecik hareketi dalgaların yayılma doğrultularına dik, aşağı-yukarı veya sağa-sola doğru titreşirler ve

sadece katı ortamlarda yayılabilmektedirler. S dalgaları yeryüzünün yatay ve düşey doğrultularındaki anizotropik yapısından dolayı sismograflara polarize olmuş olarak ulaşırlar ve iki ayrı bileşene yatay SH (yatay düzlemde polarize olmuş) ve düşey SV (düşey düzlemde polarize olmuş) bileşenlerine ayrılırlar. Yüzey dalgaları ise cisim dalgaları yüzeye ulaştığı zaman ortaya çıkarlar, cisim dalgalarından daha yavaş olarak yayılırlar ve cisim dalgalarına göre daha düşük frekansa ve büyük genliklere sahip oldukları için en tahrip edici dalgalardır. Yüzey dalgalarının yayılabilmesi için ortamın sınırlı yani yarı-sonsuz olması gereklidir. Yüzey dalgalarından biri olan ve Lord Rayleigh tarafından keşfedilen Rayleigh dalgaları hem enine hem de boyuna hareketi içerir. Bir dalga hareketinde hızın periyot ve frekansa bağlı olarak değişmesine dispersiyon denir. Rayleigh dalgaları dispersif değildir, yani dalgaların faz hızları sabittir. Ancak uzun periyotlu ilk sismogramlar bile yüzey dalgası bölümlerinde, büyük enine yer değiştirme bileşenlerine sahip dispersif dalgalar kaydetmişlerdir. Bu durum, yüzey dalgalarının bir başka tipinin olası varlığına işaret etmiştir. A. E. H. Love bunun yer yüzünün tabakalı yapısının bir sonucu olduğunu düşünmüş ve Love dalgaları olarak adlandırılan, farklı mekaniksel özelliklere sahip düzgün kalınlıklı bir tabaka ile kaplı homojen izotrop lineer elastik bir yarım uzayda, yer değiştirme doğrultusu yayılma doğrultusu ile serbest düzlem yüzeyin normalinin oluşturduğu düzleme (sagittal düzlem) dik olan dispersif yüzey dalgalarının matematiksel bir modelini geliştirmiştir [4]. Love dalgalarının yayılma problemleri büyük öneme sahiptir. Bunlar sadece yeryüzünün iç yapısını araştırmakta yardımcı olmakla kalmaz, aynı zamanda yer yüzeyinin içine gömülü doğal kaynakların, örneğin yağlar, gazlar ve diğer faydalı hidrokarbonlar ve minerallerin araştırılmasında da çok yardımcı olur. Daha sonra, Stoneley ve Tillotson [5], Love dalgaları teorisini çift katmanlı bir yarı uzaya genişletti ve Stoneley [6], düşük hızlı iç katmanın yatay kayma (SH) dalgalarının yayılması üzerindeki etkisini inceledi. Love dalgaları dağılımı genellikle yeryüzeyine yakındır dolayısıyla daha yavaş dağılırlar bu nedenle deprem sırasında direkt olarak hissettiğimiz en hızlı enine yayılan yüzey dalgasıdır [7]. Homojen, izotrop malzemedan oluşan sonsuz ortamlarda yayılan boyuna ve enine dalgalar da Rayleigh dalgaları gibi dispersif değildirler. Diğer yandan homojen, izotrop, elastik malzemedan meydana gelen çubuklar, plakalar ve farklı malzemedan oluşan katmanlı yarım uzay gibi genel olarak dalga kılavuzu (waveguide) olarak adlandırılan ortamların sınır yüzeylerinde tekrarlanan yansıma süreçleri nedeniyle dalgalar dispersif olurlar,

yani dalgaların faz hızları dalga sayısına bağlıdır.

19.yüzyılın ortalarından günümüze kadar hem dispersif, hem de non-dispersif lineer elastik dalgalarla ilgili problemler yukarıda belirtilen uygulama alanlarının da etkisi ile bir çok çalışmanın konusunu oluşturmuştur [1, 2, 8, 9]. Devamında lineer teorinin yanında elastik dalgaların yayılmasına bünyesel nonlineerliğin etkilerinin de incelenmeye alındığı problemler çözülmeye başlanmıştır. Bu çalışmaların çoğunda, daha önce akışkanlar mekaniği, plazma fiziği vb. alanlarda zayıf nonlineer dalgaların bu alanlarda yayılmasını araştırmak için kullanılan asimptotik pertürbasyon yöntemleri kullanılmıştır [10–14]. Bu çalışmalarda nonlineerlikle dispersiyonu dengeleyen küçük ama sonlu genlikli dalgaların yayılımının Korteweg-de Vries (KdV), modifiye edilmiş KdV, nonlineer Schrodinger (NLS), Boussinesq (BE) gibi denklemler ile karakterize edilebileceği gösterilmiştir. [15]' te nonlineerliğin ve dispersiyonun etkisini birlikte modelleyen bir denklem elde edilmiş ve dalga modülasyonunun genlik fonksiyonları için soliton tipi çözümleri olduğu sonucuna varılmıştır. Daha sonra [16]' da düzgün kalınlıklı, farklı malzeme özelliklerine sahip homojen, izotrop, sıkıştırılabilir ve hiperelastik malzemeden yapılmış bir tabaka ile kaplı yarı sonsuz uzayda SH dalgalarının lineer olmayan modülasyonu incelenmiş ve asimptotik bir pertürbasyon yöntemi ile zayıf nonlineerlikle dispersiyonun etkilerinin dengelenmesi sonucunda, dalga modülasyonunun genlik fonksiyonunun asimptotik olarak dalgaların lineer olmayan self modülasyonunun lineer olmayan Schrödinger(NLS) denklemi ile karakterize edilebileceği gösterilmiştir. [16]' ya paralel çalışmalar [17, 18]' de yapılmıştır. [19]' da düzgün kalınlıklı, homojen, izotrop, sıkıştırılamaz, elastik iki tabakalı bir ortamda SH dalgalarının lineer olmayan self modülasyonunun asimptotik olarak NLS denklemi ile karakterize edilebileceği gösterilmiştir. [20]' de farklı elastik özelliklere sahip düzgün kalınlıklı iki tabaka ile kaplı bir yarı uzayda lineer olmayan SH dalgalarının yayılmasını modelleyen bir sınır değer problemi incelenmiştir. Ahmetolan ve diğerleri tarafından ise farklı malzeme özelliklerine sahip düzgün kalınlıklı iki tabakalı bir ortamda SH dalgalarının yayılımı problemi dispersiyon bağıntısının tüm dalları gözönüne alınarak ele alınmış ve zayıf nonlineerlikle dispersiyon etkisi dengelenerek, dalga modülasyonunun asimptotik olarak bir lineer olmayan Schrödinger (NLS) denklemi ile karakterize edilebileceği gösterilmiştir [38]. Bu bahsedilen çalışmalarda ortamın homojen olduğu kabul edilmiştir. Bunların yanısıra dispersif SH dalgalarının yayılımına heterojenliğin

etkisini inceleyen çalışmalar da mevcuttur. [22]' de homojen olmayan iki tabaka ile kaplı bir yarım uzayda Love dalgaları yayılımı ile ilgilenilmiş ve dispersiyon bağıntısı türetilerek bazı özel durumlar için hareket denklemlerinin çözümleri araştırılmıştır. [23]' te ortamın yoğunluğu ve sertliğinin derinlikle değiştiği, rijit (katı) bir cisim üzerine oturtulmuş heterojen lineer elastik bir tabakada Love dalgaları varlığı incelenmiştir. [24]'de katılık(μ) ve yoğunluğun(ρ) hem yatay(x) hem de dikey(z) yönlerde değiştiği ayrıca μ ve ρ 'daki yatay değişim tüm katmanlarda aynı kabul edilerek katmanlı ortamlarda tabakalı heterojen bir ortamda Love dalgaları yayılımı ile ilgilenmişlerdir. [25]' te heterojen bir tabakada lineer olmayan SH dalgalarının yayılımı incelenmiş ve nonlinearlik ile birlikte heterojenliğin dalga yayılımına etkisi ortaya çıkarılmıştır.

Güncel çalışmalar arasında [26]'da fiziksel olarak farklı malzeme özelliklerine sahip, homojen olmayan değişken rijitlik ve yoğunlukta bir tabaka ve homojen yarı sonsuz uzay üzerinde sonlu derinlikten oluşan tabakada Love dalgalarının yayılımı problemi ile ilgilenilmiştir. [27]'de lineer olmayan SH dalgaları için heterojen ve lineer olmayan etkilerle birlikte heterojen ve homojen tabakalar arasında parlak(bright) ve karanlık(dark) solitary dalga çözümleri incelenmiştir.

Bu tez çalışmasında, düzgün kalınlıklı, heterojen, izotrop ve farklı elastik malzeme özelliklerine sahip ve malzeme parametreleri derinlik doğrultusunda değişen iki tabakalı bir ortamda lineer olmayan yatay kayma dalgalarının(SH) yayılması problemi ele alınmıştır.

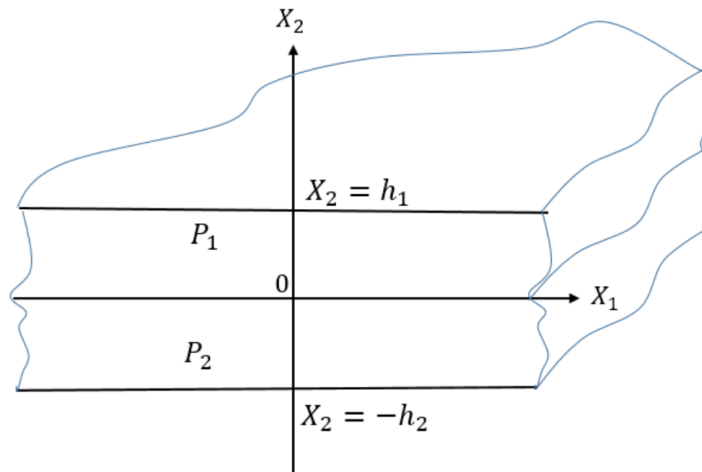
Literatür incelendiğinde heterojen ortamdaki çalışmalar daha çok lineer dalga yayılımı ile ilgilidir. Bu çalışmada nonlinear dalga yayılımı ile birlikte heterojenliğin dalga yayılımına etkisi incelenerek literatüre katkı sağlanmıştır.

2. İKİ TABAKALI HİPERELASTİK BİR ORTAMDA SH DALGALARI

2.1 Giriş

Bu bölümde ilk olarak düzgün kalınlıklı, homojen olmayan (heterojen), nonlineer, hiperelastik malzemelerden oluşan iki tabakalı bir ortamda sonlu genlikli SH dalgalarının yayılmasını karakterize eden hareket denklemleri ve sınır koşullarından oluşan problem verilmektedir. Bilindiği gibi ortamı oluşturan malzeme parametreleri konuma göre değişim gösteriyorsa malzeme heterojen, malzeme özellikleri her noktada aynı ise (sabit) homojen malzeme olarak adlandırılmaktadır. Bu çalışmada malzeme özelliklerinin derinlik doğrultusunda değişime sahip olduğu, yani dikey doğrultuda değiştiği kabul edilecektir. Malzeme parametrelerinin derinlik değişkenine göre değişiminin üstel fonksiyonlar cinsinden olduğu kabulü altında işlemler yürütülecektir. Bu kabul altında problemin formülasyonu Bölüm 2.2’de verilmektedir. Bölüm 2.3’ te nonlineer terimler hareket denklemleri ve sınır koşullarına dahil edilmeyerek sırasıyla ortamı oluşturan malzemelerin homojen olması ve heterojen olması durumlarına karşı gelen iki lineer sınır değer problemi için lineer dalgaların yayılımını veren dispersiyon bağıntıları elde edilecektir.

2.2 Problemin Tanımı ve Temel Denklemler



Şekil 2.1 : Elastik ortamın geometrisi

(x_1, x_2, x_3) ve (X_1, X_2, X_3) sırasıyla üç boyutlu uzayda bir noktanın aynı dik kartezyen eksen sistemine göre uzaysal ve maddesel koordinatları olsun. $h_1, h_2 > 0$ tabakaların kalınlığı olmak üzere başlangıç konumunda,

$$P_1 = \{(X_1, X_2, X_3) \mid 0 \leq X_2 \leq h_1, -\infty < (X_1, X_3) < \infty\} \quad (2.1)$$

ve

$$P_2 = \{(X_1, X_2, X_3) \mid -h_2 \leq X_2 \leq 0, -\infty < (X_1, X_3) < \infty\} \quad (2.2)$$

bölgelerini dolduran farklı elastik malzemelerden oluşan düzgün kalınlıklı iki tabakadan oluşan bir sürekli ortam göz önüne alalım. $X_2 = 0$ arayüzeyi boyunca yer değiştirmelerin ve gerilmelerin sürekli olduğunu $X_2 = h_1$ ve $X_2 = -h_2$ serbest yüzeylerinde de gerilmelerin sıfır olduğunu kabul edelim. Bu tabakalı ortam içerisinde X_1 eksenini boyunca yayılan kayma dalgaları

$$x_1 = X_1, \quad x_2 = X_2, \quad x_3 = X_3 + u_3^{(m)}(X_1, X_2, t), \quad m = 1, 2 \quad (2.3)$$

denklemleri ile tanımlanır. (2.3) denkleminde $u_3^{(1)}$ ve $u_3^{(2)}$ sırası ile P_1 ve P_2 tabakalarındaki noktaların X_3 yönündeki yer değiştirmelerini ve t zamanı göstermektedir. Maddesel koordinatlar (X_1, X_2, X_3) yerine (X, Y, Z) ve yer değiştirme fonksiyonları $u_3^{(1)}(X_1, X_2, t)$ ve $u_3^{(2)}(X_1, X_2, t)$ yerine de sırasıyla $u(X, Y, t)$ ve $v(X, Y, t)$ fonksiyonlarını alalım. Bu çalışmada sonlu fakat küçük genlikli dalgaların yayılması inceleneceği için daha yüksek mertebeden terimler ihmal edilerek yaklaşık hareket denklemleri ve sınır koşullarından oluşan sınır değer problemi aşağıdaki şekilde yazılır;

$$P_1 \text{ 'de} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_1^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \right) - \frac{1}{\rho_1} \left(\frac{d(\rho_1 c_1^2)}{dY} \frac{\partial u}{\partial Y} \right) = \quad (2.4)$$

$$n_1 \left[\left(\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial u}{\partial X} Q(u) \right) \right) + \left(\frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial u}{\partial Y} Q(u) \right) \right) \right] + \frac{1}{\rho_1} Q(u) \left(\frac{\partial}{\partial Y} (\rho_1 n_1) \frac{\partial u}{\partial Y} \right),$$

$$P_2 \text{ 'de} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_2^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial Y^2} \right) - \frac{1}{\rho_2} \left(\frac{d(\rho_2 c_2^2)}{dY} \frac{\partial v}{\partial Y} \right) = \quad (2.5)$$

$$n_2 \left[\left(\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial v}{\partial X} Q(v) \right) \right) + \left(\frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial v}{\partial Y} Q(v) \right) \right) \right] + \frac{1}{\rho_2} Q(v) \left(\frac{\partial}{\partial Y} (\rho_2 n_2) \frac{\partial v}{\partial Y} \right).$$

$$Y = h_1 \text{ 'de} \quad \frac{\partial u}{\partial Y} + \theta_1 Q(u) \frac{\partial u}{\partial Y} = 0, \quad (2.6)$$

$$Y = 0 \text{ 'da} \quad u - v = 0, \quad (2.7)$$

$$Y = 0 \text{ 'da} \quad \frac{\partial u}{\partial Y} - \gamma \frac{\partial v}{\partial Y} = \theta_2 \gamma Q(v) \frac{\partial v}{\partial Y} - \theta_1 Q(u) \frac{\partial u}{\partial Y}, \quad (2.8)$$

$$Y = -h_2' \text{ de } \frac{\partial v}{\partial Y} + \theta_2 Q(v) \frac{\partial v}{\partial Y} = 0, \quad (2.9)$$

denklemlerdeki Q nonlinear türev operatörü (A.50)'de tanımlandığı gibi

$$Q(\psi) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial Y} \right)^2 \quad (2.10)$$

dir. Burada c_α^2 , θ_α , γ , $\alpha = 1, 2$ için aşağıdaki gibi tanımlanmışlardır;

$$c_\alpha^2 = \frac{\mu_\alpha}{\rho_\alpha} \quad \gamma = \frac{\mu_2}{\mu_1} \quad \text{ve} \quad \theta_\alpha = \frac{n_\alpha}{c_\alpha^2}. \quad (2.11)$$

Burada $\alpha = 1$ alt indisi büyüklüğün P_1 tabakasına, $\alpha = 2$ alt indisi ise P_2 tabakasına ait olduğunu belirtmektedir. $c_\alpha(Y)$, P_α tabakasındaki lineer kayma dalgalarının yayılma hızını, $\mu_\alpha(Y)$ ortamın lineer kayma modülünü, $\rho_\alpha(Y)$ ortamdaki malzemelerin yoğunluğunu göstermektedir, $n_\alpha(Y)$ tabakaları oluşturan malzemelerin nonlinear özelliklerini temsil eden fonksiyonlardır ve θ_α tabakaların nonlinear malzeme özelliğini temsil etmektedir. Hareket denklemlerinin elde edilişi ile ilgili ayrıntılı bilgi Ek'A de verilmektedir.

2.3 İki Tabakalı Elastik Ortamda Lineer SH Dalgalarının Yayılması

Daha ileriki bölümlerde (2.4)-(2.9) denklemleri ile tanımlanan nonlinear sınır değer probleminin asimptotik çözümü inşaa edilecektir. Bu incelemeye geçmeden önce sonraki çalışmalarımıza yol göstermesi açısından ilk olarak lineer dalgaların yayılımı problemi incelenecektir.

2.3.1 İki Tabakalı Homojen Elastik Ortamda Lineer SH Dalgalarının Yayılması ve Dispersiyon Bağıntısı

İlk olarak farklı homojen elastik malzemelerden oluşan iki tabakalı elastik ortamda lineer SH dalgalarının yayılımı problemi incelenecektir. Bu amaçla ortamı oluşturan tabakaların nonlinear malzeme parametreleri $n_1 = 0$ ve $n_2 = 0$ alınarak ve lineer malzeme parametreleri de sabit kabul edilerek, yani $\mu_i = sbt$, $\rho_i = sbt$, (2.4)-(2.9) ile verilen sınır değer problemi aşağıdaki lineer sınır değer problemine indirgenir [19]:

$$P_1' \text{ de } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_1^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \right) = 0, \quad (2.12)$$

$$P_2' \text{ de } \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_2^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial Y^2} \right) = 0. \quad (2.13)$$

$$Y = h_1 \text{ 'de } \frac{\partial u}{\partial Y} = 0, \quad (2.14)$$

$$Y = 0 \text{ 'da } u - v = 0, \quad (2.15)$$

$$Y = 0 \text{ 'da } \frac{\partial u}{\partial Y} - \gamma \frac{\partial v}{\partial Y} = 0, \quad (2.16)$$

$$Y = -h_2 \text{ 'de } \frac{\partial v}{\partial Y} = 0. \quad (2.17)$$

X eksenini boyunca yayılan harmonik dalgalar için (2.12) ve (2.13) denklemlerinin çözümlerini

$$u(X, Y, t) = U(Y)e^{i(kX - \omega t)} + c.c., \quad v(X, Y, t) = V(Y)e^{i(kX - \omega t)} + c.c. \quad (2.18)$$

formunda alalım. Bu çözüm formlarında k dalga sayısını, ω açısal frekansı, $c.c.$ sembolü önceki terimin kompleks eşleniğini göstermektedir. Dalgaların faz hızı

$$c = \frac{\omega}{k} \quad (2.19)$$

olmak üzere (2.18) çözüm formları (2.12)-(2.13) denklemlerinde kullanılırsa $U(Y)$ ve $V(Y)$ fonksiyonları için aşağıdaki ikinci mertebeden sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemler elde edilir:

$$\frac{d^2 U}{dY^2} + k^2 \left(\frac{c^2}{c_1^2} - 1 \right) U = 0, \quad (2.20)$$

$$\frac{d^2 V}{dY^2} + k^2 \left(\frac{c^2}{c_2^2} - 1 \right) V = 0. \quad (2.21)$$

Bilindiği gibi c_1 ve c_2 sırasıyla üst ve alt tabakalara ait ortamda yayılan lineer dalgaların yayılma hızını, c ise SH dalgalarının faz hızını göstermek üzere (2.20) ve (2.21) denklemlerinin verilen sınır koşullarını sağlayabilmesi için, yani iki tabakalı ortamda bu tip dalgaların yayılabilmesi için $c_1 < c_2$ kabulü altında

$$c_1 < c_2 < c \quad \text{ya da} \quad c_1 < c < c_2 \quad (2.22)$$

eşitsizliklerinden birinin gerçekleşmesi gerekmektedir. Bu çalışmada, faz hızları arasındaki ilk eşitsizliğin gerçekleştiği kabulü altında inceleme yürütülecektir. Benzer çalışma ikinci eşitsizliğin geçerli olduğu durum için de yapılabilir. (2.22) deki ilk koşul altında (2.20) ve (2.21) denklemlerinin çözümleri

$$\begin{aligned} U(Y) &= Ae^{ikp_1 Y} + Be^{-ikp_1 Y}, \\ V(Y) &= Ce^{ikp_2 Y} + De^{-ikp_2 Y} \end{aligned} \quad (2.23)$$

olarak elde edilir. Burada,

$$p_1 = \left(\frac{c^2}{c_1^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad p_2 = \left(\frac{c^2}{c_2^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.24)$$

dir ve A, B, C, D sabitlerdir. Bu sonuçlar ile birlikte (2.23)' de verilen çözümler (2.14)-(2.17) sınır koşullarında kullanılırsa

$$\mathbf{U} = [A, B, C, D]^T \quad (2.25)$$

ve

$$W = \begin{pmatrix} ikp_1 e^{ikh_1 p_1} & -ikp_1 e^{-ikh_1 p_1} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ ikp_1 & -ikp_1 & -ikp_2 & ikp_2 \\ 0 & 0 & ikp_2 e^{-ikh_2 p_2} & -ikp_2 e^{ikh_2 p_2} \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

olmak üzere

$$\mathbf{WU} = \mathbf{0} \quad (2.27)$$

homojen lineer cebirsel denklem sistemi elde edilir. Burada W "dispersiyon matrisi" olarak adlandırılmaktadır. Sıfırdan farklı u ve v çözümleri için (2.27) homojen denklem sisteminin sıfırdan farklı çözümü olması gereklidir, bunun için de katsayılar matrisinin determinantının sıfır olması gerekir:

$$\det \mathbf{W} = 0. \quad (2.28)$$

Bu koşuldan

$$p_1 \cos(kh_2 p_2) \sin(kh_1 p_1) + \gamma p_2 \cos(kh_1 p_1) \sin(kh_2 p_2) = 0 \quad (2.29)$$

denklemini elde edilir. (2.29) denklemini homojen lineer dalgalara ait dispersiyon bağıntısı olarak adlandırılmaktadır ve dalga sayısı-faz hızı, (k, c) , arasındaki ilişkiyi verir [19, 38].

2.3.1.1 Dispersiyon Bağıntısı

Homojen ortamda lineer dalga yayılımını temsil eden sınır değer problemi $c_1 < c_2 < c$ koşulu altında incelenmiştir ve (2.29) dispersiyon bağıntısı elde edilmiştir. Dispersiyon bağıntısı çok değerli bir fonksiyondur, bu nedenle birden fazla dalga sayısı-faz hızı arası ilişkiyi tanımlayan $c = c(k)$ eğrilerini verir. Bu eğrilerin her biri dispersiyon

bağıntısının bir dalı olarak adlandırılmaktadır. Dispersiyon bağıntısının grafiğini çizdirebilmek için öncelikle aşağıdaki boyutsuz değişkenler tanımlanır:

$$C = \frac{c}{c_1}, \quad M = \frac{c_2}{c_1}, \quad H = \frac{h_2}{h_1}, \quad K = kh_1, \quad KH = kh_2 \quad (2.30)$$

Burada K dalgaların boyutsuz dalga sayısını, C ise dalgaların boyutsuz faz hızını temsil etmektedir. Bu tanımlama altında (2.22)'deki ilk koşul

$$1 < M < C \quad (2.31)$$

şeklinde yazılır. (2.29) dispersiyon bağıntısının boyutsuz hali

$$D(C, K) = G_1 \cos(KHG_2) \sin(KG_1) + \gamma G_2 \cos(KG_1) \sin(KHG_2) = 0 \quad (2.32)$$

formunda yazılır. Burada $G_1 = \sqrt{C^2 - 1}$ ve $G_2 = \sqrt{\frac{C^2}{M^2} - 1}$ 'dir. (2.32) kullanılarak $C = C(K)$ fonksiyonlarının (C, K) düzleminin birinci dörtte bir kısmında, yani $C \geq 0$, $K \geq 0$ bölgesindeki dallarının grafikleri çizilebilir. (2.31) eşitsizliği dikkate alınır, $D(C, K)$ fonksiyonu (C, K) düzleminde

$$K \geq 0, \quad 1 < M < C \quad (2.33)$$

eşitsizlikleriyle verilen bölgede tanımlı ve süreklidir. Ayrıca bu bölgede kapalı fonksiyon teoremine göre $\frac{\partial D}{\partial C}$ ve $\frac{\partial D}{\partial K}$ de süreklidirler. Dolayısıyla $D(C, K) = 0$ denklemi bu bölgede $\frac{\partial D}{\partial C} \neq 0$ olduğu noktalar civarında $C = C(K)$ fonksiyonlarını tanımlar. Bu fonksiyonların her biri dispersiyon bağıntısının bir dalını oluşturur. (2.32) ile verilen dispersiyon bağıntısının ilk birkaç dalının grafikleri değişik malzeme parametreleri için Bölüm 2.3.3' te verilmektedir.

2.3.2 İki Tabakalı Heterojen Ortamda Lineer SH Dalgalarının Yayılması ve Dispersiyon Bağıntısı

Bu bölümde tabakaların farklı heterojen malzemelerden oluştuğu kabul edilmektedir. Bilindiği gibi heterojen malzemelerin özellikleri konuma göre değişim göstermektedir. Bu çalışmada bu malzeme parametrelerinin sadece derinliği temsil eden Y değişkeninin fonksiyonları oldukları kabulü altında analiz yürütülecektir, $\mu_j = \mu_j(Y)$ ve $\rho_j = \rho_j(Y)$. (2.4)-(2.5) denklemlerinde ve (2.6)-(2.9) sınır koşullarında nonlinear malzeme fonksiyonları $n_1(Y) = 0$, $n_2(Y) = 0$ alınarak, lineer dalgaların yayılmasını veren sınır değer problemi aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$P_1 \text{ 'de} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_1^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \right) - \frac{1}{\rho_1} \left[\frac{d(\rho_1 c_1^2)}{dY} \frac{\partial u}{\partial Y} \right] = 0, \quad (2.34)$$

$$P_2 \text{ 'de } \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_2^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial Y^2} \right) - \frac{1}{\rho_2} \left[\frac{d(\rho_2 c_2^2)}{dY} \frac{\partial v}{\partial Y} \right] = 0. \quad (2.35)$$

$$Y = h_1 \text{ 'de } \frac{\partial u}{\partial Y} = 0, \quad (2.36)$$

$$Y = 0 \text{ 'da } u - v = 0, \quad (2.37)$$

$$Y = 0 \text{ 'da } \frac{\partial u}{\partial Y} - \gamma \frac{\partial v}{\partial Y} = 0, \quad (2.38)$$

$$Y = -h_2 \text{ 'de } \frac{\partial v}{\partial Y} = 0. \quad (2.39)$$

Pozitif X eksenini boyunca yayılan dalgalar için (2.34)-(2.35) denklemlerinin çözümlerini (2.18) formunda alalım. Bu çözüm formları (2.34)-(2.35) denklemlerinde kullanılırsa $U(Y)$ ve $V(Y)$ fonksiyonları için aşağıdaki ikinci mertebeden değişken katsayılı lineer diferansiyel denklemler elde edilir;

$$\frac{d^2 U}{dY^2} + \frac{1}{\mu_1} \frac{d\mu_1}{dY} \frac{dU}{dY} + k^2 \left(\frac{c^2}{c_1^2} - 1 \right) U = 0, \quad (2.40)$$

$$\frac{d^2 V}{dY^2} + \frac{1}{\mu_2} \frac{d\mu_2}{dY} \frac{dV}{dY} + k^2 \left(\frac{c^2}{c_2^2} - 1 \right) V = 0. \quad (2.41)$$

Malzeme fonksiyonlarının Y değişkenine bağlılığı tam olarak belli olmadığında, yani genel durumda, bu denklemlerin çözümlerini bulmak için

$$U(Y) = \frac{U^{(*)}}{\sqrt{\mu_1}}, \quad V(Y) = \frac{V^{(*)}}{\sqrt{\mu_2}} \quad (2.42)$$

dönüşümleri kullanılarak (2.40) ve (2.41) denklemleri aşağıdaki denklemlere indirgenir [1];

$$\frac{d^2 U^{(*)}}{dY^2} - \alpha_1(Y) U^{(*)} = 0, \quad (2.43)$$

$$\frac{d^2 V^{(*)}}{dY^2} - \alpha_2(Y) V^{(*)} = 0 \quad (2.44)$$

Burada,

$$\alpha_j = - \left[\frac{1}{4\mu_j^2} \left(\frac{d\mu_j}{dY} \right)^2 - \frac{1}{2\mu_j} \frac{d^2 \mu_j}{dY^2} + k^2 \left(\frac{c^2}{c_j^2} - 1 \right) \right], \quad j = 1, 2 \quad (2.45)$$

dir. $\alpha_j(Y) = sbt > 0$ kabulü altında (2.40) ve (2.41) denklemlerinin çözümleri, A, B, C ve D sabitler olmak üzere

$$U^{(*)}(Y) = Ae^{\sqrt{\alpha_1}Y} + Be^{-\sqrt{\alpha_1}Y}, \quad (2.46)$$

$$V^{(*)}(Y) = Ce^{\sqrt{\alpha_2}Y} + De^{-\sqrt{\alpha_2}Y} \quad (2.47)$$

şeklinde elde edilir. Lineer kayma modülü μ_j ve yoğunluk ρ_j fonksiyonları özel olarak,

$$\mu_j = \mu_{0j} e^{\beta_j Y}, \quad \rho_j = \rho_{0j} e^{\beta_j Y}, \quad j = 1, 2 \quad \beta_j = \text{sbt} \quad (2.48)$$

seçilirse [22, 25] (2.45) ile tanımlanan fonksiyonlar sabit olur. Bu durumda (2.43) ve (2.44) denklemleri sabit katsayılı diferansiyel denklemlere indirgenirler ve çözümleri üstel fonksiyon cinsinden verilebilir. Burada β_j parametresi heterojenliği temsil eden bir parametredir ve sıfırdan farklı bir reel sayıyı göstermektedir. (2.48) ile birlikte (2.43) ve (2.44) denklemleri sabit katsayılı denklemlere indirgenirler;

$$\frac{d^2 U^{(*)}}{dY^2} + \left(k^2 \left(\frac{c^2}{c_{01}^2} - 1 \right) - \frac{\beta_1^2}{4} \right) U^{(*)} = 0, \quad (2.49)$$

$$\frac{d^2 V^{(*)}}{dY^2} + \left(k^2 \left(\frac{c^2}{c_{02}^2} - 1 \right) - \frac{\beta_2^2}{4} \right) V^{(*)} = 0. \quad (2.50)$$

Burada $c_{0j}^2 = \frac{\mu_{0j}}{\rho_{0j}}$ $j = 1, 2$ şeklinde tanımlanmaktadır. c_{01} ve c_{02} sırasıyla üst ve alt tabakalara ait ortamda yayılan lineer dalgaların yayılma hızını, c ise SH dalgalarının faz hızını göstermek üzere

$$c_{01} \sqrt{1 + (\beta_1^2/4k^2)} < c_{02} \sqrt{1 + (\beta_2^2/4k^2)}$$

kabulü altında iki tabakalı ortamda bu tip dalgaların yayılabilmesi için

$$c_{01} \sqrt{1 + \beta_1^2/4k^2} < c_{02} \sqrt{1 + \beta_2^2/4k^2} < c \quad (2.51)$$

ya da

$$c_{01} \sqrt{1 + \beta_1^2/4k^2} < c < c_{02} \sqrt{1 + \beta_2^2/4k^2}$$

eşitsizliklerinden birinin gerçekleşmesi gerekmektedir. Bu çalışmada, faz hızları arasındaki ilk eşitsizliğin gerçekleştiği kabulü altında inceleme yürütülecektir. Benzer çalışma ikinci eşitsizliğin geçerli olduğu durum için de yapılabilir. (2.51) kabulü altında (2.40) ve (2.41) denklemlerinin çözümleri

$$U(Y) = \frac{1}{\sqrt{\mu_{01} e^{\beta_1 Y}}} (A e^{ikp_1 Y} + B e^{-ikp_1 Y}), \quad (2.52)$$

$$V(Y) = \frac{1}{\sqrt{\mu_{02} e^{\beta_2 Y}}} (C e^{ikp_2 Y} + D e^{-ikp_2 Y}) \quad (2.53)$$

olarak elde edilir Burada p_1 ve p_2

$$p_1 = \left(\frac{c^2}{c_{01}^2} - \frac{\beta_1^2}{4k^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad p_2 = \left(\frac{c^2}{c_{02}^2} - \frac{\beta_2^2}{4k^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.54)$$

olarak tanımlanmaktadır. $U(Y)$ ve $V(Y)$ fonksiyonları (2.18) çözümlerinde yerlerine yazılıp bu çözümler (2.36)-(2.39) sınır koşullarında kullanılırsa,

$$\mathbf{U} = [A, B, C, D]^T \quad (2.55)$$

ve dispersiyon matrisi

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \frac{ie^{ikp_1 h_1} (2kp_1 + i\beta_1)}{2\sqrt{\mu_{01}} e^{\beta_1 h_1}} & \frac{e^{-ikp_1 h_1} (-2ikp_1 - \beta_1)}{2\sqrt{\mu_{01}} e^{\beta_1 h_1}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\mu_{01}}} & \frac{1}{\sqrt{\mu_{01}}} & -\frac{1}{\sqrt{\mu_{02}}} & -\frac{1}{\sqrt{\mu_{02}}} \\ \frac{ikp_1 - \frac{\beta_1}{2}}{\sqrt{\mu_{01}}} & \frac{-ikp_1 - \frac{\beta_1}{2}}{\sqrt{\mu_{01}}} & \frac{\gamma(-ikp_2 + \frac{\beta_2}{2})}{\sqrt{\mu_{02}}} & \frac{\gamma(ikp_2 + \frac{\beta_2}{2})}{\sqrt{\mu_{02}}} \\ 0 & 0 & \frac{e^{h_2(-ikp_2 + \frac{\beta_2}{2})} (ikp_2 - \frac{\beta_2}{2})}{\sqrt{\mu_{02}}} & \frac{e^{h_2(ikp_2 + \frac{\beta_2}{2})} (-ikp_2 - \frac{\beta_2}{2})}{\sqrt{\mu_{02}}} \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

olmak üzere

$$\mathbf{WU} = \mathbf{0} \quad (2.57)$$

homojen lineer cebirsel denklem sistemi edilir. Böyle bir sistemin sıfırdan farklı çözüme sahip olması için

$$\det \mathbf{W} = 0 \quad (2.58)$$

olmalıdır. Daha öncesinde belirtildiği gibi bu bağıntı dispersiyon bağıntısı olarak adlandırılmaktadır ve açık ifadesi

$$F_1 \sin(kh_1 p_1) \sin(kh_2 p_2) + F_2 \cos(kh_2 p_2) \sin(kh_1 p_1) + F_3 \gamma \cos(kh_1 p_1) \sin(kh_2 p_2) = 0 \quad (2.59)$$

şeklindedir ve

$$F_1 = (-4k^2 \gamma p_2^2 \beta_1 + \beta_2 (4k^2 p_1^2 + \beta_1 (\beta_1 - \gamma \beta_2))),$$

$$F_2 = 2kp_2 (4k^2 p_1^2 + \beta_1^2),$$

$$F_3 = 2kp_1 (4k^2 p_2^2 + \beta_2^2)$$

olarak tanımlanmaktadır. Dikkat edilirse eğer $\beta_1 = 0$ ve $\beta_2 = 0$ seçilirse, yani ortamın homojen olduğu kabul edilirse, (2.59) dispersiyon bağıntısı homojen ortamda yayılan lineer dalgalara ait (2.29) ile verilen dispersiyon bağıntısına indirgenmektedir.

2.3.2.1 Dispersiyon Bağıntısı

Bu bölümde (2.51) koşulu altında elde edilen (2.59) dispersiyon bağıntısı boyutsuz değişkenler cinsinden yazılacaktır. Boyutsuz değişkenler aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$C = \frac{c}{c_{01}}, \quad M_0 = \frac{c_{02}}{c_{01}}, \quad H = \frac{h_2}{h_1}, \quad K = kh_1, \quad KH = kh_2, \quad (2.60)$$
$$B_1 = \beta_1 h_1, \quad B_2 = \beta_2 h_2.$$

Burada H tabakaların kalınlık oranı, M_0 lineer dalgaların yayılma hızı oranı, B_1 ve B_2 malzemelerin boyutsuz lineer heterojenlik parametreleridir.

Bu durumda

$$p_1 = \sqrt{C^2 - \frac{B_1^2}{4K^2} - 1}, \quad p_2 = \sqrt{\frac{C^2}{M_0^2} - \frac{B_2^2}{4H^2K^2} - 1}$$

ve (2.51) eşitsizliği ise

$$\sqrt{1 + \frac{B_1}{4K^2}} < M_0 \sqrt{1 + \frac{B_2}{4H^2K^2}} < C \quad (2.61)$$

olur. (2.59) dispersiyon bağıntısı ise aşağıdaki gibi yazılır;

$$F_1^* \sin(Kp_1) \sin(KHp_2) + F_2^* \cos(KHp_2) \sin(Kp_1) + F_3^* \gamma \cos(Kp_1) \sin(KHp_2) = 0 \quad (2.62)$$

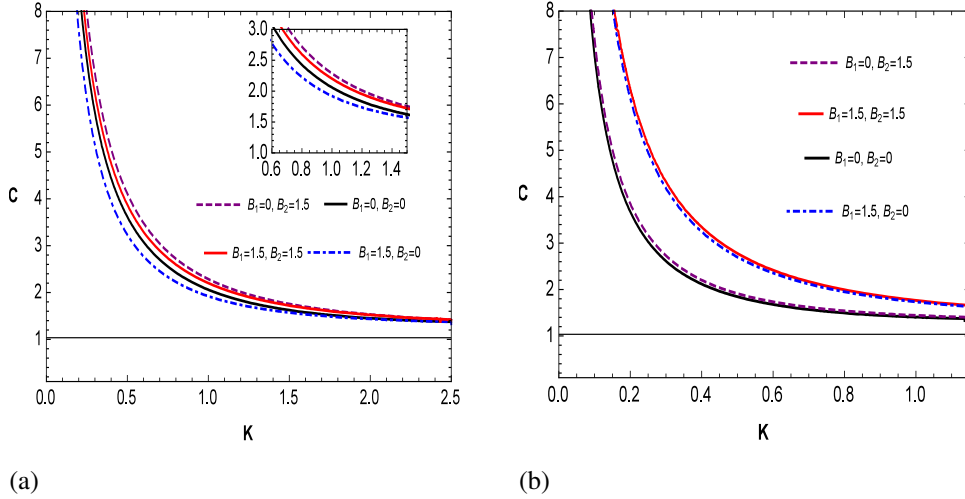
Burada

$$F_1^* = (-4K^2 \gamma p_2^2 B_1 + \frac{B_2}{H} (4K^2 p_1^2 + B_1 (B_1 - \gamma B_2))),$$
$$F_2^* = 2K p_2 (4K^2 p_1^2 + B_1^2),$$
$$F_3^* = 2K p_1 (4K^2 p_2^2 + \frac{B_2}{H})$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

2.3.3 Dispersiyon Bağıntılarının Grafikleri

Bu bölümde sırasıyla homojen ve heterojen ortamda yayılan lineer SH dalgaları için elde ettiğimiz boyutsuz dispersiyon bağıntılarını (2.32) ve (2.62) sayısal olarak incelenerek, tabakaların kalınlık oranının, H , tabakaları oluşturan malzemelerin lineer heterojenlik özelliklerinin, B_1 ve B_2 , dalgaların yayılımı üzerindeki etkileri gözlemlenecektir. Dikkat edilirse lineer heterojenlik parametreleri $B_1 = 0$ ($\beta_1 = 0$) ve $B_2 = 0$ ($\beta_2 = 0$) kabul edilirse (2.62) dispersiyon bağıntısı, homojen ortamda lineer dalgalar için elde ettiğimiz dispersiyon bağıntısı (2.32)' ye indirgenmektedir.



Şekil 2.2 : Dört farklı durumda (a) $H = 1$ için (b) $H = 5$ için, boyutsuz faz hızı C 'nin boyutsuz dalga sayısı K 'ya göre değişimi

Bu çalışmada dalgaların faz hızının (2.61) koşulunu sağladığı kabulü altında analiz yürütülmektedir. (2.62) dispersiyon bağıntısı ile verilen eğriler, KC -düzleminde

$$C > M_0 \sqrt{1 + \frac{B_2^2}{4H^2 K^2}} \quad (2.63)$$

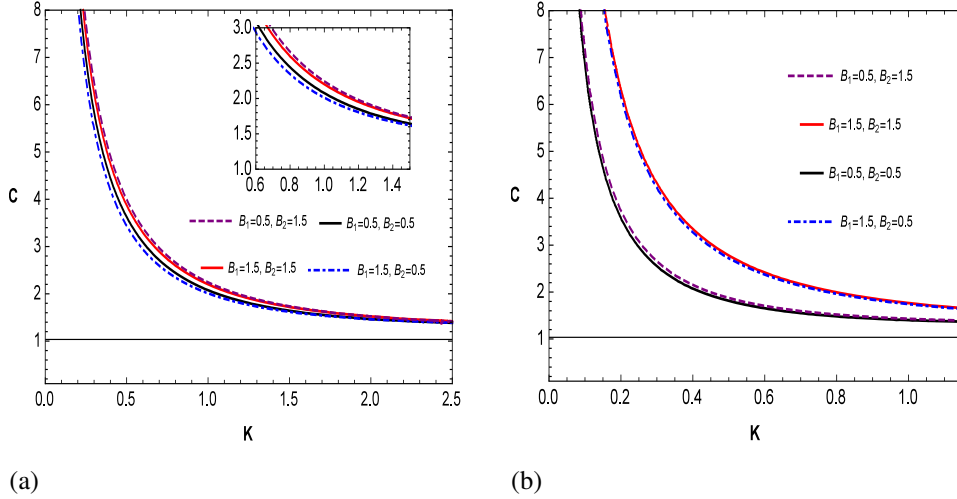
bölgesinde olacaktır. Lineer özellikleri temsil eden parametreler

$$M_0 = 1.297, \quad \text{ve} \quad \gamma = 2.159 \quad (2.64)$$

olarak alınmıştır [1, 19]. Ayrıca tabakaların kalınlık oranı için de $H = 1$ ve $H = 5$ kabulü yapılmaktadır. Dikkat edilirse lineer heterojenlik parametresinin ve tabakaların kalınlık oranı H 'nin değişimine bağlı olarak (2.63) ile tanımlanan bölgede dispersiyon bağıntısının ilk dalının var olacağı K aralığı değişecektir. Bu çalışmada (2.63) bölgesindeki dispersiyon bağıntısının ilk dalı $H = 1$ için grafikler $0 < K < 2.5$ aralığında, $H = 5$ için ise $0 < K < 1.15$ aralığında verilmektedir. Tabakaların heterojenliğinin dispersiyon bağıntısı üzerindeki etkisini gözlemlemek için sırasıyla

- i Homojen üst tabaka- Homojen alt tabaka, $(B_1, B_2) = (0, 0)$
- ii Homojen üst tabaka-Heterojen alt tabaka, $(B_1, B_2) = (0, B_2)$
- iii Heterojen üst tabaka-Homojen alt tabaka, $(B_1, B_2) = (B_1, 0)$
- iv Heterojen üst tabaka-Heterojen alt tabaka, $(B_1, B_2) \neq (0, 0)$

durumları incelemeye dahil edilmiştir. Bu dört farklı durum için dispersiyon bağıntısının (2.63) bölgesindeki ilk dalının grafikleri $H = 1$ için Şekil 2.2a'da,



Şekil 2.3 : İki tabakalı ortamda (a) $H = 1$ için (b) $H = 5$ için, çeşitli lineer heterojenlik parametreleri için boyutsuz faz hızı C 'nin boyutsuz dalga sayısı K 'ya göre değişimi

$H = 5$ için ise Şekil 2.2b'de verilmektedir. Bu şekiller karşılaştırıldığında tabaka kalınlık oranının değişiminin dispersiyon bağıntısı üzerinde etkili olduğu açık olarak görülmektedir. Ek olarak $H = 5$ olması durumunda üst tabakanın lineer heterojenlik parametresinin etkisinin faz hızı üzerinde daha baskın olduğu görülmektedir. Ayrıca tabakalara ait çeşitli lineer heterojenlik parametreleri $(B_1, B_2) = (0.5, 1.5)$, $(0.5, 0.5)$, $(1.5, 1.5)$ ve $(1.5, 0.5)$ şeklinde seçilerek (K, C) eğrisinin değişimi Şekil 2.3'te verilmiştir. Dikkat edilirse $H = 1$ için çizdirilen grafikte alt tabakanın heterojenliğinin daha baskın olduğu; $H = 5$ için çizdirilen grafikte ise üst tabakanın heterojenliğinin daha baskın olduğu görülmektedir. Benzer inceleme dispersiyon bağıntılarının diğer dalları için de yapılarak benzer davranış gözlemlenebilir.

3. İKİ TABAKALI HİPERELASTİK HETEROJEN ORTAMDA NONLİNEER YATAY KAYMA (SH) DALGALARININ MODÜLASYONU

3.1 Giriş

Hiperelastik malzemelerden oluşan düzgün kalınlıklı iki tabakalı heterojen elastik bir ortamda nonlinear yatay kayma (SH) dalgalarının yayılımını karakterize eden hareket denklemleri (2.4)-(2.5) ve bu harekete eşlik eden sınır koşulları (2.6)-(2.9) ile Bölüm 2.2’de verilmiştir. Bölüm 2.3.1 ve 2.3.2’ de ise sırasıyla homojen ve heterojen bir ortamda lineer SH dalgalarının yayılması incelenerek SH dalgalarına ait dispersiyon bağıntıları elde edilmiştir ve elde edilen dispersiyon bağıntılarının grafikleri çizdirilmiştir. Öncelikli olarak Bölüm 3.2’de bir asimptotik pertürbasyon yöntemi olan çoklu ölçekler metodu kullanılarak düzgün kalınlıklı iki tabakadan oluşan hiperelastik heterojen ortamda nonlinear yatay kayma (SH) dalgalarının yayılımı problemi incelenecektir. Küçük ama sonlu genlikli SH dalgaların self modülasyonunun bir NLS denklemi ile karakterize edildiği gösterilecektir. Bölüm 3.3’te, birinci mertebe problemin genlik fonksiyonu için elde edilen NLS denkleminin çözümlerinin incelemesi yapılacaktır. Bu incelemede dalgaların faz hızının aşağıdaki eşitsizliği gerçekleştiği kabul edilmektedir;

$$c_{01} \sqrt{1 + \beta_1^2/4k^2} < c_{02} \sqrt{1 + \beta_2^2/4k^2} < c \quad (3.1)$$

3.2 Nonlinear Yatay Kayma (SH) Dalgalarının Modülasyonu

Nonlinear SH dalgalarının self modülasyonunu incelemek için asimptotik bir pertürbasyon yöntemi olan çoklu ölçekler yöntemi kullanılacaktır, [11]. Bu amaçla X, Y ve t bağımsız değişkenleri yerine

$$x_i = \varepsilon^i X, \quad t_i = \varepsilon^i t, \quad y = Y, \quad i = 0, 1, 2 \quad (3.2)$$

bağıntıları ile yeni bağımsız değişkenler tanımlanarak yer değiştirme fonksiyonları u ve v ’ nin bu yeni değişkenlerin fonksiyonları olduğu kabul edilmektedir. Burada $\varepsilon > 0$ parametresi nonlinearliğin mertebesini ölçen küçük bir parametredir. (x_0, y, t_0) yayılmada hızlı değişimleri karakterize eden değişkenler ve (x_1, x_2, t_1, t_2) ise yavaş

değişimleri karakterize eden değişkenlerdir. Ayrıca u ve v ' nin, ε cinsinden uniform olarak geçerli asimptotik açılıma sahip oldukları varsayılmaktadır, [11]:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n(x_0, x_1, x_2, y, t_0, t_1, t_2), \\ v &= \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n v_n(x_0, x_1, x_2, y, t_0, t_1, t_2). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Bu durumda eski ve yeni değişkenlere göre türev operatörleri arasında aşağıdaki bağıntılar geçerlidir:

$$\frac{\partial}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial x_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2}, \quad \frac{\partial}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial y}. \quad (3.4)$$

(2.4) ve (2.5) ile verilen hareket denklemlerine ve (2.6)-(2.9) ile verilen sınır koşullarına (3.4) türev dönüşümü uygulanır ve (3.3)' te verilen asimptotik açılım kullanılırsa ε 'nun aynı kuvvetleri karşılıklı olarak eşitlenerek u_n ve v_n bilinmeyen fonksiyonların ardışık olarak hesaplanabilecekleri bir problemler hiyerarşisi inşa edilmiş olur. Bu çalışmada, küçük ama sonlu genlikli dalga yayılımının incelenmesi amaçlandığından ε mertebesi problemin çözümü olan u_1 ve v_1 fonksiyonlarının tam olarak belirlenmesi yeterli olacaktır. Bu amaçla pertürbasyon problemlerinden ilk üçü incelemeye dahil edilmiştir. Bu ilk üç mertebeye problem aşağıda verilmektedir:

$\mathcal{O}(\varepsilon)$:

$$P_1 \text{ 'de } \mathcal{L}_0^{(1)} u_1 = 0, \quad (3.5)$$

$$P_2 \text{ 'de } \mathcal{L}_0^{(2)} v_1 = 0. \quad (3.6)$$

$$y = h_1; \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0, \quad (3.7)$$

$$y = 0; \quad u_1 - v_1 = 0, \quad (3.8)$$

$$y = 0; \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} - \gamma \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0, \quad (3.9)$$

$$y = -h_2; \quad \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0. \quad (3.10)$$

$\mathcal{O}(\varepsilon^2)$:

$$P_1 \text{ 'de } \mathcal{L}_0^{(1)} u_2 = \mathcal{L}_1^{(1)} u_1, \quad (3.11)$$

$$P_2 \text{ 'de } \mathcal{L}_0^{(2)} v_2 = \mathcal{L}_1^{(2)} v_1. \quad (3.12)$$

$$y = h_1; \quad \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0. \quad (3.13)$$

$$y = 0; \quad u_2 - v_2 = 0. \quad (3.14)$$

$$y = 0; \quad \frac{\partial u_2}{\partial y} - \gamma \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0. \quad (3.15)$$

$$y = -h_2; \quad \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0. \quad (3.16)$$

$\mathcal{O}(\varepsilon^3)$:

$$P_1 \text{ 'de } \mathcal{L}_0^{(1)} u_3 = \mathcal{L}_1^{(1)} u_2 + \mathcal{L}_2^{(1)} u_1 + \mathcal{N}(u_1), \quad (3.17)$$

$$P_2 \text{ 'de } \mathcal{L}_0^{(2)} v_3 = \mathcal{L}_1^{(2)} v_2 + \mathcal{L}_2^{(2)} v_1 + \mathcal{N}(v_1). \quad (3.18)$$

$$y = h_1; \quad \frac{\partial u_3}{\partial y} + \theta_1 Q(u_1) \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0, \quad (3.19)$$

$$y = 0; \quad u_3 - v_3 = 0, \quad (3.20)$$

$$y = 0; \quad \frac{\partial u_3}{\partial y} - \gamma \frac{\partial v_3}{\partial y} = \gamma \theta_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} Q(v_1) - \theta_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} Q(u_1), \quad (3.21)$$

$$y = -h_2; \quad \frac{\partial v_3}{\partial y} + \theta_2 Q(v_1) \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0. \quad (3.22)$$

Burada, $m = 1, 2$ olmak üzere lineer operatörler $\mathcal{L}_0^{(m)}$, $\mathcal{L}_1^{(m)}$, $\mathcal{L}_2^{(m)}$ ve nonlinear operatörler \mathcal{N} ve Q aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\mathcal{L}_0^{(m)}(\psi) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t_0^2} - c_m^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\mu'_m}{\rho_m} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right), \quad (3.23)$$

$$\mathcal{L}_1^{(m)}(\psi) = 2(c_m^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_0 \partial x_1} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t_0 \partial t_1}), \quad (3.24)$$

$$\mathcal{L}_2^{(m)}(\psi) = c_m^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_0 \partial x_2} \right) - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t_0 \partial t_2}, \quad (3.25)$$

$$\mathcal{N}(\psi) = \frac{1}{\rho_m} \left[\frac{\partial}{\partial x_0} \left(\rho_m n_m Q(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x_0} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho_m n_m Q(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right], \quad (3.26)$$

$$Q(\psi) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2. \quad (3.27)$$

Bu bölümde heterojen ortamda lineer olmayan dalga yayılımı ile ilgilenildiği için ortamın malzeme özelliklerini veren parametrelerin derinlik değişkeni olan y 'nin fonksiyonları oldukları kabul edilmiştir, yani $c_m = c_m(y)$, $\mu_m = \mu_m(y)$, $\rho_m = \rho_m(y)$, $n_m = n_m(y)$, $m = 1, 2$ olarak tanımlanmıştır. Bu malzeme parametrelerinin y 'ye bağımlılığını [22, 25]' te olduğu gibi üstel formda oldukları kabulü altında analiz yürütülmektedir. Böylece denklemler ve sınır koşullarında y değişkenine bağımlılık açık olarak belirlenmiş olur;

$$\mu_m = \mu_{0m} e^{\beta_m y}, \quad \rho_m = \rho_{0m} e^{\beta_m y}, \quad n_m = n_{0m} e^{\lambda_m y} \quad m = 1, 2 \quad (3.28)$$

Bu seçim ile birlikte tabakaların lineer hızları ve nonlinear malzeme özelliğini gösteren θ_m

$$c_m = c_{0m} = \sqrt{\frac{\mu_{0m}}{\rho_{0m}}}, \quad \theta_m = \theta_{0m} e^{\lambda_m y}, \quad \theta_{0m} = \frac{n_{0m}}{c_{0m}^2}, \quad m = 1, 2 \quad (3.29)$$

formuna indirgenir. Burada dikkat edilirse (3.5)-(3.6) denklemleri ile verilen birinci mertebe problem Bölüm 2'de (2.34)-(2.35) denklemleri ile verilen lineer problem ile eş yapıdadır. Sadece lineer problemdeki yer değiştirme fonksiyonları (X, Y, t) değişkenlerine bağlı iken birinci mertebe pertürbasyon probleminde yer değiştirme fonksiyonları $(x_0, x_1, x_2, y, t_0, t_1, t_2)$ değişkenlerine bağlıdır. Bu çalışmada dalgaların faz hızı c 'nin

$$c_{01} \sqrt{1 + \beta_1^2 / 4k^2} < c_{02} \sqrt{1 + \beta_2^2 / 4k^2} < c$$

eşitsizliğinin sağlandığı durum için analiz yapılacaktır. Bu durumda (3.5)-(3.6) denklemlerine değişkenlerine ayırma yöntemi uygulanarak birinci mertebe problemin çözümleri aşağıdaki formda alınır:

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{\mu_{01} e^{\beta_1 y}}} \sum_{l=1}^{\infty} [A_1^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{ilkr_1 y} + B_1^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{-ilkr_1 y}] e^{il\phi} + c.c. \quad (3.30)$$

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{\mu_{02} e^{\beta_2 y}}} \sum_{l=1}^{\infty} [C_1^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{ilkr_2 y} + D_1^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{-ilkr_2 y}] e^{il\phi} + c.c. \quad (3.31)$$

Burada,

$$r_1 = \left(\frac{c^2}{c_{01}^2} - \frac{\beta_1^2}{4k^2 l^2} - 1 \right)^{1/2}, \quad r_2 = \left(\frac{c^2}{c_{02}^2} - \frac{\beta_2^2}{4k^2 l^2} - 1 \right)^{1/2}, \quad \phi = kx_0 - \omega t_0 \quad (3.32)$$

olarak tanımlanmaktadır. Dikkat edilirse $l = 1$ olması durumunda r_1, r_2 (2.54)'de verilen sırasıyla p_1 ve p_2 ile aynı olmaktadır. Ayrıca $A_1^{(l)}, B_1^{(l)}, C_1^{(l)}, D_1^{(l)}, (x_1, x_2, t_1, t_2)$ yavaş değişkenlerine bağlı birinci mertebe dalga genliği fonksiyonlarıdır ve problemin sınır koşulları kullanılarak belirlenirler. l pozitif bir tam sayıyı, k dalga sayısını, ω açısal frekansı, $c = \omega/k$ faz hızını, $c.c.$ kendinden önce gelen terimlerin kompleks eşleniğini göstermektedir. (3.30)-(3.31) çözümleri (3.7)-(3.10) sınır koşullarında kullanıldığında

$$\mathbf{W}_l \mathbf{U}_1^{(l)} = \mathbf{0} \quad l = 1, 2, 3, \dots \quad (3.33)$$

homojen cebrik denklem sistemi elde edilir. Burada \mathbf{W}_l dispersiyon matrisi olarak adlandırılmaktadır ve açık ifadesi aşağıda verilmektedir;

$$\mathbf{W}_l = \begin{pmatrix} \frac{ie^{iklr_1 h_1} (2kr_1 l + i\beta_1)}{2\sqrt{\mu_{01}} e^{\beta_1 h_1}} & \frac{e^{-iklr_1 h_1} (-2iklr_1 - \beta_1)}{2\sqrt{\mu_{01}} e^{\beta_1 h_1}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\mu_{01}}} & \frac{1}{\sqrt{\mu_{01}}} & -\frac{1}{\sqrt{\mu_{02}}} & -\frac{1}{\sqrt{\mu_{02}}} \\ \frac{iklr_1 - \frac{\beta_1}{2}}{\sqrt{\mu_{01}}} & \frac{-iklr_1 - \frac{\beta_1}{2}}{\sqrt{\mu_{01}}} & \frac{\gamma(-iklr_2 - \frac{\beta_2}{2})}{\sqrt{\mu_{02}}} & \frac{\gamma(iklr_2 + \frac{\beta_2}{2})}{\sqrt{\mu_{02}}} \\ 0 & 0 & \frac{e^{-iklh_2 r_2} (iklr_2 - \frac{\beta_2}{2})}{\sqrt{\mu_{02}} e^{-\beta_2 h_2}} & -\frac{e^{iklh_2 r_2} (iklr_2 + \frac{\beta_2}{2})}{\sqrt{\mu_{02}} e^{-\beta_2 h_2}} \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

Birinci merteye genlik vektörü

$$\mathbf{U}_1^{(l)} = [A_1^{(l)}, B_1^{(l)}, C_1^{(l)}, D_1^{(l)}]^T \quad (3.35)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Dikkat edilirse $l = 1$ için (3.34) ile tanımlanan \mathbf{W}_l matrisi (2.56) matrisi ile özdeştir. (3.33)' de verilen sistemin $l = 1$ için çözümünün olması için

$$\det \mathbf{W}_l = 0$$

olması gerekir ve bu koşul (2.59) ile verilen dispersiyon bağıntısıyla aynı yapıdaki dispersiyon bağıntısını verir:

$$F_1 \sin(kh_1 p_1) \sin(kh_2 p_2) + F_2 \cos(kh_2 p_2) \sin(kh_1 p_1) + F_3 \gamma \cos(kh_1 p_1) \sin(kh_2 p_2) = 0. \quad (3.36)$$

Burada

$$F_1 = (-4k^2 \gamma p_2^2 \beta_1 + \beta_2 (4k^2 p_1^2 + \beta_1 (\beta_1 - \gamma \beta_2))),$$

$$F_2 = 2kp_2 (4k^2 p_1^2 + \beta_1^2),$$

$$F_3 = 2kp_1 (4k^2 p_2^2 + \beta_2^2).$$

Bu çalışmada bir k dalga sayısı civarında merkezlenmiş bir dalga katarının nonlineer self modülasyonu incelendiği için yayılan dalgaların dalga sayılarının harmonik rezonans koşulunu sağlamadıkları kabul edilmektedir;

$$l \geq 2 \quad \text{için} \quad \det \mathbf{W}_l \neq 0. \quad (3.37)$$

Böylece (3.33) denkleminin çözümleri, \mathbf{R}

$$\mathbf{W}_l \mathbf{R} = \mathbf{0} \quad (3.38)$$

denklemini sağlayan bir sütun vektörü olmak üzere,

$$l = 1 \quad \text{için} \quad \mathbf{U}_1^{(1)} = \mathcal{A}_1(x_1, x_2, t_1, t_2) \mathbf{R} \quad (3.39)$$

ve

$$l \geq 2 \quad \text{için} \quad \mathbf{U}_1^{(l)} = \mathbf{0} \quad (3.40)$$

olarak elde edilir. Burada \mathcal{A}_1 dalga modülasyonunun yavaş değişkenlere bağlı birinci merteye kompleks genlik fonksiyonudur. (3.38) denklem sisteminin bir çözümü olarak

$\mathbf{R} = [R_1, R_2, R_3, R_4]^T$ vektörünün bileşenleri aşağıdaki şekilde bulunur:

$$R_1 = \frac{e^{-ik(p_1 h_1 - h_2 p_2)} (2kp_1 - i\beta_1) (2k \cos(kp_2 h_2) p_2 + \sin(kp_2 h_2) \beta_2) Z}{(2k \cos(kp_1 h_1) p_1 - \sin(kp_1 h_1) \beta_1) (2kp_2 + i\beta_2) \sqrt{\mu_{0_2}}}$$

$$R_2 = \frac{e^{ikp_1 h_1} (2kp_1 + i\beta_1) (2kp_2 + e^{2ikp_2 h_2} (2kp_2 - i\beta_2) + i\beta_2) Z}{2(2k \cos(kp_1 h_1) p_1 - \sin(kp_1 h_1) \beta_1) (2kp_2 + i\beta_2) \sqrt{\mu_{0_2}}}$$

$$R_3 = \frac{e^{2ikp_2 h_2} (2kp_2 - i\beta_2)}{2kp_2 + i\beta_2}$$

$$R_4 = 1$$

Burada,

$$p_1 = \left(\frac{c^2}{c_{0_1}^2} - \frac{\beta_1^2}{4k^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad p_2 = \left(\frac{c^2}{c_{0_2}^2} - \frac{\beta_2^2}{4k^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}$$

ve

$$Z = \sqrt{\frac{(-2k \cot(kp_1 h_1) p_1 + \beta_1) (4k^2 p_2^2 + \beta_2^2) \mu_{0_2}}{(4k^2 p_1^2 + \beta_1^2) (2k \cot(kp_2 h_2) p_2 + \beta_2)}}$$

şeklinde dir. (3.30)-(3.31) birinci merteye çözümleri aşağıdaki gibi olur;

$$u_1 = \frac{\mathcal{A}_1(x_1, x_2, t_1, t_2)}{\sqrt{\mu_{0_1} e^{\beta_1 y}}} (R_1 e^{ikp_1 y} + R_2 e^{-ikp_1 y}) e^{i\phi} + c.c. \quad (3.41)$$

$$v_1 = \frac{\mathcal{A}_1(x_1, x_2, t_1, t_2)}{\sqrt{\mu_{0_2} e^{\beta_2 y}}} (R_3 e^{ikp_2 y} + R_4 e^{-ikp_2 y}) e^{i\phi} + c.c.$$

Burada genlik fonksiyonu $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_1(x_1, x_2, t_1, t_2)$ hesaplanırsa birinci merteye çözümler tam olarak belirlenmiş olur. Bunun için ikinci ve üçüncü merteye

problemlerin çözümlerinin araştırılması gerekecektir. Analize (3.11)-(3.12) hareket denklemleri ve (3.13)-(3.16) sınır koşullarıyla verilen ikinci mertbe problem ile devam edelim. (3.41)'deki çözümleri (3.11)-(3.12) denklemlerinde kullanılırsa

$$\mathcal{L}_0^{(1)} u_2 = \frac{1}{\sqrt{\mu_{0_1} e^{\beta_{1y}}}} 2i \mathcal{M}_{11}^{(1)} (R_1 e^{ikp_1 y} + R_2 e^{-ikp_1 y}) e^{i\phi} + c.c. \quad (3.42)$$

$$\mathcal{L}_0^{(2)} v_2 = \frac{1}{\sqrt{\mu_{0_2} e^{\beta_{2y}}}} 2i \mathcal{M}_{11}^{(2)} (R_3 e^{ikp_2 y} + R_4 e^{-ikp_2 y}) e^{i\phi} + c.c. \quad (3.43)$$

denklemleri elde edilir.

$$m = 1, 2 \quad \text{için} \quad \mathcal{M}_{11}^{(m)} = \omega \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_1} + kc_m^2 \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1} \quad (3.44)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Şimdi de (3.42)-(3.43) homojen olmayan denklemleri ve (3.13)-(3.16) ile verilen sınır koşulları ile tanımlanan sınır değer probleminin genel çözümünü bulalım. Bunun için önce problemin çözümlerini

$$u_2 = \bar{u}_2(x_0, x_1, x_2, y, t_0, t_1, t_2) + \tilde{u}_2(x_0, x_1, x_2, y, t_0, t_1, t_2), \quad (3.45)$$

$$v_2 = \bar{v}_2(x_0, x_1, x_2, y, t_0, t_1, t_2) + \tilde{v}_2(x_0, x_1, x_2, y, t_0, t_1, t_2) \quad (3.46)$$

formunda iki parçaya ayıralım. \bar{u}_2 ve \bar{v}_2 homojen olmayan denklemlerin özel çözümleri; \tilde{u}_2 ve \tilde{v}_2 ise

$$\mathcal{L}_0^{(1)}(\tilde{u}_2) = 0, \quad (3.47)$$

$$\mathcal{L}_0^{(2)}(\tilde{v}_2) = 0 \quad (3.48)$$

homojen denklemlerini ve aşağıda verilen homojen olmayan sınır koşullarını sağlayan çözümler olsunlar:

$$y = h_1; \quad \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial y}, \quad (3.49)$$

$$y = 0; \quad \tilde{u}_2 - \tilde{v}_2 = -(\bar{u}_2 - \bar{v}_2), \quad (3.50)$$

$$y = 0; \quad \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial y} - \gamma \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial y} = -\left(\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial y} - \gamma \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial y}\right), \quad (3.51)$$

$$y = -h_2; \quad \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{v}_2}{\partial y}. \quad (3.52)$$

(3.42)-(3.43) denklemlerinin özel çözümleri denklemlerin sağ yanlarındaki fonksiyonlarının yapılarını dikkate alınarak

$$\bar{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{e^{\beta_{1y}}}} (\mathcal{C}_1 e^{ikp_1 y} + \mathcal{C}_2 e^{-ikp_1 y}) y e^{i\phi} + c.c., \quad (3.53)$$

$$\bar{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{e^{\beta_2 y}}} (\mathcal{C}_3 e^{ikp_2 y} + \mathcal{C}_4 e^{-ikp_1 y}) y e^{i\phi} + c.c. \quad (3.54)$$

formlarında seçilebilirler. Bu çözüm formları (3.42)-(3.43) denklemlerinde yerleştirilir ve belirsiz katsayılar metodunun kuralları uygulanırsa yapılan ara işlemlerden sonra

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= -\frac{\mathcal{M}_{11}^{(1)} R_1}{kp_1 c_1^2 \sqrt{\mu_{01}}}, & \mathcal{C}_2 &= \frac{\mathcal{M}_{11}^{(1)} R_2}{kp_1 c_1^2 \sqrt{\mu_{01}}}, \\ \mathcal{C}_3 &= -\frac{\mathcal{M}_{11}^{(2)} R_3}{kp_2 c_2^2 \sqrt{\mu_{02}}}, & \mathcal{C}_4 &= \frac{\mathcal{M}_{11}^{(2)} R_4}{kp_2 c_2^2 \sqrt{\mu_{02}}} \end{aligned} \quad (3.55)$$

katsayıları elde edilir. Diğer taraftan, (3.47)-(3.48) homojen denklemlerin çözümleri de aşağıdaki formda elde edilirler:

$$\tilde{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{\mu_{01} e^{\beta_1 y}}} \sum_{l=1}^{\infty} [A_2^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{ilkr_1 y} + B_2^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{-ilkr_1 y}] e^{il\phi} + c.c. \quad (3.56)$$

$$\tilde{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{\mu_{02} e^{\beta_2 y}}} \sum_{l=1}^{\infty} [C_2^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{ilkr_2 y} + D_2^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{-ilkr_2 y}] e^{il\phi} + c.c. \quad (3.57)$$

Burada $A_2^{(l)}, B_2^{(l)}, C_2^{(l)}$ ve $D_2^{(l)}$, (x_1, x_2, t_1, t_2) yavaş değişkenlerine bağlı dalga genliği fonksiyonlarıdır ve (3.49)-(3.52) sınır koşullarında kullanılarak hesaplanırlar. Birinci mertebe problemin çözümünde olduğu gibi $\mathbf{U}_2^{(l)} = [A_2^{(l)}, B_2^{(l)}, C_2^{(l)}, D_2^{(l)}]^T$ vektörü tanımlanarak (3.56)-(3.57)'de verilen çözümler (3.49)-(3.52) sınır koşullarında kullanılırsa $\mathbf{U}_2^{(l)}$, ler için aşağıdaki homojen olmayan cebirsel denklem sistemi elde edilir:

$$\mathbf{W}_l \mathbf{U}_2^{(l)} = \mathbf{b}_2^{(l)}. \quad (3.58)$$

Burada $\mathbf{b}_2^{(l)} = (b_1^{(l)}, b_2^{(l)}, b_3^{(l)}, b_4^{(l)})^T$ sütun vektörünün, $l = 1$ için bileşenleri

$$b_{2_1}^{(1)} = \frac{e^{-ikp_1 h_1} (\mathcal{C}_1 e^{2ikp_1 h_1} (-2 + h_1 (-2ikp_1 + \beta_1)) + \mathcal{C}_2 (-2 + h_1 (2ikp_1 + \beta_1)))}{2\sqrt{e^{h_1 \beta_1}}},$$

$$b_{2_2}^{(1)} = 0,$$

$$b_{2_3}^{(1)} = -\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2 + \frac{\mathcal{C}_3 \mu_{02}}{\mu_{01}} + \frac{\mathcal{C}_4 \mu_{02}}{\mu_{01}},$$

$$b_{2_4}^{(1)} = \frac{e^{-ikp_2 h_2} (\mathcal{C}_3 (-2 + 2ikp_2 h_2 - \beta_2 h_2) - i\mathcal{C}_4 e^{2ikp_2 h_2} (-2i + 2kp_2 h_2 - i\beta_2 h_2))}{2\sqrt{e^{-\beta_2 h_2}}}.$$

(3.59)

olarak bulunur. $l \geq 2$ için

$$\mathbf{b}_2^{(l)} = \mathbf{0} \quad (3.60)$$

şeklinde elde edilir. \mathbf{W}_1 matrisinin ve \mathbf{R} vektörünün tanımları kullanılarak

$$\mathbf{b}_2^{(1)} = -i \left(\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_1} \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega} - \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1} \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k} \right) \mathbf{R} \quad (3.61)$$

olarak yazılabilir. $\det \mathbf{W}_1 = 0$ ve $\mathbf{b}_2^{(1)} \neq 0$ olduğu için (3.58) denklem sisteminin $l = 1$ için sıfır çözümünden farklı çözüme sahip olabilmesi için $\mathbf{L} = [L_1, L_2, L_3, L_4]$

$$\mathbf{L} \mathbf{W}_1 = \mathbf{0} \quad (3.62)$$

ile tanımlanan bir satır vektörü olmak üzere

$$\mathbf{L} \mathbf{b}_2^{(1)} = 0 \quad (3.63)$$

uygunluk koşulunun sağlanması gerekir. \mathbf{L} vektörünün bileşenleri aşağıdaki gibi alınabilir;

$$L_1 = - \frac{2kp_1 L_3 \sqrt{e^{\beta_1 h_1} \mu_{01}}}{(2kp_1 \cos(kp_1 h_1) - \beta_1 \sin(kp_1 h_1)) \sqrt{\mu_{01}}},$$

$$L_2 = \frac{L_3 (4k^2 p_1^2 + \beta_1^2) \sin(kp_1 h_1)}{-4kp_1 \cos(kp_1 h_1) + 2\beta_1 \sin(kp_1 h_1)}, \quad (3.64)$$

$$L_3 = 1,$$

$$L_4 = - \frac{2kp_2 L_3 (4k^2 p_1^2 + \beta_1^2) \csc(kp_2 h_2) \sin(kp_1 h_1) \sqrt{e^{-\beta_2 h_2} \mu_{02}}}{(4k^2 p_2^2 + \beta_2^2) (2kp_1 \cos(kp_1 h_1) - \beta_1 \sin(kp_1 h_1)) \sqrt{\mu_{02}}}.$$

(3.38)' de verilen bağıntı, $\mathbf{W}_l \mathbf{R} = 0$, k ' ya göre türetilirse

$$\left(\frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k} + V_g \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega} \right) \mathbf{R} + \mathbf{W}_1 \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial k} + V_g \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \omega} \right) = 0 \quad (3.65)$$

denklemini elde edilir. Burada V_g grup hızı olup

$$V_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (3.66)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. (3.65) soldan \mathbf{L} satır vektörü ile çarpılıp (3.62) dikkate alınırsa

$$V_g = -(\mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k} \mathbf{R}) / (\mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega} \mathbf{R}) \quad (3.67)$$

bulunur. (3.67) dikkate alınarak, (3.61) denklemi kullanılırsa (3.63) uygunluk koşulundan \mathcal{A}_1 fonksiyonunun

$$\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_1} + V_g \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1} = 0 \quad (3.68)$$

denklemini sağlaması gerektiği görülür. Bu sonuç \mathcal{A}_1 genlik fonksiyonunun V_g grup hızı ile ilerleyen bir referans çerçevesinde sabit kaldığını gösterir, yani \mathcal{A}_1 fonksiyonu

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_1(x_1 - V_g t_1, x_2, t_2) \quad (3.69)$$

yapısında olacaktır. (3.65) ve (3.68) bağıntıları dikkate alınarak (3.58) denklem sisteminin $l = 1$ için çözümü

$$\mathbf{U}_2^{(1)} = \mathcal{A}_2(x_1, x_2, t_1, t_1) \mathbf{R} - i \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial k} + V_g \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \omega} \right) \quad (3.70)$$

olarak elde edilir [16, 19]. Burada \mathcal{A}_2 fonksiyonu yavaş değişen ikinci merteye genliği temsil etmektedir. Bu çalışmada sadece birinci merteye çözüm inşa edileceği için \mathcal{A}_2 fonksiyonunun açık yapısına ihtiyaç olmayacaktır. \mathcal{A}_1 genlik fonksiyonunu belirlemek yeterli olacaktır. $l \neq 1$ için $\det \mathbf{W} \neq 0$ kabul edildiğinden ve $l \neq 1$ için $\mathbf{b}_2^{(1)} = 0$ olduğundan (3.58) denklem sisteminin çözümü $l \geq 2$ için

$$\mathbf{U}_2^{(l)} = \mathbf{0} \quad (3.71)$$

olarak bulunur. Birinci ve ikinci merteye problemlerin çözümü elde edilmesine rağmen \mathcal{A}_1 genlik fonksiyonunun yapısı tam olarak belirlenememiştir. Bu fonksiyonu belirlemek için üçüncü merteye problemin çözümünün incelenmesi gerekmektedir. Birinci ve ikinci merteye probleme ait çözümler (3.17)-(3.18) denklemlerinde kullanılıp gerekli olan ara işlemler ve düzenlemeler yapılırsa aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0^{(1)} u_3 &= ((\mathcal{D}_1 + y \mathcal{D}_2) e^{(ikp_1 - \frac{\beta_1}{2})y} + \mathcal{D}_3 e^{(ikp_1 - \frac{3}{2}\beta_1 + \lambda_1)y} + (\mathcal{D}_4 + y \mathcal{D}_5) e^{(-ikp_1 - \frac{\beta_1}{2})y} \\ &+ \mathcal{D}_6 e^{(-ikp_1 - \frac{3}{2}\beta_1 + \lambda_1)y} + \mathcal{D}_7 e^{(3ikp_1 - \frac{3}{2}\beta_1 + \lambda_1)y} \\ &+ \mathcal{D}_8 e^{(-3ikp_1 - \frac{3}{2}\beta_1 + \lambda_1)y} + c.c. + (e^{\pm 3i\phi'} \text{li terimler}) \\ \mathcal{L}_0^{(2)} v_3 &= ((\mathcal{E}_1 + y \mathcal{E}_2) e^{(ikp_2 - \frac{\beta_2}{2})y} + \mathcal{E}_3 e^{(ikp_2 - \frac{3}{2}\beta_2 + \lambda_2)y} + (\mathcal{E}_4 + y \mathcal{E}_5) e^{(-ikp_2 - \frac{\beta_2}{2})y} \\ &+ \mathcal{E}_6 e^{(-ikp_2 - \frac{3}{2}\beta_2 + \lambda_2)y} + \mathcal{E}_7 e^{(3ikp_2 - \frac{3}{2}\beta_2 + \lambda_2)y} \\ &+ \mathcal{E}_8 e^{(-3ikp_2 - \frac{3}{2}\beta_2 + \lambda_2)y} + c.c. + (e^{\pm 3i\phi'} \text{li terimler}) \end{aligned} \quad (3.72)$$

Buradaki \mathcal{D}_j ve \mathcal{E}_j katsayılarının açık ifadeleri Ek B’de verilmektedir. Üçüncü mertebe problemde yer alan denklemler de ikinci mertebe problem gibi homojen olmayan denklemlerdir. Dolayısıyla, üçüncü mertebe çözümleri de

$$u_3 = \bar{u}_3(x_0, x_1, x_2, y, t_0, t_1, t_2) + \tilde{u}_3(x_0, x_1, x_2, y, t_0, t_1, t_2) \quad (3.73)$$

$$v_3 = \bar{v}_3(x_0, x_1, x_2, y, t_0, t_1, t_2) + \tilde{v}_3(x_0, x_1, x_2, y, t_0, t_1, t_2) \quad (3.74)$$

formunda iki parçaya ayırılım öyle ki \bar{u}_3 ve \bar{v}_3 (3.72) homojen olmayan denklemlerin özel çözümleri; \tilde{u}_3 ve \tilde{v}_3 ise

$$\mathcal{L}_0^{(1)}(\tilde{u}_3) = 0, \quad (3.75)$$

$$\mathcal{L}_0^{(2)}(\tilde{v}_3) = 0 \quad (3.76)$$

homojen denklemlerini ve aşağıda verilen homojen olmayan sınır koşullarını sağlayan çözümler olsunlar:

$$y = h_1; \quad \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial y} - \theta_1 Q(u_1) \frac{\partial u_1}{\partial y}, \quad (3.77)$$

$$y = 0; \quad \tilde{u}_3 - \tilde{v}_3 = -(\bar{u}_3 - \bar{v}_3), \quad (3.78)$$

$$y = 0; \quad \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial y} - \gamma \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y} + \gamma \theta_2 Q(v_1) \frac{\partial v_1}{\partial y} - \theta_1 Q(u_1) \frac{\partial u_1}{\partial y}, \quad (3.79)$$

$$y = -h_2; \quad \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y} - \theta_2 Q(v_1) \frac{\partial v_1}{\partial y}. \quad (3.80)$$

Üçüncü mertebe problemin sağ tarafındaki nonlinear terimlerden dolayı hem $e^{\pm i\phi}$ hem de $e^{\pm 3i\phi}$ terimleri ortaya çıkmaktadır. Bu nedenden dolayı (3.72) denklemlerinin özel çözümleri belirsiz katsayılar yöntemi kullanılarak aşağıdaki formda seçilir:

$$\bar{u}_3 = f_3^{(1)}(x_1, x_2, y, t_1, t_2)e^{i\phi} + f_3^{(3)}(x_1, x_2, y, t_1, t_2)e^{3i\phi} + c.c. \quad (3.81)$$

$$\bar{v}_3 = g_3^{(1)}(x_1, x_2, y, t_1, t_2)e^{i\phi} + g_3^{(3)}(x_1, x_2, y, t_1, t_2)e^{3i\phi} + c.c. \quad (3.82)$$

Bu çalışmada sadece temel dalganın self modülasyonu ile ilgilenildiği için devamında $f_3^{(3)}$ ve $g_3^{(3)}$ terimlerinin açık formları gerekli olmayacaktır. Bu nedenle, sadece $f_3^{(1)}$ ve $g_3^{(1)}$,’yi hesaplamak yeterli olacaktır. Bu fonksiyonlar

$$\begin{aligned} f_3^{(1)} = & ((\mathcal{F}_1 + y\mathcal{F}_2)ye^{(ikp_1 - \frac{\beta_1}{2})y} + (\mathcal{F}_3 + y\mathcal{F}_4)ye^{(-ikp_1 - \frac{\beta_1}{2})y} \\ & + \mathcal{F}_5e^{(ikp_1 - \frac{3}{2}\beta_1 + \lambda_1)y} + \mathcal{F}_6e^{(-ikp_1 - \frac{3}{2}\beta_1 + \lambda_1)y} \\ & \mathcal{F}_7e^{(3ikp_1 - \frac{3}{2}\beta_1 + \lambda_1)y} + \mathcal{F}_8e^{(-3ikp_1 - \frac{3}{2}\beta_1 + \lambda_1)y}, \end{aligned} \quad (3.83)$$

$$\begin{aligned}
g_3^{(1)} &= ((\mathcal{G}_1 + y\mathcal{G}_2)y e^{(ikp_2 - \frac{\beta_2}{2})y} + (\mathcal{G}_3 + y\mathcal{G}_4)y e^{(-ikp_2 - \frac{\beta_2}{2})y} \\
&\quad + \mathcal{G}_5 e^{(ikp_2 - \frac{3}{2}\beta_2 + \lambda_2)y} + \mathcal{G}_6 e^{(-ikp_2 - \frac{3}{2}\beta_2 + \lambda_2)y} \\
&\quad + \mathcal{G}_7 e^{(3ikp_2 - \frac{3}{2}\beta_2 + \lambda_2)y} + \mathcal{G}_8 e^{(-3ikp_2 - \frac{3}{2}\beta_2 + \lambda_2)y}
\end{aligned} \tag{3.84}$$

formundadırlar. Bu çözümler (3.72)'de yerine yazılırsa \mathcal{F}_j ve \mathcal{G}_j , $j = 1, 2, \dots, 12$ katsayıları bulunur. \mathcal{F}_j ve \mathcal{G}_j 'lerin açık ifadeleri Ek B' de verilmektedir. Üçüncü mertebe homojen denklemlerin çözümleri ise \tilde{u}_3 ve \tilde{v}_3 aşağıdaki biçimde alınır:

$$\tilde{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{\mu_{01}} e^{\beta_{1y}}} \sum_{l=1}^{\infty} [A_3^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{ilkr_1 y} + B_3^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{-ilkr_1 y}] e^{il\phi} + c.c. \tag{3.85}$$

$$\tilde{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{\mu_{02}} e^{\beta_{2y}}} \sum_{l=1}^{\infty} [C_3^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{ilkr_2 y} + D_3^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{-ilkr_2 y}] e^{il\phi} + c.c. \tag{3.86}$$

Burada $A_3^{(l)}, B_3^{(l)}, C_3^{(l)}$ ve $D_3^{(l)}$ üçüncü mertebe dalga genliği fonksiyonlarıdır. Bu çözümlerle birlikte (3.85)-(3.86) özel çözümleri (3.77)-(3.80) sınır koşullarında yerlerine yazılırlarsa $\mathbf{U}_3^{(l)} = [A_3^{(l)}, B_3^{(l)}, C_3^{(l)}, D_3^{(l)}]^T$ olmak üzere aşağıdaki homojen olmayan cebrik denklem sistemi elde edilir:

$$\mathbf{W}_l \mathbf{U}_3^{(l)} = \mathbf{b}_3^{(l)}. \tag{3.87}$$

$\mathbf{b}_3^{(l)}$ vektörü $l = 1$ ve $l = 3$ için sıfırdan farklı, $l \neq 1, 3$ için özdeş olarak sıfırdır. Uzun ara işlemlerden sonra $l = 1$ için $\mathbf{b}_3^{(1)}$ vektörü

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_3^{(1)} &= -i \left(\frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega} \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial t_1} - \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k} \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_1} \right) \mathbf{R} - i \left(\frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega} \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_2} - \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k} \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_2} \right) \mathbf{R} \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{W}_1}{\partial \omega^2} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial t_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \mathbf{W}_1}{\partial \omega \partial k} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1 \partial t_1} + \frac{\partial^2 \mathbf{W}_1}{\partial k^2} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} \right) \mathbf{R} \\
&\quad + \left(\frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} - \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1 \partial t_1} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial k} + V_g \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \omega} \right) + \mathbf{F} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1
\end{aligned} \tag{3.88}$$

olarak elde edilir. $|\mathcal{A}_1|$, \mathcal{A}_1 'in modülünü göstermektedir. Burada \mathbf{F} vektörünün bileşenleri Ek B' de verilmiştir. $\mathbf{b}_3^{(3)}$ vektörünün açık yapısı birinci mertebe çözüm için gerekli olmadığından verilmeyecektir. $\det \mathbf{W}_1 = 0$ ve $\mathbf{b}_3^{(1)} \neq 0$ olduğundan (3.87) denkleminin $l = 1$ için çözümünün olması için aşağıdaki uygunluk koşulunun sağlanması gerekir;

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{b}_3^{(1)} = 0 \tag{3.89}$$

$l = 3$ için (3.87)'nin çözümü $\det \mathbf{W}_3 \neq 0$ olduğu için

$$\mathbf{U}_3^{(3)} = \mathbf{W}_3^{-1} \mathbf{b}_3^{(3)} \tag{3.90}$$

denklem sistemi elde edilir. $l \neq 1$ ve $l \neq 3$ için $\det \mathbf{W}_l \neq 0$ ve $\mathbf{b}_3^{(l)} = 0$ olduğundan (3.87) ' nın çözümleri

$$\mathbf{U}_3^{(l)} = \mathbf{0} \quad (3.91)$$

olarak elde edilir. $\mathbf{U}_3^{(1)}$ ve $\mathbf{U}_3^{(3)}$ çözümlerinin açık yapıları birinci merteye çözüm için gerekli olmadığından verilmeyecektir. Şimdi de analize (3.89) uygunluk koşulu ile devam edilecektir. Grup hızının (3.67) tanımı kullanılarak bu koşul hesaplanırsa

$$i\left(\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_2} + V_g \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_2}\right) + \tilde{\Gamma} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} + \tilde{\Delta} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1 + i\left(\frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial t_1} + V_g \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_1}\right) = 0 \quad (3.92)$$

bağıntısı elde edilir. Burada $\tilde{\Gamma}$ ve $\tilde{\Delta}$ sabitleri

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma} = & -\left[\frac{1}{2} \mathbf{L} \left(V_g^2 \frac{\partial^2 \mathbf{W}_1}{\partial \omega^2} + 2V_g^2 \frac{\partial^2 \mathbf{W}_1}{\partial \omega \partial k} + \frac{\partial^2 \mathbf{W}_1}{\partial k^2}\right) \mathbf{R} \right. \\ & \left. + \mathbf{L} \left(\frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k} + V_g \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega}\right) \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial k} + V_g \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \omega}\right) \right] / \left(\mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega} \mathbf{R}\right), \end{aligned} \quad (3.93)$$

$$\tilde{\Delta} = -\mathbf{L} \mathbf{F} / \left(\mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega} \mathbf{R}\right) \quad (3.94)$$

olarak tanımlanmıştır. Eğer \mathcal{A}_2 fonksiyonunun yapısı belirlenirse (3.92) denklemi sadece \mathcal{A}_1 fonksiyonu için bir denkleme indirgenebilir. Böylece bu denklem \mathcal{A}_1 ' in hesaplanması için kullanılabilir ve birinci merteye çözümler u_1 ve v_1 ' in inşası tamamlanmış olur. (3.92)' de \mathcal{A}_2 ' yi içeren terimlerin yapısı incelendiğinde, eğer \mathcal{A}_2 ' nin x_1 ve t_1 değişkenlerine bağlılığı, \mathcal{A}_1 ' in bu değişkenlere bağlılığı gibi kabul edilirse, yani $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_2(x_1 - V_g t_1, x_2, t_2)$ yapısında olduğu kabul edilirse,

$$\frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial t_1} + V_g \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_1} = 0 \quad (3.95)$$

olacaktır. Bu koşul altında, (3.92) denklemi sadece \mathcal{A}_1 için aşağıdaki denkleme dönüşür:

$$i\left(\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_2} + V_g \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_2}\right) + \tilde{\Gamma} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} + \tilde{\Delta} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1 = 0 \quad (3.96)$$

Daha sonra aşağıdaki boyutsuz değişkenler ve sabitler tanımlanarak

$$\begin{aligned} \tau = \omega t_2, \quad \xi = k \varepsilon^{-1} (x_2 - V_g t_2) = k(x_1 - V_g t_1), \quad \mathcal{A} = k \mathcal{A}_1, \\ \Gamma = k^2 \tilde{\Gamma} / \omega, \quad \Delta = \tilde{\Delta} / \omega k^2 \end{aligned} \quad (3.97)$$

(3.96) denklemi düzenlenerek aşağıdaki forma dönüştürülür:

$$i \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \tau} + \Gamma \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial \xi^2} + \Delta |\mathcal{A}|^2 \mathcal{A} = 0. \quad (3.98)$$

Burada Γ katsayısı lineer; Δ ise hem lineer hem de nonlinear malzeme özelliklerine bağlı katsayılarıdır. Elde edilen (3.98) denklemi nonlinear Schrödinger (NLS) denklemdir ve literatürde birçok değişik alanda nonlinear dalga modülasyonunun asimptotik olarak karakterize etmek için türetilmiştir, [10, 13]. Şimdi de NLS denkleminin bazı çözümlerini verelim.

$$\mathcal{A} = \frac{k}{2} a_0 e^{i(\Delta/4)k^2 a_0^2 \tau} \quad a_0 = sbt \quad (3.99)$$

fonksiyonu bir düzlem dalga formudur ve NLS denkleminin bir çözümü olduğu kolayca gösterilebilir. Bu düzlem dalga çözümünün stabilitesini incelemek için ilk olarak genlik fonksiyonunu aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} a(\xi, \tau) e^{ib(\xi, \tau)}. \quad (3.100)$$

Bu durumda (3.98) denklemi $a(\xi, \tau)$ ve $b(\xi, \tau)$ için

$$\begin{aligned} a_\tau + \Gamma(ab_{\xi\xi} + 2a_\xi b_\xi) &= 0 \\ ab_\tau - \frac{\Delta}{4} a^3 - \Gamma(a_{\xi\xi} - ab_\xi^2) &= 0 \end{aligned} \quad (3.101)$$

denklem sistemi haline dönüşür. Burada NLS denkleminin düzlem dalga çözümlerinin küçük pertürbasyonlar altında stabilitesi inceleneceği için a_1 ve b_1 küçük pertürbasyonları göstermek üzere a ve b fonksiyonları

$$a = ka_0 + a_1(\xi, \tau), \quad b = \frac{\Delta}{4} k^2 a_0^2 \tau + b_1(\xi, \tau) \quad (3.102)$$

formunda alınarak (3.101) sisteminde yerlerine yazılırsa aşağıdaki lineer denklem sistemi elde edilir:

$$\begin{aligned} a_{1\tau} + ka_0 \Gamma b_{1\xi\xi} &= 0 \\ ka_0 b_{1\tau} - \frac{3}{4} \Delta k^2 a_0^2 a_1 - \Gamma a_{1\xi\xi} &= 0. \end{aligned} \quad (3.103)$$

Bu denklem sisteminin çözümü

$$a_1 = A_0 e^{i(K\xi - \Omega\tau)}, \quad b_1 = B_0 e^{i(K\xi - \Omega\tau)} \quad (3.104)$$

olarak alınıp bu çözüm önerileri (3.103) sisteminde yerlerine yazılırsa, sıfırdan farklı çözümün olması için aşağıdaki koşulun gerçekleşmesi gerektiği bulunur:

$$\Omega^2 = \Gamma^2 K^4 \left(1 - \frac{3}{4} \frac{\Delta k^2 a_0^2}{\Gamma K^2}\right). \quad (3.105)$$

Dikkat edilirse parantez içindeki ifadenin işaretine bağlı olarak a_1 ve b_1 fonksiyonlarının davranışı hakkında yorum yapılabilir:

- Eğer $K < (\sqrt{3}/2)ka_0(\Delta/\Gamma)$ ve $\Gamma\Delta > 0$ ise Ω kompleks değer alır, bu durumda τ arttıkça a_1 ve b_1 sınırsız olarak büyürler. Yani (3.99) düzlem dalga çözümü stabil olmayacaktır.
- Eğer verilen bir K için $\Gamma\Delta < 0$ ise bu durumda a_1 ve b_1 fonksiyonları sınırlı olacaktır, dolayısıyla bu durumda (3.99) çözümü stabil olacaktır.

Tabii ki a_1 ve b_1 çözümleri çok kısa zaman aralığında geçerli olmaktadır ama $\Gamma\Delta < 0$ veya $\Gamma\Delta > 0$ olması asimptotik dalga alanının bir başlangıç verisi için uzun zaman aralığında nasıl davranacağını etkilemektedir. $|\xi| \rightarrow \infty$ limitinde sıfıra giden bir başlangıç uyarısı eğer $\Gamma\Delta > 0$ ise bir dizi solitona, $\Gamma\Delta < 0$ ise sönen titreşimlere dönüşür. Bu nedenle $\Gamma\Delta$ 'nın işaretinin incelenmesi önemlidir.

3.2.1 Sayısal Değerlendirme ve Solitary Dalgaların Varlığı

Bu bölümde (3.98) ile verilen NLS denkleminin çözümlerinin davranışı incelenecektir, yani boyutsuz dalga sayısı K 'ya göre NLS denkleminin lineer dispersiyon teriminin katsayısı, Γ , lineer olmayan terimin katsayısı, Δ ve $\Gamma\Delta$ çarpımının işareti incelenecektir. Bu amaçla ilk olarak boyutsuz değişkenler

$$C = \frac{c}{c_0}, \quad K = kh_1, \quad KH = kh_2, \quad H = h_2/h_1 \quad (3.106)$$

ve boyutsuz lineer ve lineer olmayan heterojenlik parametreleri

$$B_1 = \beta_1 h_1, \quad B_2 = \beta_2 h_2, \quad \Lambda_1 = \lambda_1 h_1, \quad \Lambda_2 = \lambda_2 h_2 \quad (3.107)$$

olarak tanımlanmaktadır. Ayrıca boyutsuz lineer malzeme parametreleri de

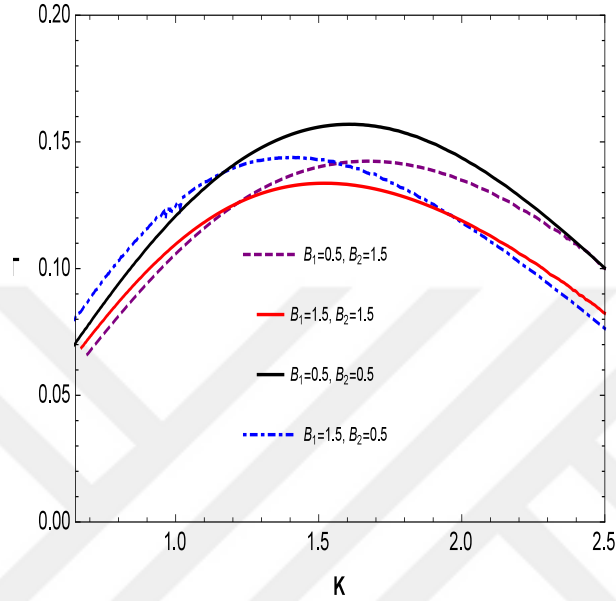
$$M_0 = \frac{c_0}{c_0} = 1.297, \quad \text{ve} \quad \gamma = 2.159 \quad (3.108)$$

olarak tanımlanmaktadır [1]. Daha öncesinde bahsedildiği gibi

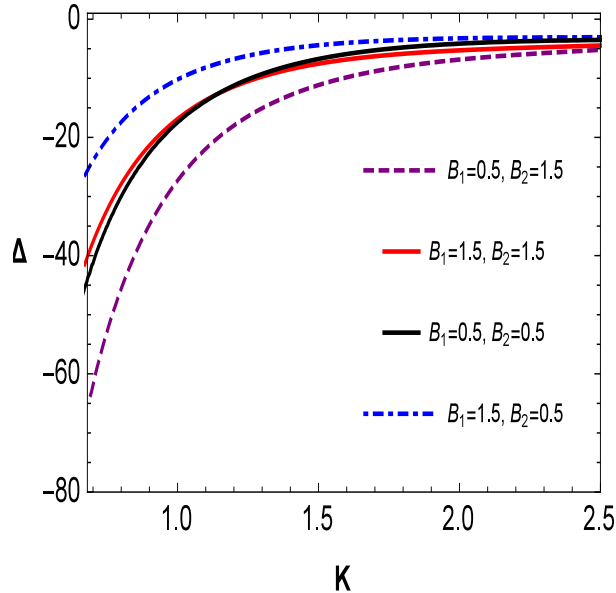
$$C > M_0 \sqrt{1 + \frac{B_2^2}{4H^2 K^2}}$$

koşulunu sağlayan dispersiyon bağıntısının ilk dalı üzerindeki boyutsuz dalga sayısı-faz hızı (K, C) çiftleri için sayısal hesaplamalar yapılacaktır. İlk olarak lineer heterojenlik parametreleri B_1 ve B_2 'nin değişiminin dispersiyon teriminin katsayısı Γ üzerindeki etkisi gözlemlenecektir. Bu amaçla (B_1, B_2) çifti için $(0.5, 1.5)$, $(1.5, 1.5)$,

(0.5,0.5) ve (1.5,0.5) değerleri alınarak Γ 'nın grafiği $H = 1$ için Şekil 3.1'de çizdirilmiştir. Şekilden de görüleceği gibi seçilen tüm lineer heterojenlik parametreleri için Γ eğrileri pozitif olmaktadır. Ayrıca $K = kh_1$ büyük değerleri için B_1 parametreleri aynı olan eğriler birbirine yaklaşımaktadır. Bu durum üst tabakanın özelliklerinin daha baskın olduğunu gösterir.

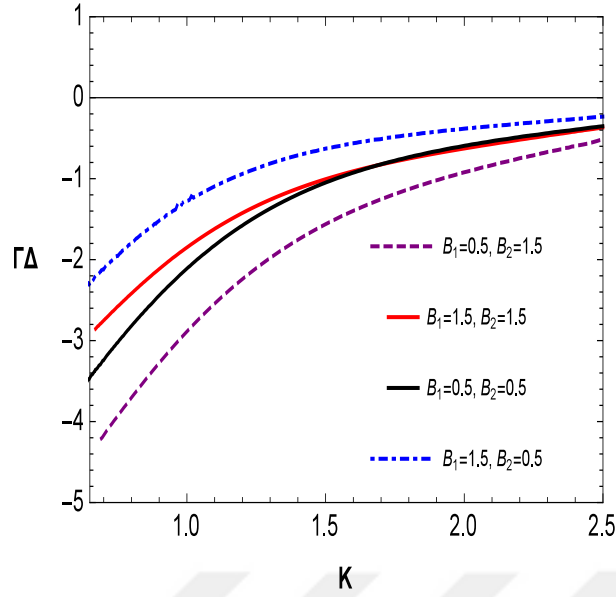


Şekil 3.1 : Heterojen iki tabakaya ait farklı lineer heterojenlik parametreleri için Γ 'nın K 'ya göre değişimi ($H = 1$)



Şekil 3.2 : $\theta_{0_1} = \theta_{0_2} = 2$ ve $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 0.3$ için kaymada sertleşen, heterojen iki tabakaya ait farklı lineer heterojenlik parametreleri için Δ 'nın K 'ya göre değişimi ($H = 1$)

Şimdi de lineer heterojenlik parametreleri B_1 ve B_2 'nin değişiminin nonlinear terimin katsayısı Δ üzerindeki etkisi gözlemlenecektir. Bilindiği gibi nonlinear malzeme



Şekil 3.3 : $\theta_{0_1} = \theta_{0_2} = 2$ ve $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 0.3$ için kaymada sertleşen, heterojen iki tabakaya ait farklı lineer heterojenlik parametreleri için $\Gamma\Delta$ 'nın K 'ya göre değişimi ($H = 1$)

parametresi $\theta_{0_m} < 0$ ise malzeme kaymada yumuşayan (S), $\theta_{0_m} > 0$ ise kaymada sertleşen (H) malzeme olarak adlandırılmaktadır. Her iki tabakanın kaymada sertleşen malzemeden oluştuğu kabul edilerek (H-H), $(\theta_{0_1}, \theta_{0_2}) = (2, 2)$ alınmıştır. Ayrıca lineer olmayan heterojenlik parametreleri de $(\Lambda_1, \Lambda_2) = (0.3, 0.3)$ seçilmiştir. Yukarıda seçilen lineer heterojenlik parametreleri ve $H = 1$ için nonlineer terimin katsayısı Δ 'nın ve $\Gamma\Delta$ çarpımının K 'ya göre değişimleri sırasıyla Şekil 3.2 ve Şekil 3.3'te çizdirilmiştir. Seçilen tüm bu parametre değerleri için Δ eğrilerin her biri negatif değer almaktadır, $\Delta < 0$, dolayısıyla $\Gamma\Delta < 0$ olmaktadır. Bu durumda NLS denkleminin solitary dalga çözümlerinin varlığından bahsedilemez. Şekil 3.1, Şekil 3.2 ve Şekil 3.3'te verilen eğriler için bazı sayısal değerler Çizelge 3.1, Çizelge 3.2, Çizelge 3.3 ve Çizelge 3.4'de verilmiştir.

K	C	Γ	Δ	$\Gamma\Delta$
0.82936	2.58651	0.08513	-41.98890	-3.57471
1.00613	2.23347	0.10647	-23.52990	-2.86561
1.25000	1.92990	0.12824	-15.19520	-2.10544
1.42596	1.78571	0.13771	-11.45870	-1.70211
1.80734	1.58873	0.14107	-7.95032	-1.12155
2.02579	1.51786	0.13385	-6.71777	-0.89921
2.23214	1.46730	0.12197	-5.94048	-0.72458
2.46016	1.42473	0.10437	-5.29652	-0.55279

Çizelge 3.1 : $(B_1, B_2) = (0.5, 1.5)$, $(\Lambda_1, \Lambda_2) = (0.3, 0.3)$, $(\theta_{0_1}, \theta_{0_2}) = (2, 2)$ için K , C , Γ , Δ ve $\Gamma\Delta$ 'nın seçilen bazı sayısal değerleri

K	C	Γ	Δ	$\Gamma\Delta$
0.82593	2.50189	0.09329	-21.3515	-1.99192
1.00446	2.15296	0.11592	-13.02330	-1.50977
1.25000	1.76652	0.14160	-6.18373	-0.87566
1.41607	1.74201	0.14260	-5.84337	-0.83330
1.80351	1.55218	0.13760	-3.77856	-0.51996
2.02562	1.47245	0.12100	-3.28042	-0.39693
2.23214	1.44263	0.10964	-3.16356	-0.34686
2.45690	1.39451	0.08061	-3.05653	-0.24640

Çizelge 3.2 : $(B_1, B_2) = (1.5, 0.5)$, $(\Lambda_1, \Lambda_2) = (0.3, 0.3)$, $(\theta_0_1, \theta_0_2) = (2, 2)$ için K , C , Γ , Δ ve $\Gamma\Delta$ 'nın seçilen bazı sayısal değerleri

K	C	Γ	Δ	$\Gamma\Delta$
0.82589	2.53582	0.09010	-25.93940	-2.33721
1.00446	2.19543	0.11007	-16.70340	-1.83869
1.25000	1.90517	0.12755	-10.49140	-1.33825
1.41606	1.77571	0.13284	-8.29474	-1.10188
1.80351	1.58566	0.12813	-5.84363	-0.74879
2.02562	1.51786	0.11747	-5.21375	-0.61249
2.23214	1.46970	0.10379	-4.83528	-0.50189
2.45690	1.42980	0.08615	-4.51919	-0.38933

Çizelge 3.3 : $(B_1, B_2) = (1.5, 1.5)$, $(\Lambda_1, \Lambda_2) = (0.3, 0.3)$, $(\theta_0_1, \theta_0_2) = (2, 2)$ için K , C , Γ , Δ ve $\Gamma\Delta$ 'nın seçilen bazı sayısal değerleri

K	C	Γ	Δ	$\Gamma\Delta$
0.82884	2.37736	0.09815	-27.57870	-2.70697
1.00446	2.07100	0.12131	-17.27710	-2.09601
1.25000	1.80676	0.14445	-10.16860	-1.46893
1.42857	1.68291	0.15386	-7.47855	-1.15072
1.80108	1.52342	0.15351	-4.77664	-0.73327
2.02749	1.46429	0.14182	-4.06609	-0.57668
2.23214	1.42487	0.12600	-3.72998	-0.46999
2.45727	1.39286	0.10459	-3.52614	-0.36880

Çizelge 3.4 : $(B_1, B_2) = (0.5, 0.5)$, $(\Lambda_1, \Lambda_2) = (0.3, 0.3)$, $(\theta_0_1, \theta_0_2) = (2, 2)$ için K , C , Γ , Δ ve $\Gamma\Delta$ 'nın seçilen bazı sayısal değerleri

Benzer inceleme üst tabakanın sertleşen, alt tabakanın ise yumuşan malzemeden olması durum için, $(\theta_0_1, \theta_0_2) = (2, -2)$, yapılmış Δ ve $\Gamma\Delta$ 'nın grafikleri aynı (B_1, B_2) parametre değerleri için sırasıyla Şekil 3.4 ve Şekil 3.5' te verilmiştir. Dikkat edilirse Δ 'nın pozitif değer aldığı (K, C) değerlerinde $\Gamma\Delta$ da pozitif değerler almaktadır. Seçilen her bir lineer heterojenlik parametresi için $\Gamma\Delta > 0$ olduğu aralıklar mevcuttur.

Bu değerlerde NLS denkleminin soliton tipi dalgaları var olmaktadır. Ayrıca lineer heterojenlik parametrelerindeki değişimin de soliton tipi dalgaların var olduğu aralıkları etkilediği gözlemlenebilir. Ek olarak dalga sayısı arttıkça üst tabakanın lineer heterojenlik parametresinin $\Gamma\Delta$ 'nın değişimi üzerinde etkili olduğu da söylenebilir.

Şekil 3.4 ve Şekil 3.5' te verilen eğriler için bazı sayısal değerler Çizelge 3.5, Çizelge 3.6, Çizelge 3.7 ve Çizelge 3.8 'de verilmiştir.

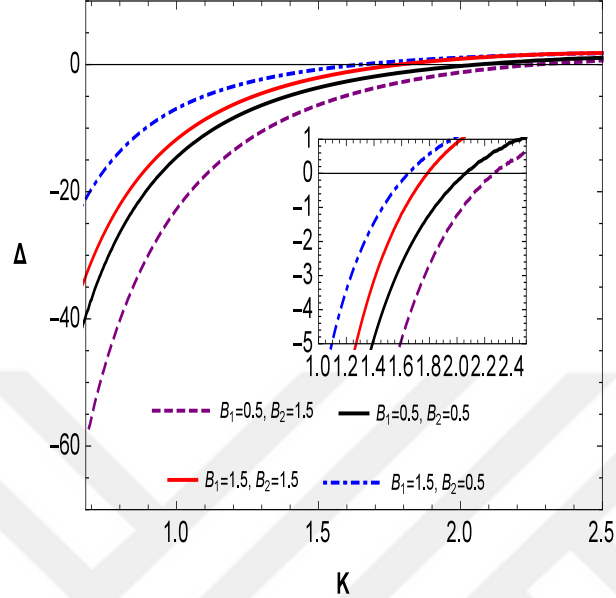
K	C	Γ	Δ	$\Gamma\Delta$
0.82936	2.58651	0.08513	-36.79750	-3.13274
1.00613	2.23347	0.10647	-22.36200	-2.38093
1.25000	1.92990	0.12824	-11.93270	-1.53027
1.42596	1.78571	0.13771	-7.66984	-1.05622
1.80734	1.58873	0.14107	-2.63210	-0.37131
2.02579	1.51786	0.13385	-1.09528	-0.14661
2.23214	1.46730	0.12197	-0.13043	-0.01591
2.46016	1.42473	0.10437	0.52201	0.05448

Çizelge 3.5 : $(B_1, B_2) = (0.5, 1.5)$, $(\Lambda_1, \Lambda_2) = (0.3, 0.3)$, $(\theta_{0_1}, \theta_{0_2}) = (2, -2)$ için K, C, Γ , Δ ve $\Gamma\Delta$ 'nin seçilen bazı sayısal değerleri

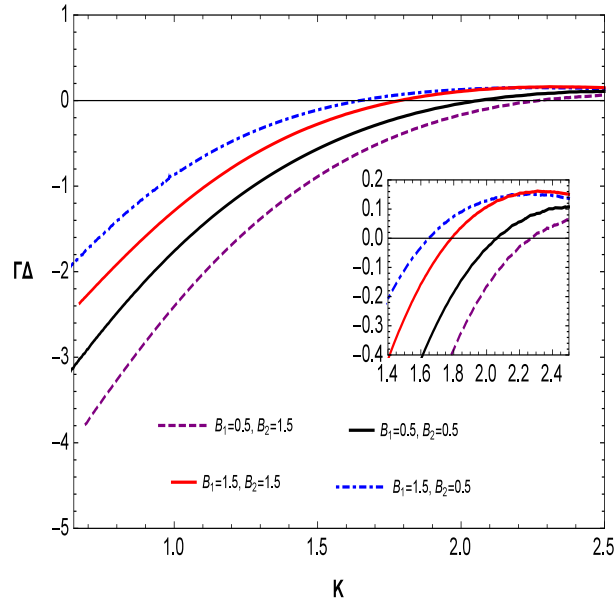
K	C	Γ	Δ	$\Gamma\Delta$
0.82589	2.29158	0.09329	-12.49660	-1.33055
1.0044	2.00605	0.11592	-6.81929	-0.85812
1.25000	1.76652	0.14160	-2.82922	-0.40064
1.42008	1.66071	0.14260	-1.29564	-0.18626
1.80133	1.51249	0.13760	0.57793	0.07605
2.02571	1.45985	0.12100	1.14391	0.13309
2.23214	1.42364	0.10964	1.50881	0.15100
2.45684	1.39404	0.08061	1.75391	0.14084

Çizelge 3.6 : $(B_1, B_2) = (1.5, 0.5)$, $(\Lambda_1, \Lambda_2) = (0.3, 0.3)$, $(\theta_{0_1}, \theta_{0_2}) = (2, -2)$ için K, C, Γ , Δ ve $\Gamma\Delta$ 'nin seçilen bazı sayısal değerleri

Şimdi de lineer olmayan heterojenlik parametrelerindeki değişimin dalga yayılımı üzerindeki etkisini incelemek için lineer heterojenlik parametreleri $B_1 = B_2 = 1.5$ alınarak sabit tutulup değişik (Λ_1, Λ_2) seçimleri için Δ ve $\Gamma\Delta$ eğrilerinin grafikleri çizdirilecektir. Δ ve $\Gamma\Delta$ eğrilerinin grafikleri $\theta_{0_1} = \theta_{0_2} = 2$ için, yani her iki tabakanın da kaymada sertleşen malzemeden oluştuğu durum için, sırasıyla Şekil 3.6 ve Şekil 3.7'de verilmiştir. Dikkat edilirse seçilen tüm (Λ_1, Λ_2) değerleri için Δ dolayısıyla $\Gamma\Delta$ negatif olmaktadır. Yani NLS denkleminin solitary dalga çözümleri var olmamaktadır. Ayrıca küçük dalga sayılarında (uzun dalga limitinde) üst tabakanın lineer olmayan



Şekil 3.4 : $\theta_{0_1} = 2, \theta_{0_2} = -2$ ve $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 0.3$ için kaymada sertleşen üst tabaka ve yumuşayan alt tabakaya ait farklı lineer heterojenlik parametreleri için Δ 'nın K 'ya göre değişimi ($H = 1$)



Şekil 3.5 : $\theta_{0_1} = 2, \theta_{0_2} = -2$ ve $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 0.3$ için kaymada sertleşen üst tabaka ve yumuşayan alt tabakaya ait farklı lineer heterojenlik parametreleri için $\Gamma\Delta$ 'nın K 'ya göre değişimi ($H = 1$)

K	C	Γ	Δ	$\Gamma\Delta$
0.82593	2.53571	0.09010	-20.27710	-1.82712
1.00446	2.19543	0.11007	-11.59290	-1.27614
1.25000	1.90517	0.12755	-5.35823	-0.68348
1.41607	1.77571	0.13284	-2.94494	-0.39120
1.80351	1.58566	0.12813	0.10153	0.01301
2.02562	1.51786	0.11747	0.98049	0.11518
2.23214	1.46970	0.10379	1.50582	0.15630
2.45690	1.42980	0.08615	1.79401	0.15455

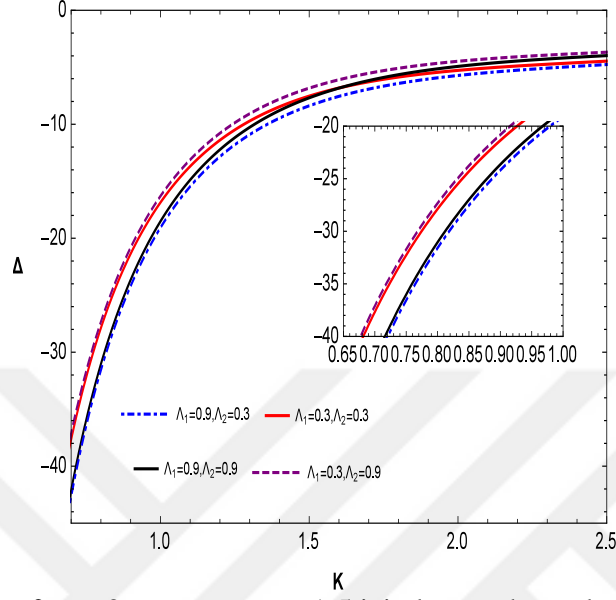
Çizelge 3.7 : $(B_1, B_2) = (1.5, 1.5)$, $(\Lambda_1, \Lambda_2) = (0.3, 0.3)$, $(\theta_{0_1}, \theta_{0_2}) = (2, -2)$ için K , C , Γ , Δ ve $\Gamma\Delta$ 'nin seçilen bazı sayısal değerleri

K	C	Γ	Δ	$\Gamma\Delta$
0.82884	2.37736	0.09815	-24.16780	-2.37218
1.00416	2.07143	0.12131	-14.39210	-1.74551
1.25000	1.80676	0.14445	-7.33392	-1.05944
1.41891	1.68870	0.15386	-4.59552	-0.70553
1.80108	1.52342	0.15351	-1.20579	-0.18510
2.01261	1.46723	0.14182	-0.17981	-0.02569
2.23214	1.42487	0.12600	0.529605	0.06673
2.45727	1.39286	0.10459	0.98994	0.103542

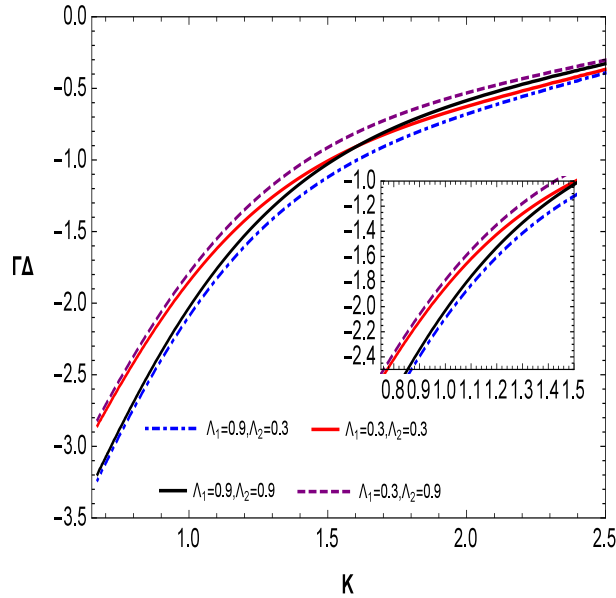
Çizelge 3.8 : $(B_1, B_2) = (0.5, 0.5)$, $(\Lambda_1, \Lambda_2) = (0.3, 0.3)$, $(\theta_{0_1}, \theta_{0_2}) = (2, -2)$ için K , C , Γ , Δ ve $\Gamma\Delta$ 'nin seçilen bazı sayısal değerleri

heterojenlik parametresinin etkisi baskın iken dalga sayısı büyüdükçe alt tabakaya ait parametrenin etkisinin daha baskın olduğu görülmektedir. Benzer inceleme üst tabakanın kaymada sertleşen, alt tabakanın ise yumuşayan olduğu durum için, yani $\theta_{0_1} = 2$, $\theta_{0_2} = -2$ için, Şekil 3.8 ve Şekil 3.9'da verilmiştir. Bu durumda seçilen tüm lineer olmayan heterojenlik malzeme parametreleri için $\Gamma\Delta > 0$ olduğu yani solitary dalgaların var olduğu K aralıkları bulunmaktadır. Yine bu grafiklerden de küçük dalga sayılarında üst tabakaya ait lineer olmayan heterojenlik parametresinin etkisinin baskın olduğu görülmektedir.

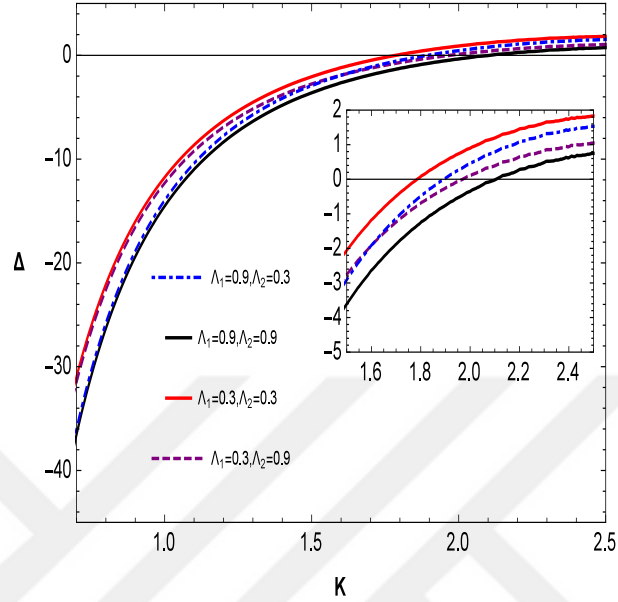
Şekil 3.6 ve Şekil 3.7' de verilen eğriler için bazı sayısal değerler Çizelge 3.9, Çizelge 3.10, Çizelge 3.11 ve Çizelge 3.12 'de verilmiştir.



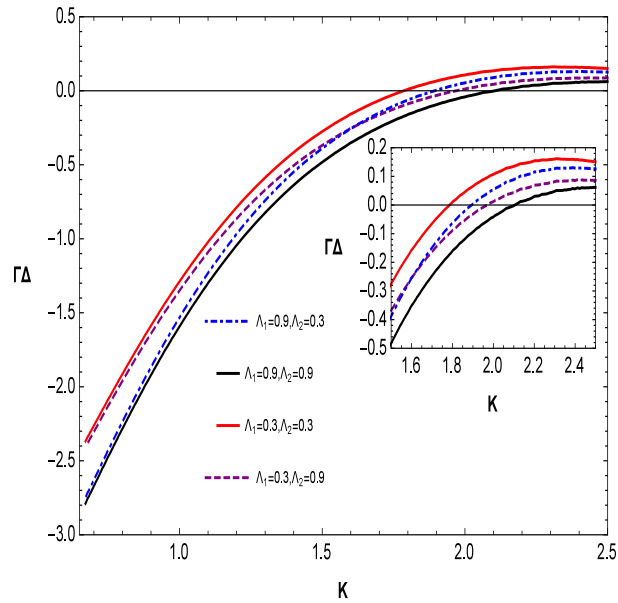
Şekil 3.6 : $\theta_{0_1} = \theta_{0_2} = 2$ ve $B_1 = B_2 = 1.5$ için kaymada sertleşen, heterojen iki tabakaya ait farklı nonlinear heterojenlik parametreleri için Δ 'nın K 'ya göre değişimi ($H = 1$)



Şekil 3.7 : $\theta_{0_1} = \theta_{0_2} = 2$ ve $B_1 = B_2 = 1.5$ için kaymada sertleşen, heterojen iki tabakaya ait farklı nonlinear heterojenlik parametreleri için $\Gamma\Delta$ 'nın K 'ya göre değişimi ($H = 1$)



Şekil 3.8 : $\theta_{0_1} = 2$, $\theta_{0_2} = -2$ ve $B_1 = B_2 = 1.5$ için kaymada sertleşen üst tabaka ve yumuşayan alt tabakaya ait farklı nonlinear heterojenlik parametreleri için Δ 'nın K 'ya göre değişimi ($H = 1$)



Şekil 3.9 : $\theta_{0_1} = 2$, $\theta_{0_2} = -2$ ve $B_1 = B_2 = 1.5$ için kaymada sertleşen üst tabaka ve yumuşayan alt tabakaya ait farklı nonlinear heterojenlik parametreleri için $\Gamma\Delta$ 'nın K 'ya göre değişimi ($H = 1$)

K	C	Γ	Δ	$\Gamma\Delta$
0.82593	2.53571	0.09010	-25.93640	-2.33708
1.00446	2.19543	0.11007	-16.70340	-1.83869
1.25000	1.90517	0.12755	-10.49140	-1.33825
1.41607	1.77571	0.13284	-8.29474	-1.10188
1.80351	1.58566	0.12813	-5.84363	-0.74879
2.02562	1.51786	0.11747	-5.21375	-0.61249
2.23214	1.46970	0.10379	-4.83528	-0.50189
2.45690	1.42980	0.08615	-4.51919	-0.38933

Çizelge 3.9 : $(\theta_0, \theta_2) = (2, 2)$, $(B_1, B_2) = (1.5, 1.5)$ ve $(\Lambda_1, \Lambda_2) = (0.3, 0.3)$ için K , C , Γ , Δ ve $\Gamma\Delta$ 'nın seçilen bazı sayısal değerleri

K	C	Γ	Δ	$\Gamma\Delta$
0.82593	2.53571	0.09010	-25.39100	-2.28793
1.00446	2.19543	0.11007	-16.14240	-1.77693
1.25000	1.90517	0.12755	-9.86718	-1.25863
1.41607	1.77571	0.13284	-7.62107	-1.01239
1.80351	1.58566	0.12813	-5.07429	-0.65021
2.02562	1.51786	0.11747	-4.41323	-0.51845
2.23214	1.46970	0.10379	-4.02924	-0.41823
2.45690	1.42980	0.08615	-3.72971	-0.32131

Çizelge 3.10 : $(\theta_0, \theta_2) = (2, 2)$, $(B_1, B_2) = (1.5, 1.5)$ ve $(\Lambda_1, \Lambda_2) = (0.3, 0.9)$ için K , C , Γ , Δ ve $\Gamma\Delta$ 'nın seçilen bazı sayısal değerleri

K	C	Γ	Δ	$\Gamma\Delta$
0.82593	2.53571	0.09010	-28.84150	-2.59885
1.00446	2.19543	0.11007	-18.33480	-2.01827
1.25000	1.90517	0.12755	-11.17490	-1.42545
1.41607	1.77571	0.13284	-8.59433	-1.14167
1.80351	1.58566	0.12813	-5.63299	-0.72180
2.02562	1.51786	1.51786	-4.85084	-0.56986
2.23214	1.46970	0.10379	-4.38986	-0.45566
2.45690	1.42980	0.08615	-4.03632	-0.34773

Çizelge 3.11 : $(\theta_0, \theta_2) = (2, 2)$, $(B_1, B_2) = (1.5, 1.5)$ ve $(\Lambda_1, \Lambda_2) = (0.9, 0.9)$ için K , C , Γ , Δ ve $\Gamma\Delta$ 'nın seçilen bazı sayısal değerleri

K	C	Γ	Δ	$\Gamma\Delta$
0.82593	2.53571	0.09010	-29.38690	-2.64799
1.00446	2.19543	0.11007	-18.89580	-2.08003
1.25000	1.90517	0.12755	-11.79910	-1.50507
1.41607	1.77571	0.13284	-9.26800	-1.23116
1.80351	1.58566	0.12813	-6.40233	-0.82038
2.02562	1.51786	1.51786	-5.65136	-0.66390
2.23214	1.46970	0.10379	-5.19589	-0.53933
2.45690	1.42980	0.08615	-4.82581	-0.41574

Çizelge 3.12 : $(\theta_{0_1}, \theta_{0_2}) = (2, 2)$, $(B_1, B_2) = (1.5, 1.5)$ ve $(\Lambda_1, \Lambda_2) = (0.9, 0.3)$ için K , C , Γ , Δ ve $\Gamma\Delta$ 'nın seçilen bazı sayısal değerleri



4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, düzgün kalınlıklı farklı hiperelastik izotrop homojen olmayan malzemelerden oluşan iki tabakalı ortamda lineer olmayan yatay kayma (SH) dalgalarının yayılımını veren sınır değer problemi incelenmiştir. Serbest yüzeyde gerilmenin olmadığı, ara yüzeyde ise gerilme ve yer değiştirmelerin sürekli olduğu kabul edilmiştir. Ayrıca lineer ve lineer olmayan elastik malzeme parametrelerinin derinlik değişkenine bağlı olduğu ve bu bağlılığın üstel fonksiyonlar cinsinden olduğu kabul edilmiştir.

İlk olarak farklı heterojen malzemelerden oluşan ortamda lineer SH dalgaları için dispersiyon bağıntısı elde edilmiştir. Tabakalara ait lineer heterojenlik parametre modelleri

- i) Homojen üst tabaka- Homojen alt tabaka, $(B_1, B_2) = (0, 0)$,
- ii) Homojen üst tabaka-Heterojen alt tabaka, $(B_1, B_2) = (0, B_2)$,
- iii) Heterojen üst tabaka-Homojen alt tabaka, $(B_1, B_2) = (B_1, 0)$,
- iv) Heterojen üst tabaka-Heterojen alt tabaka, $(B_1, B_2) \neq (0, 0)$

olarak alınmıştır. Tabaka kalınlık oranının değişiminin dalgaların faz hızı üzerinde etkili olduğu gözlemlenmiştir: boyutsuz dalga sayısı- faz hızı eğrisi bu malzeme modelleri için çizdirildiğinde, üst tabakanın alt tabakaya göre daha kalın olduğu durumda ($H = 5$) üst tabakanın lineer heterojenlik parametresinin alt tabakaninkine göre lineer dalga yayılımı üzerinde daha etkili olduğu görülmektedir. Yani üst tabakaya ait parametre değeri aynı olan eğriler birbirlerine yaklaşmaktadır.

Daha sonra, küçük ama sonlu genlikli nonlinear SH dalgalarının yayılımı problemi çoklu ölçekler metodu kullanılarak incelenmiştir. Birinci mertebe yavaş değişen genlik fonksiyonunun değişimini veren nonlinear Schrödinger denklemi (NLS) elde edilmiştir.

Bilindiği gibi NLS denkleminin çözümleri denklemin dispersiyon terimin katsayısı, Γ , ve lineer olmayan terimin katsayısı, Δ , çarpımının işaretine bağlıdır. Solitary zarf çözümleri bu çarpımın, $\Gamma\Delta$, pozitif olması durumunda var olmaktadır. Tabakaların

hem lineer heterojen hem de lineer olmayan heterojen malzeme parametrelerinin değişiminin nonlinear dalga yayılımı üzerindeki etkisi bazı seçilen malzeme parametreleri için grafiklerle gözlemlenmiştir.

Nonlinear malzeme modeli olarak

i) kaymada sertleşen alt ve üst tabaka, (H,H),

ii) kaymada sertleşen üst tabaka- yumuşayan alt tabaka, (H,S),

seçimi yapılmıştır. Tabakaların lineer heterojenlik parametrelerindeki değişimin soliton tipi dalgaların var olduğu aralıkları etkilediği görülmüştür. Tabaka kalınlıklarının eşit olması durumunda Γ pozitif olmaktadır. Bu durumda $\Gamma\Delta$ 'nın işareti Δ 'nın işareti ile aynı olmaktadır. Seçilen (H,H) nonlinear malzeme modeli ve dispersiyon bağıntısının birinci dalındaki tüm K 'lar için $\Delta < 0$, dolayısı ile $\Gamma\Delta < 0$ iken (H,S) malzeme modeli için $\Gamma\Delta > 0$ olduğu dalga sayılarının var olduğu görülmüştür, yani bu dalga sayılarında solitary dalgalar var olmaktadır. (H,S) durumunda dalga sayısı arttıkça üst tabakanın lineer heterojenlik parametresinin solitary dalga çözümlerinin varlığı üzerinde daha etkili olduğu gözlemlenmiştir. Küçük dalga sayılarında ise üst tabakaya ait lineer olmayan heterojenlik parametresinin baskın olduğu gözlemlenmiştir.

Lineer olmayan heterojenlik parametrelerinin nonlinear dalga yayılımı üzerindeki etkisi de lineer heterojenlik parametreleri sabitlenerek gözlemlenmiştir. Seçilen (H,H) ve (H,S) nonlinear malzeme modelleri için küçük dalga sayılarında üst tabakanın lineer olmayan heterojenlik parametresi dalga yayılımı üzerinde daha etkili iken dalga sayısı büyüdükçe alt tabakanın lineer olmayan heterojenlik katsayısının daha etkili olduğu grafiklerde görülmüştür.

Bu çalışmada nonlinear SH dalgalarının yayılımı üzerinde lineer ve lineer olmayan heterojenlik parametrelerinin etkisi incelenmiştir. İleriki çalışmalarda heterojen tabakalı ortamlarda düzlemiçi dalga yayılımı incelenebilir.

KAYNAKLAR

- [1] **Ewing, W.M Jardetzky, W.S., Press,F. ve Beiser,A.** (1957). Elastic waves in layered media, *Physics Today*, 12-27.
- [2] **Achenbach, J.D.** (1973). Wave Propagation in Elastic Solids North, *Holland Publishing Company, Amsterdam.*
- [3] **Farnell, G.W.** (1978). Types and properties of surface, *Springer*, 13-60.
- [4] **Love, A. E. H.** (1911). Some Problems of Geodynamics: Being an Essay to which the Adams Prize in the University of Cambridge was Adjudged in 1911, *CUP Archive.*
- [5] **Stoneley, R., Tillotson, E.** (1928). The Effect of a Double Surface Layer on Love Waves, *Geophysical Journal International*, 521–527.
- [6] **Stoneley, R.** (1950). The Effect Of A Low-Velocity Internal Stratum On Surface Elastic Waves, *Geophysical Journal International*, 28–35.
- [7] **Kundu, S., Gupta, S. ve Manna, S.** (2014). Propagation of Love wave in fiber-reinforced medium lying over an initially stressed orthotropic half-space, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1172–1182.
- [8] **Eringen, A. C.** (1975). Elastodynamics. vol. 2, linear theory, Academic Press.
- [9] **Miklowitz, J. ve Kaul, R.K.** (1979). The Theory of Elastic Waves and Waveguides, *Journal of Applied Mechanics.*
- [10] **Ablowitz, M.J., Clarkson, P.A.** (1991). Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering, Cambridge university press.
- [11] **Jeffrey, A. ve Kawahara, T.** (1982). Asymptotic methods in nonlinear wave theory, *Applicable Mathematics Series.*
- [12] **Whitham, G.B.** (1974). Linear and Nonlinear Waves John Wiley & Sons, *Inc., New York.*
- [13] **Dodd, R. K, Morris, H. C. and Eilbeck, J.C. ve Gibbon, J.D.** (1982). Soliton and nonlinear wave equations, *London and New York.*
- [14] **Johnson, R. S.** (1997). A modern introduction to the mathematical theory of water waves, Cambridge university press.
- [15] **Bataille, K. ve Lund, F.** (1982). Nonlinear waves in elastic media, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 95-104.

- [16] **Teymur, M.** (1988). Nonlinear modulation of Love waves in a compressible hyperelastic layered half space, *International journal of engineering science*, 907-927.
- [17] **Teymur, M.** (1989). Nonlinear modulation and the fifth-harmonic resonance of Love waves on a neo-Hookean layered half-space, *Nonlinear Wave Motion*.
- [18] **Teymur, M.** (1996). Small but finite amplitude waves in a two-layered incompressible elastic medium, *International Journal of Engineering Science*, 227-241.
- [19] **Ahmetolan, S. ve Teymur, M.** (2003). Non-linear modulation of SH waves in a two-layered plate and formation of surface SH waves, *International Journal of Non-linear Mechanics*, 1237-1250.
- [20] **Var, H.İ.** (1997). Tabakalı bir hiperelastik yarım uzayda nonlineer yüzey SH dalgalarının yayılması. *Fen Bilimleri Enstitüsü*.
- [21] **Ahmetolan, S., Peker-Dobie, A. ve Demirci, A.** (2019). On the propagation of nonlinear SH waves in a two-layered compressible elastic medium, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik* 1-20.
- [22] **Avtar, P.** (1967). Love waves in a two-layered crust overlying a vertically inhomogeneous halfspace I, *pure and applied geophysics*, 48-68.
- [23] **Hudson, J.A.** (1962). Love waves in a heterogeneous medium, *Geophysical Journal International*, 131-147.
- [24] **Singh, B.M., Singh, S.J., Chopra, S.D. ve Gogna, M.L.** (1976). On Love waves in laterally and vertically heterogeneous layered media, *Geophysical Journal International*, 357-370.
- [25] **Demirkuş, D.** (2017). Heterojen Bir Tabakada Nonlineer SH Dalgaları, *Fen Bilimleri Enstitüsü*.
- [26] **Kakar, R. ve Kakar, S.** (2012). Propagation of Love waves in a non-homogeneous elastic media, *J. Acad. Indus. Res*, 1323-328.
- [27] **Demirkuş, D.** (2021). Some comparisons between heterogeneous and homogeneous plates for nonlinear symmetric SH waves in terms of heterogeneous and nonlinear effects, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 1-16.
- [28] **Stoneley, R.** (1924). Elastic waves at the surface of separation of two solids, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 416-428.
- [29] **De, T. K.** (1968). On love waves in heterogeneous media, *pure and applied geophysics*, 18-21.
- [30] **Bhattacharya, S.N.** (1970). Love wave dispersion in a laterally heterogeneous layer lying over a homogeneous semi-infinite medium, *Geophysical Journal International*, 361-366.

- [31] **Chatterjee, S.N.** (1972). The dispersion of Love waves in a laterally and in a vertically heterogeneous layer lying over a homogeneous half-space *Bulletin of the Seismological Society of America*, The Seismological Society of America.805-813.
- [32] **Negi, Janardan G. ve Singh, V.P.** (1973). Dispersion of Love waves in non-uniform channels lying over homogeneous half-spaces, *pure and applied geophysics*, 484-494.
- [33] **Ahmetolan, S.** (1996). İki tabakalı elastik ortamlarda nonlinear dalga modülasyonu, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [34] **Ahmetolan, S. ve Teymur, M.** (2007). Nonlinear modulation of SH waves in an incompressible hyperelastic plate, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*,457-474.
- [35] **Deliktaş, E. ve Teymür, M.** (2015). Düzgün Kalınlıklı Hiperelastik İki Tabakayla Kaplı Bir Yarım Uzayda Lineer Olmayan Yüzey SH Dalgalarının Yayılması, *Teorik ve Uygulamalı Mekanik Türk Milli Komitesi*.
- [36] **Kumari, N., Anand Sahu, S., Chattopadhyay, A. ve Kumar Singh, A.** (2016).Influence of heterogeneity on the propagation behavior of Love-type waves in a layered isotropic structure, *International Journal of Geomechanics*, 04015062.
- [37] **Demirkuş, D.** (2018). Antisymmetric bright solitary SH waves in a nonlinear heterogeneous plate, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 1-17.
- [38] **Ahmetolan, S., Peker-Dobie,A. ve Demirci,A.**(2019). On the propagation of nonlinear SH waves in a two-layered compressible elastic medium, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik* 1-20.
- [39] **Teymur, M., Var, H. İ. ve Deliktaş, E.** (2019).Nonlinear modulation of surface SH waves in a double layered elastic half space, *Dynamical Processes in Generalized Continua and Structures*, 465-483.
- [40] **Bednarik, M., Cervenka, M., Lotton, P. ve Simon, L.** (2019).Analytical solutions for elastic SH-waves propagating through an isotropic inhomogeneous layer, *Composite Structures*, 875-887.
- [41] **Demirkuş, D.** (2019).Symmetric dark solitary SH waves in a nonlinear heterogeneous plate, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*,1-12.
- [42] **Demirkuş, D.** (2020). A Comparison Between Heterogeneous and Homogeneous Layers for Nonlinear Bright Solitary SH Waves in Terms of Heterogeneous Effect, *Nonlinear Wave Dynamics of Materials and Structures*,121-143.



EKLER

EK A :

EK B:





EK A: Heterojen Hiperelastik ortamlarda Genelleştirilmiş Kayma Hareketi

Üç boyutlu uzayda bir noktanın, aynı dik Kartezyen eksen takımına göre uzaysal ve maddesel koordinatları sırası ile (x_1, x_2, x_3) ve (X_1, X_2, X_3) üçlü sıralı sayıları ile gösterilmek üzere,

$$x_k = X_K \delta_{kK} + u_3(X_\Delta, t) \delta_{k3} \quad (\text{A.1})$$

denklemleri ile belirtilen bir şekil değiştirme genelleştirilmiş kayma hareketi olarak adlandırılır (2.1) denkleminde u_3 bir parçacığın X_3 yönündeki yer değiştirme fonksiyonunu, t zamanı, δ_{kK} olağan Kronecker sembolünü göstermektedir. Latin indislerin $(1, 2, 3)$, Yunan indislerinin ise $(1, 2)$ değerlerini alacaklarını ve (A.1)'de ve bu bölümde bundan sonra tekrarlanan iki Latin indisi üzerinde 1'den 3'e kadar, tekrarlanan iki Yunan indisi üzerinde ise 1'den 2'ye kadar toplam yazılacağını kabul ediyoruz. (A.1) ile tanımlanan genelleştirilmiş kayma hareketine ait şekil değiştirme gradyanları

$$[x_{k,K}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ u_{3,1} & u_{3,2} & 1 \end{bmatrix}, [X_{k,K}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -u_{3,1} & -u_{3,2} & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

olarak bulunur. (A.2)' de virgülden sonraki bir alt indis bunun belirttiği Kartezyen koordinata göre kısmi türevi göstermektedir. Dikkat edilirse,

$$j = \det[x_{k,K}] = 1 \quad (\text{A.3})$$

dir. Dolayısı ile (A.1) ile belirtilen genelleştirilmiş kayma hareketi izokorik bir şekil değiştirmedir, yani bu hareket esnasında hacim değişimi olmaz. Buna bağlı olarak böyle bir hareketin meydana geldiği ortamın yoğunluğu, ρ , değişmez.; yani

$$\rho = \rho_0 = \text{sabit} \quad (\text{A.4})$$

dir. Şimdi ortamın sıkışmaz homojen izotrop hiperelastik bir cisim olduğunu ve şekil değiştirme enerjisi fonksiyonunun, Finger şekil değiştirme tansörü,

$$c_{kl}^{-1} = x_{k,K} x_{l,K} \quad (\text{A.5})$$

'nin yalnızca birinci invaryantı

$$I = \text{tr} c^{-1} = 3 + K^2, \quad K^2 = u_{3,\Delta} u_{3,\Delta} \quad (\text{A.6})$$

'nın fonksiyonu olduğunu kabul edelim, yani

$$\Sigma = \Sigma(I, Y) \quad (\text{A.7})$$

olsun. Böyle malzemelere genelleştirilmiş neo-Hookean malzemeler denir ve bunlar için gerilme bünye denklemleri, t_{kl} Cauchy gerilme tansörünü göstermek üzere,

$$t_{kl} = -p \delta_{kl} + \Phi c_{kl}^{-1} \quad (\text{A.8})$$

olarak ifade edilirler [18]. (A.8)' de $p = p(X_k, t)$ hidrostatik basınç fonksiyonudur ve harekete bağlı olarak hesaplanır. Φ ise

$$\Phi = 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I} \quad (\text{A.9})$$

olarak tanımlanır. (A.1) için $c_{kl}^{(-1)}$ tansörünün bileşenleri (2.2)' de kullanılarak

$$\mathbf{c}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ u_{3,1} & u_{3,2} & 1 + K^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

olarak bulunurlar. Bu sonuçlar (A.8)' de yerleştirilirse gerilme bileşenleri aşağıdaki gibi elde edilirler.

$$\begin{aligned} t_{11} &= -p + \phi; & t_{12} &= t_{21} = 0; & t_{33} &= t_3 = \Phi u_{3,\alpha} \\ t_{33} &= -p + (1 + K^2)\Phi; & t_{22} &= -p + \Phi \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Eğer,

$$\tau = \sqrt{t_{13}^2 + t_{23}^2} \quad (\text{A.12})$$

bağıntısı ile bir kayma gerilmesi tanımlanırsa (2.11)' den

$$\tau = \Phi K \quad (\text{A.13})$$

yazılır. K kayma deformasyonunu ölçtüğü için K ' nin katsayısı olan Φ ortamın genelleştirilmiş kayma modülü olarak adlandırılabilir. Bu modülü

$$\hat{\mu} = \Phi \quad (\text{A.14})$$

ile gösterelim. (A.6) kullanılırsa

$$\hat{\mu} = \frac{1}{K} \frac{d\Sigma}{dK} \quad (\text{A.15})$$

ve

$$\tau = \hat{\mu} K = \frac{d\Sigma}{dK} \quad (\text{A.16})$$

yazılabilir. Bütün K ' lar için

$$\hat{\mu} = \frac{1}{K} \frac{d\Sigma}{dK} > 0 \quad (\text{A.17})$$

olduğunu kabul ediyoruz. Ayrıca, μ klasik Lamé sabiti olmak üzere

$$\hat{\mu}(0, Y) = \mu(Y) \quad (\text{A.18})$$

dir. Eğer bütün K ' lar için

$$\frac{d\hat{\mu}}{dK} < 0 \quad (\text{A.19})$$

ise ortam kaymada uniform (düzgün) olarak yumuşama (softening in shear), fakat eğer bütün K ' lar için

$$\frac{d\hat{\mu}}{dK} > 0 \quad (\text{A.20})$$

ise kaymada uniform olarak sertleşen (hardening in shear) davranışı gösterir. (A.16) türetilerek,

$$K^2 \frac{d\hat{\mu}}{dK} = K \frac{d\tau}{dK} - \tau \quad (\text{A.21})$$

yazılabileceği için yumuşayan malzemeler için

$$K \frac{d\tau}{dK} < \tau \quad (\text{A.22})$$

sertleşen malzemeler için ise

$$K \frac{d\tau}{dK} > \tau \quad (\text{A.23})$$

olacağı ortaya çıkar. Şimdi p basınç fonksiyonunun genel olarak X_1 ve X_2 'nin yanında X_3 'ün de fonksiyonu olacağını dikkate alarak, (A.1) ile tanımlanan hareketin denklemlerini, hareketi etkileyen kütle kuvvetleri bulunmadığında, referans konumunda

$$t_{11,1} - u_{3,1}t_{11,3} = 0, \quad t_{22,2} - u_{3,2}t_{22,3} = 0, \quad t_{13,1} + t_{23,2} + t_{33,3} = \rho_0 \ddot{u}_3 \quad (\text{A.24})$$

şeklinde yazılabilir (A.24)'de u_3 'ün üzerindeki noktalar zamana göre kısmi türevleri göstermektedirler. (A.11)'deki gerilme bileşenleri kullanarak ve bazı ara işlemlerden sonra (A.24) denklemleri

$$\begin{aligned} (-p + \Phi)_{,1} + u_{3,1}p_{,3} &= 0 \\ (-p + \Phi)_{,2} + u_{3,2}p_{,3} &= 0 \\ (\Phi u_{3,1})_{,1} + (\Phi u_{3,2})_{,2} - \rho_0 \ddot{u}_3 &= p_{,3} \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

formuna indirgenebilirler. (A.25)'deki son denklemden

$$p_{,3} = K_0(X_1, X_2, X_3) \quad (\text{A.26})$$

olduğu görülür. Bu denklem integre edilirse,

$$p_{,3} = K_0(X_1, X_2, t)X_3 + K_1(X_1, X_2, t) \quad (\text{A.27})$$

elde edilir. Burada K_0 ve K_1 keyfi fonksiyonlardır. (A.27), (A.25)'deki ilk iki denklemde kullanılırsa

$$K_{0,1} = 0, \quad K_{0,2} = 0 \quad (\text{A.28})$$

olması gerektiği ortaya çıkar. Buradan f da keyfi bir fonksiyon olmak üzere

$$K_0 = f(t) \quad (\text{A.29})$$

olarak bulunur. Bu sonuç dikkate alınır (A.25)'deki ilk iki denklem

$$-K_{1,1} + u_{3,1}f(t) + \Phi_{,1} = 0, \quad -K_{1,2} + u_{3,2}f(t) + \Phi_{,2} = 0 \quad (\text{A.30})$$

formlarına dönüşürler. Bu son denklemler integre edilerek, g keyfi bir fonksiyon olmak üzere K_1

$$K_1 = \Phi + u_3 f(t) - g(t) \quad (\text{A.31})$$

olarak elde edilir ve p için

$$p = f(t)X_3 + \Phi + u_3 f(t) - g(t) \quad (\text{A.32})$$

yazılır. (A.32) kullanılarak (A.11)'de verilen gerilme bileşenleri için aşağıdaki ifadeler elde edilirler;

$$\begin{aligned} t_{11} = t_{22} &= -f(t)X_3 - u_3 f(t) - g(t), \quad t_{12} = t_{21} = 0, \\ t_{\alpha 3} &= \Phi u_{3,\alpha}, t_{33} = -f(t)X_3 - u_3 f(t) - g(t) + K^2 \Phi \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Dikkat edilirse, $X_3 \rightarrow \infty$ için t_{11} , t_{22} , t_{33} gerilmeleri sonsuza gider. Diğer taraftan bu limitle fiziksel nedenle gerilmelerin sınırlı kalmaları gerekir. Bunun sağlanması için

$$f(t) \equiv 0 \quad (\text{A.34})$$

olması gerektiği ortaya çıkar. Diğer taraftan ortamın doğal durumunu gerilmesiz kabul edersek, bunun sağlanması için

$$g(t) \equiv 0 \quad (\text{A.35})$$

olması gerekir. Sonuçta bu varsayım altında

$$p = \Phi \quad (\text{A.36})$$

ve

$$t_{\alpha\beta} = 0, \quad t_{\alpha 3} = \Phi u_{3,\alpha}, \quad t_{33} = K^2 \Phi \quad (\text{A.37})$$

olarak bulunur. Nonlineer hareket denklemlerinde gerilme-şekil değiştirme bağıntılarında K^4 ve üzeri terimler ihmal edilirse (A.24)' deki ilk iki hareket denklemi özdeş olarak sağlanır ve üçüncü denklem de

$$(\Phi u_{3,1},1) + (\Phi u_{3,2},2) = \rho_0 \ddot{u}_3 \quad (\text{A.38})$$

olarak yazılır. Şimdi bu denklemin hiperbolik bir denklem olması koşulunun Σ üzerinde getireceği kısıtlamayı ortaya çıkartmaya çalışalım. $\rho_0 > 0$ olduğu için, (A.38) denklemin sol tarafının bu bölgede eliptik bir operatör olması gereklidir. Bunun için de

$$\left(\frac{1}{K} \frac{d\Phi}{dK} u_{3,1}^2 + \Phi\right) \left(\frac{1}{K} \frac{d\Phi}{dK} u_{3,2}^2 + \Phi\right) - \left(\frac{1}{K} \frac{d\Phi}{dK}\right)^2 u_{3,1}^2 u_{3,2}^2 > 0 \quad (\text{A.39})$$

olması gereklidir. Buradan da (A.16) ve (A.21) kullanılarak

$$\Phi \left(K \frac{d\Phi}{dK} + \Phi\right) = \Phi \frac{d\tau}{dK} > 0 \quad (\text{A.40})$$

olması gerektiği ortaya çıkar. Daha önce $\Phi = \mu > 0$ olduğu kabul edildiği için, (A.40) eşitsizliğinin gerçekleşmesi için

$$K \frac{d\Phi}{dK} + \Phi = \frac{d\tau}{dK} > 0 \quad (\text{A.41})$$

olması gerektiği görülür. (A.16) kullanılırsa (A.41) eşitsizliği

$$\frac{d^2 \Sigma}{dK^2} > 0 \quad (\text{A.42})$$

olarak yazılabilir. Biz bu çalışmada sonlu fakat küçük genlikli bir dalga yayılması probleminin asimptotik çözümü ile ilgilendiğimiz için gerilme – şekil değiştirme bağıntılarının, (A.37) ve hareket denkleminin, (A.38), yaklaşık formlarını kullanacağız. Bu yaklaşık denklemleri türetmek amacı ile Σ ' nın I ' nın analitik fonksiyonu olduğunu kabul ederek, bu fonksiyonu $I - 3$ ' ün kuvvetleri cinsinden aşağıdaki gibi bir seri formunda yazabiliriz:

$$\Sigma(I, Y) = \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_p (I - 3)^p \quad (\text{A.43})$$

Burada α_p sabitleri

$$\alpha_p = \frac{d^v \Sigma}{dI^p} (3) \quad (\text{A.44})$$

olarak tanımlanmaktadır ve referans konumunda enerjinin sıfır olması için

$$\alpha_p = 0 \quad (\text{A.45})$$

olması gerekir. bu dikkate alınarak (A.43)' den

$$\frac{d\Sigma}{dI} = \alpha_1 + 2\alpha_2 K^2 + O(K^4) \quad (\text{A.46})$$

yazılır ve (A.46) kullanılarak gerilme bileşenleri

$$t_{\alpha\beta} = 0, \quad t_{\alpha 3} = 2(\alpha_1 + 2\alpha_2 K^2)u_{3,\alpha} + O(K^5), \quad t_{3,3} = 2\alpha_1 K^2 + O(K^4) \quad (\text{A.47})$$

olarak bulunur. (A.46)' dan (A.38) hareket denklemi de

$$\ddot{u}_3 - c^2 u_{3,\Delta\Delta} - \frac{(\rho c^2)_{,\Delta}}{\rho} u_{3,\Delta} = n[N(u_3)]_{,\Delta} + \frac{(\rho n)_{,\Delta}}{\rho} N(u_3) \quad (\text{A.48})$$

olarak yaklaştırılır. Burada

$$c^2 = \frac{\mu}{\rho_0}, \quad \mu = 2\alpha_1, \quad n = \frac{4\alpha_2}{\rho_0} \quad (\text{A.49})$$

ve

$$N(u_3) = (u_{3,1}Q(u_3))_{,1} + (u_{3,2}Q(u_3))_{,2}, \quad Q(u_3) = K^2 = u_{3,\Delta}u_{3,\Delta} \quad (\text{A.50})$$

olarak tanımlanmaktadır ve c lineer dalgaların yayılma hızını göstermektedir. Bu yaklaşımda (yani mertebesi K^4 ve daha yüksek terimler ihmal edildiğinde) (A.14) ile tanımlanan genelleştirilmiş kayma modülü

$$\hat{\mu} = \rho_0(c^2 + nK^2) \quad (\text{A.51})$$

dir. Dikkat edilirse $c^2 > 0$ olduğu için eğer $n > 0$ ise K arttıkça $\hat{\mu}$ monoton olarak artacak, fakat $n < 0$ ise monoton olarak azalacaktır. Dolayısı ile eğer $n > 0$ ise ortam kayma hareketinde sertleşen bir davranış, fakat $n < 0$ ise yumuşayan bir davranış gösterecektir. $\mu(K) > 0$ kabul edildiği için, bütün K ' lar için

$$52c^2 + nK^2 > 0 \quad (\text{A.52})$$

olmalıdır. Diğer taraftan, (A.48) denkleminin hiperbolik olması için de (A.41) veya (A.42)' den bütün K ' lar için

$$c^2 + 3nK^2 > 0 \quad (\text{A.53})$$

eşitsizliğinin sağlanması gerektiği görülür. $n > 0$ olduğunda (A.53) ve (A.54) eşitsizlikleri bütün K ' lar için sağlanır. Fakat $n < 0$ olduğunda bu eşitsizliklerin her ikisinin birden sağlanabilmesi için

$$0 < K^2 < \frac{c^2}{|3n|} \quad (\text{A.54})$$

koşulunun sağlanması gerekli ve yeterlidir. K kayma deformasyonunu ölçtüğü için (A.54) dalga hareketinin genliğine bir kısıtlama getirir. Biz sonlu fakat küçük genlikli dalga hareketleri ile ilgilendiğimiz için bunun sağlandığını kabul edebiliriz.



EK B:

(3.72) denkleminin katsayıları $\mathcal{D}_j, \mathcal{E}_j (j = 1, 2, \dots, 8)$ 'nin açık ifadeleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 &= (\mu_{0_1})^{(-1/2)} (2\Upsilon_\alpha^{(1)}) \left(\omega \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1 \partial t_1} + kc_1^2 \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} + R_1 \left(2i\omega \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_2} + \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial t_2} \right) - \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial t_1^2} + c_1^2 \left(2ik \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} \right) \right), \\ \mathcal{D}_2 &= -\frac{1}{kc_1^2 p_1 \sqrt{\mu_{0_1}}} 2iR_1 \left(\omega^2 \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial t_1^2} + kc_1^2 \left(2\omega \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1 \partial t_1} + kc_1^2 \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} \right) \right), \\ \mathcal{D}_3 &= -\frac{n_{0_1} (\mu_{0_1})^{(-3/2)}}{16} \mathcal{A}_1^2 \bar{\mathcal{A}}_1 R_1 (2R_2 \bar{R}_2 (16k^4 (3 - 2p_1^2 + 3p_1^4) + \\ &\quad 16ik^3 p_1 (-1 + 3p_1^2) \beta_1 + 12ik p_1 \beta_1^3 - 3\beta_1^4) + \\ &\quad 3R_1 \bar{R}_1 (16k^4 (1 + p_1^2)^2 + 16ik^3 (p_1 + p_1^3) \beta_1 + 4ik p_1 \beta_1^3 - \beta_1^4)) + \\ &\quad \frac{n_{0_1} (\mu_{0_1})^{(-3/2)} \lambda_1}{8} i \mathcal{A}_1^2 \bar{\mathcal{A}}_1 R_1 (2R_2 \bar{R}_2 (-4k^2 + 3(2kp_1 + i\beta_1)^2 (2kp_1 - i\beta_1) + \\ &\quad R_1 \bar{R}_1 (24k^3 (p_1 + p_1^3) + 4ik^2 (1 + 3p_1^2) \beta_1 + 6kp_1 \beta_1^2 + 3i\beta_1^3))), \\ \mathcal{D}_4 &= \mu_{0_1}^{(-1/2)} (2\Upsilon_\alpha^{(1)}) \left(\omega \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1 \partial t_1} + kc_1^2 \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} + R_2 \left(2i\omega \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_2} + \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial t_2} \right) - \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial t_1^2} + c_1^2 \left(2ik \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} \right) \right), \\ \mathcal{D}_5 &= \frac{1}{kc_1^2 p_1 \sqrt{\mu_{0_1}}} 2iR_2 \left(\omega^2 \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial t_1^2} + kc_1^2 \left(2\omega \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1 \partial t_1} + kc_1^2 \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} \right) \right), \\ \mathcal{D}_6 &= \frac{n_{0_1} (\mu_{0_1})^{(-3/2)}}{16} \mathcal{A}_1^2 \bar{\mathcal{A}}_1 R_2 (3R_2 \bar{R}_2 (-16k^4 (1 + p_1^2)^2 + 16ik^3 p_1 + p_1^3 \beta_1 + \\ &\quad 4ik p_1 \beta_1^3 + \beta_1^4) + 2R_1 \bar{R}_1 (-16k^4 (3 - 2p_1^2 + 3p_1^4) + 16ik^3 (-1 + 3p_1^2)) \beta_1 + \\ &\quad 12ik p_1 \beta_1^3 + 3\beta_1^4) + \frac{n_{0_1} (\mu_{0_1})^{(-3/2)} \lambda_1}{8} i \mathcal{A}_1^2 \bar{\mathcal{A}}_1 R_2 (2R_1 \bar{R}_1 (-4k^2 + \\ &\quad 3(2kp_1 - i\beta_1)^2 (-2kp_1 + i\beta_1) + R_2 \bar{R}_2 (-24ik^3 (p_1 + p_1^3) - \\ &\quad 4k^2 (1 + 3p_1^2) \beta_1 - 6ik p_1 \beta_1^2 - 3\beta_1^3))), \\ \mathcal{D}_7 &= \frac{n_{0_1} (\mu_{0_1})^{(-3/2)}}{16} \mathcal{A}_1^2 \bar{\mathcal{A}}_1 R_1^2 \bar{R}_2 (-48k^4 + (2kp_1 + i\beta_1) (8k^3 p_1 (-2 + 9p_1^2) + \\ &\quad 84ik^2 p_1^2 \beta_1 - 30kp_1 \beta_1^2 - 3i\beta_1^3) + \frac{n_{0_1} (\mu_{0_1})^{(-3/2)} \lambda_1}{8} i \mathcal{A}_1^2 \bar{\mathcal{A}}_1 R_1^2 \bar{R}_2 (-4k^2 + \\ &\quad 3(2kp_1 + i\beta_1)^2 (-2kp_1 + i\beta_1)), \end{aligned}$$

$$\mathcal{D}_8 = \frac{n_{0_1}(\mu_{0_1})^{(-3/2)}}{16} \mathcal{A}_1^2 \bar{\mathcal{A}}_1 \bar{R}_1^2 \bar{R}_2^2 (-48k^4 + (2kp_1 - i\beta_1)(8k^3 p_1(-2 + 9p_1^2) + 84ik^2 p_1^2 \beta_1 - 30kp_1 \beta_1^2 + 3i\beta_1^3)) + \frac{n_{0_1}(\mu_{0_1})^{(-3/2)} \lambda_1}{8} i \mathcal{A}_1^2 \bar{\mathcal{A}}_1 \bar{R}_1 \bar{R}_2^2 (-4k^2 + 3(2kp_1 - i\beta_1)^2 (2kp_1 + i\beta_1)).$$

Burada

$$\Upsilon_\alpha^{(1)} = \frac{\partial R_\alpha}{\partial k} + Vg \frac{\partial R_\alpha}{\partial \omega} \quad \alpha = 1, 2, 3, 4$$

dir.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= (\mu_{0_2})^{(-1/2)} (2\Upsilon_\alpha^{(2)}) \left(\omega \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1 \partial t_1} + kc_2^2 \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} + R_3 (2i\omega \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_2} + \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial t_2}) - \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial t_1^2} + c_2^2 (2ik \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2}) \right), \\ \mathcal{E}_2 &= -\frac{1}{kc_2^2 p_1 \sqrt{\mu_{0_2}}} 2iR_3 (\omega^2 \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial t_1^2} + kc_2^2 (2\omega \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1 \partial t_1} + kc_2^2 \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2})), \\ \mathcal{E}_3 &= -\frac{n_{0_1}(\mu_{0_2})^{(-3/2)}}{16} \mathcal{A}_1^2 \bar{\mathcal{A}}_1 R_3 (2R_4 \bar{R}_4 (16k^4 (3 - 2p_2^2 + 3p_2^4) + 16ik^3 p_2 (-1 + 3p_2^2) \beta_2 + 12ikp_2 \beta_2^3 - 3\beta_2^4) + 3R_3 \bar{R}_3 (16k^4 (1 + p_2^2)^2 + 16ik^3 (p_2 + p_2^3) \beta_2 + 4ikp_2 \beta_2^3 - \beta_2^4)) + \frac{n_{0_2}(\mu_{0_2})^{(-3/2)} \lambda_2}{8} i \mathcal{A}_1^2 \bar{\mathcal{A}}_1 R_3 (2R_4 \bar{R}_4 (-4k^2 + 3(2kp_2 + i\beta_2)^2 (2kp_2 - i\beta_2) + R_3 \bar{R}_3 (24k^3 (p_2 + p_2^3) + 4ik^2 (1 + 3p_2^2) \beta_2 + 6kp_2 \beta_2^2 + 3i\beta_2^3))), \\ \mathcal{E}_4 &= \mu_{0_2}^{(-1/2)} (2\Upsilon_\alpha^{(2)}) \left(\omega \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1 \partial t_1} + kc_2^2 \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} + R_4 (2i\omega \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_2} + \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial t_1}) - \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial t_1^2} + c_2^2 (2ik \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2}) \right), \\ \mathcal{E}_5 &= \frac{1}{kc_2^2 p_2 \sqrt{\mu_{0_2}}} 2iR_4 (\omega^2 \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial t_1^2} + kc_2^2 (2\omega \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1 \partial t_1} + kc_2^2 \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2})), \\ \mathcal{E}_6 &= \frac{n_{0_2}(\mu_{0_2})^{(-3/2)}}{16} \mathcal{A}_1^2 \bar{\mathcal{A}}_1 R_4 (3R_4 \bar{R}_4 (-16k^4 (1 + p_2^2)^2 + 16ik^3 p_2 + p_2^3 \beta_2 + 4ikp_2 \beta_2^3 + \beta_2^4) + 2R_3 \bar{R}_3 (-16k^4 (3 - 2p_2^2 + 3p_2^4) + 16ik^3 (-1 + 3p_2^2)) \beta_2 + 12ikp_2 \beta_2^3 + 3\beta_2^4)) + \frac{n_{0_2}(\mu_{0_2})^{(-3/2)} \lambda_2}{8} i \mathcal{A}_1^2 \bar{\mathcal{A}}_1 R_4 (2R_3 \bar{R}_3 (-4k^2 + 3(2kp_2 - i\beta_2)^2 (-2kp_2 + i\beta_2) + R_4 \bar{R}_4 (-24ik^3 (p_2 + p_2^3) - 4k^2 (1 + 3p_2^2) \beta_2 - 6ikp_2 \beta_2^2 - 3\beta_2^3))), \\ \mathcal{E}_7 &= \frac{n_{0_2}(\mu_{0_2})^{(-3/2)}}{16} \mathcal{A}_1^2 \bar{\mathcal{A}}_1 R_3^2 \bar{R}_4 (-48k^4 + (2kp_2 + i\beta_2)(8k^3 p_2(-2 + 9p_2^2) + 84ik^2 p_2^2 \beta_2 - 30kp_2 \beta_2^2 - 3i\beta_2^3) + \frac{n_{0_2}(\mu_{0_2})^{(-3/2)} \lambda_2}{8} i \mathcal{A}_1^2 \bar{\mathcal{A}}_1 R_3^2 \bar{R}_4 (-4k^2 + 3(2kp_2 + i\beta_2)^2 (-2kp_2 + i\beta_2)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_8 = & \frac{n_{0_2}(\mu_{0_2})^{(-3/2)}}{16} \mathcal{A}_1^2 \bar{\mathcal{A}}_1 \bar{R}_3 \bar{R}_4^2 (-48k^4 + (2kp_2 - i\beta_2)(8k^3 p_2(-2 + 9p_2^2) + \\ & 84ik^2 p_2^2 \beta_2 - 30kp_2 \beta_2^2 + 3i\beta_2^3)) + \frac{n_{0_2}(\mu_{0_2})^{(-3/2)} \lambda_2}{8} i \mathcal{A}_1^2 \bar{\mathcal{A}}_1 \bar{R}_3 \bar{R}_4^2 \\ & (-4k^2 + 3(2kp_2 - i\beta_2)^2 (2kp_2 + i\beta_2)). \end{aligned}$$

Burada

$$\Upsilon_\alpha^{(2)} = \frac{\partial R_\alpha}{\partial k} + Vg \frac{\partial R_\alpha}{\partial \omega} \quad \alpha = 1, 2, 3, 4$$

dir.

(3.83)-(3.84) denklemlerindeki özel çözümlerin katsayıları \mathcal{F}_j ve \mathcal{G}_j ($j = 1, \dots, 8$)'nin açık ifadeleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= -\frac{\mathcal{D}_2 - 2ikp_1 \mathcal{D}_1}{4c_1^2 k^2 p_1^2}, \\ \mathcal{F}_2 &= \frac{i\mathcal{D}_2}{4c_1^2 kp_1}, \\ \mathcal{F}_3 &= -\frac{\mathcal{D}_5 + 2ikp_1 \mathcal{D}_4}{4c_1^2 k^2 p_1^2}, \\ \mathcal{F}_4 &= -\frac{i\mathcal{D}_5}{4c_1^2 kp_1}, \\ \mathcal{F}_5 &= -\frac{\mathcal{D}_3}{c_1^2 (\beta_1 - \lambda_1) (-2ikp_1 + \beta_1 - \lambda_1)}, \\ \mathcal{F}_6 &= -\frac{\mathcal{D}_6}{c_1^2 (\beta_1 - \lambda_1) (2ikp_1 + \beta_1 - \lambda_1)}, \\ \mathcal{F}_7 &= \frac{\mathcal{D}_7}{c_1^2 (8k^2 p_1^2 + 6ikp_1 (\beta_1 - \lambda_1) - (\beta_1 - \lambda_1)^2)}, \\ \mathcal{F}_8 &= \frac{\mathcal{D}_8}{c_1^2 (8k^2 p_1^2 - 6ikp_1 (\beta_1 - \lambda_1) - (\beta_1 - \lambda_1)^2)}. \end{aligned}$$

$$\mathcal{G}_1 = -\frac{\mathcal{E}_2 - 2ikp_2\mathcal{E}_1}{4c_2^2k^2p_2^2},$$

$$\mathcal{G}_2 = \frac{i\mathcal{E}_2}{4c_2^2kp_2},$$

$$\mathcal{G}_3 = -\frac{\mathcal{E}_5 + 2ikp_2\mathcal{E}_4}{4c_2^2k^2p_2^2},$$

$$\mathcal{G}_4 = -\frac{i\mathcal{E}_5}{4c_2^2kp_2},$$

$$\mathcal{G}_5 = -\frac{\mathcal{E}_3}{c_2^2(\beta_2 - \lambda_2)(-2ikp_2 + \beta_2 - \lambda_2)},$$

$$\mathcal{G}_6 = -\frac{\mathcal{E}_6}{c_2^2(\beta_2 - \lambda_2)(2ikp_2 + \beta_2 - \lambda_2)},$$

$$\mathcal{G}_7 = \frac{\mathcal{E}_7}{c_2^2(8k^2p_2^2 + 6ikp_2(\beta_2 - \lambda_2) - (\beta_2 - \lambda_2)^2)},$$

$$\mathcal{G}_8 = \frac{\mathcal{E}_4}{c_2^2(8k^2p_2^2 - 6ikp_2(\beta_2 - \lambda_2)(\beta_2 - \lambda_2)^2)}$$

(3.88) denklemindeki F vektörünün bileşenleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
F_1 = & (e^{h_1(-3ikp_1 - \beta_1 + \lambda_1)} n_{0_1} (R_2^2(2kp_1 + i(\beta_1 - \lambda_1))(4kp_1 + i(\beta_1 - \lambda_1)) \\
& (e^{2ikp_1 h_1} \bar{R}_2(4kp_1 - i\beta_1 + i\lambda_1)(2kp_1 - 3i\beta_1 + 2i\lambda_1) \\
& (48k^4(1 + p_1^2)^2 - 48ik^3(p_1 + p_1^3)\beta_1 - 12ikp_1\beta_1^3 - 3\beta_1^4 + 2(24ik^3(p_1 + p_1^3) + \\
& 4k^2(1 + 3p_1^2)\beta_1 + 6ikp_1\beta_1^2 + 3\beta_1^3)\lambda_1) + \\
& \bar{R}_1(6ikp_1 + 3\beta_1 - 2\lambda_1)(\beta_1 - \lambda_1)(-48k^4 + (2kp_1 - i\beta_1) \\
& (-16k^3 p_1 + 72k^3 p_1^3 - 84ik^2 p_1^2 \beta_1 - 30kp_1 \beta_1^2 + 3i\beta_1^3 + 2 \\
& (-4ik^2 + 3i(2kp_1 - i\beta_1)^2)\lambda_1))) + e^{4ikp_1 h_1} R_1^2(2kp_1 - i(\beta_1 - \lambda_1)) \\
& (4kp_1 - i(\beta_1 - \lambda_1))(\bar{R}_1(4kp_1 + i(\beta_1 - \lambda_1)) \\
& (2kp_1 + 3i\beta_1 - 2i\lambda_1)(48k^4(1 + p_1^2)^2 + \\
& 48ik^3(p_1 + p_1^3)\beta_1 + 12ikp_1\beta_1^3 - 3\beta_1^4 + 2(-24ik^3(p_1 + p_1^3) + \\
& 4k^2(1 + 3p_1^2)\beta_1 - 6ikp_1\beta_1^2 + 3\beta_1^3)\lambda_1) + e^{2ikp_1 h_1} \bar{R}_2(-6ikp_1 + 3\beta_1 - 2\lambda_1) \\
& (\beta_1 - \lambda_1)(-48k^4 + (2kp_1 + i\beta_1)(-16k^3 p_1 + 72k^3 p_1^3 + 84ik^2 p_1^2 \beta_1 - \\
& 30kp_1 \beta_1^2 - 3i\beta_1^3 + 2 \\
& (4ik^2 - 3i(2kp_1 + i\beta_1)^2)\lambda_1))) + 2e^{2ikp_1 h_1} R_1 R_2(16k^2 p_1^2 + (\beta_1 - \lambda_1)^2) \\
& (e^{2ikp_1 h_1} (\bar{R}_2(2kp_1 - i(\beta_1 - \lambda_1))(2kp_1 + 3i\beta_1 - 2i\lambda_1) \\
& (48k^4 + 48k^4 p_1^4 - 3\beta_1^4 + 48ik^3 p_1^3(\beta_1 - \lambda_1) - 4ikp_1(4k^2 - 3\beta_1^2)(\beta_1 - \lambda_1) + \\
& 8k^2 \beta_1 \lambda_1 + 6\beta_1^3 \lambda_1 + 8k^2 p_1^2(-4k^2 + 3\beta_1 \lambda_1)) + \\
& \bar{R}_1(2kp_1 + i(\beta_1 - \lambda_1))(2kp_1 - 3i\beta_1 + 2i\lambda_1)(48k^4 + 48k^4 p_1^4 - 3\beta_1^4 - \\
& 48ik^3 p_1^3(\beta_1 - \lambda_1) + 4ikp_1(4k^2 - 3\beta_1^2)(\beta_1 - \lambda_1) + 8k^2 \beta_1 \lambda_1 + \\
& 6\beta_1^3 \lambda_1 + 8k^2 p_1^2(-4k^2 + 3\beta_1 \lambda_1)))))) \\
& (32c_1^2(\beta_1 - \lambda_1)(-2ikp_1 + \beta_1 - \lambda_1)(2ikp_1 + \beta_1 - \lambda_1) \\
& (-4ikp_1 + \beta_1 - \lambda_1)(4ikp_1 + \beta_1 - \lambda_1)\mu_{0_1} \sqrt{e^{\beta_1 h_1} \mu_{0_1}}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2 = & \frac{1}{16} ((R_2^2 n_{01} (\bar{R}_2 (-4ikp_1 - \beta_1 + \lambda_1) \\
& (48k^4 (1 + p_1^2)^2 - 48ik^3 (p_1 + p_1^3) \beta_1 - 12ikp_1 \beta_1^3 - 3\beta_1^4 + 2 \\
& (24ik^3 (p_1 + p_1^3) + 4k^2 (1 + 3p_1^2) \beta_1 + 6ikp_1 \beta_1^2 + 3\beta_1^3) \lambda_1) + \\
& \bar{R}_1 (\beta_1 - \lambda_1) (-48k^4 + (2kp_1 - i\beta_1) (-16k^3 p_1 + 72k^3 p_1^3 - \\
& 84ik^2 p_1^2 \beta_1 - 30kp_1 \beta_1^2 + 3i\beta_1^3 + 2(-4ik^2 + 3i(2kp_1 - i\beta_1)^2) \lambda_1))) \\
& (c_1^2 (\beta_1 - \lambda_1) (2ikp_1 + \beta_1 - \lambda_1) (4ikp_1 + \beta_1 - \lambda_1) \mu_{01}^{3/2}) + \\
& (R_1^2 n_{01} (\bar{R}_1 (4ikp_1 - \beta_1 + \lambda_1) (48k^4 (1 + p_1^2)^2 + 48ik^3 (p_1 + p_1^3) \beta_1 + 12ikp_1 \beta_1^3 - \\
& 3\beta_1^4 + 2(-24ik^3 (p_1 + p_1^3) + 4k^2 (1 + 3p_1^2) \beta_1 - 6ikp_1 \beta_1^2 + 3\beta_1^3) \lambda_1) + \\
& \bar{R}_2 (\beta_1 - \lambda_1) (-48k^4 + (2kp_1 + i\beta_1) (-16k^3 p_1 + 72k^3 p_1^3 + \\
& 84ik^2 p_1^2 \beta_1 - 30kp_1 \beta_1^2 - 3i\beta_1^3 + 2(4ik^2 - 3i(2kp_1 + i\beta_1)^2) \lambda_1))) \\
& (c_1^2 (\beta_1 - \lambda_1) (-2ikp_1 + \beta_1 - \lambda_1) (-4ikp_1 + \beta_1 - \lambda_1) \mu_{01}^{3/2}) + \\
& (2R_1 R_2 n_{01} (\bar{R}_2 (-2ikp_1 - \beta_1 + \lambda_1) (48k^4 + 48k^4 p_1^4 - 3\beta_1^4 + \\
& 48ik^3 p_1^3 (\beta_1 - \lambda_1) - 4ikp_1 (4k^2 - 3\beta_1^2) (\beta_1 - \lambda_1) + 8k^2 \beta_1 \lambda_1 + 6\beta_1^3 \lambda_1 + \\
& 8k^2 p_1^2 (-4k^2 + 3\beta_1 \lambda_1)) + \bar{R}_1 (2ikp_1 - \beta_1 + \lambda_1) (48k^4 + 48k^4 p_1^4 - 3\beta_1^4 - \\
& 48ik^3 p_1^3 (\beta_1 - \lambda_1) + 4ikp_1 (4k^2 - 3\beta_1^2) (\beta_1 - \lambda_1) + 8k^2 \beta_1 \lambda_1 + 6\beta_1^3 \lambda_1 + \\
& 8k^2 p_1^2 (-4k^2 + 3\beta_1 \lambda_1))) (c_1^2 (4k^2 p_1^2 + \\
& (\beta_1 - \lambda_1)^2) (\beta_1 - \lambda_1) \mu_{01}^{3/2}) + \\
& (n_{02} (R_4^2 (2kp_2 + i(\beta_2 - \lambda_2)) (4kp_2 + i(\beta_2 - \lambda_2)) (\bar{R}_4 (-4ikp_2 - \beta_2 + \lambda_2) \\
& (48k^4 (1 + p_2^2)^2 - 48ik^3 (p_2 + p_2^3) \beta_2 - 12ikp_2 \beta_2^3 - 3\beta_2^4 + 2(24ik^3 (p_2 + p_2^3) + \\
& 4k^2 (1 + 3p_2^2) \beta_2 + 6ikp_2 \beta_2^2 + 3\beta_2^3) \lambda_2) + \\
& \bar{R}_3 (\beta_2 - \lambda_2) (-48k^4 + (2kp_2 - i\beta_2) (-16k^3 p_2 + 72k^3 p_2^3 - \\
& 84ik^2 p_2^2 \beta_2 - 30kp_2 \beta_2^2 + 3i\beta_2^3 + 2(-4ik^2 + 3i(2kp_2 - i\beta_2)^2) \lambda_2))) + \\
& R_3^2 (2kp_2 - i(\beta_2 - \lambda_2)) (4kp_2 - i(\beta_2 - \lambda_2)) \\
& (\bar{R}_3 (4ikp_2 - \beta_2 + \lambda_2) (48k^4 (1 + p_2^2)^2 + 48ik^3 (p_2 + p_2^3) \beta_2 + 12ikp_2 \beta_2^3 - \\
& 3\beta_2^4 + 2(-24ik^3 (p_2 + p_2^3) + 4k^2 (1 + 3p_2^2) \beta_2 - 6ikp_2 \beta_2^2 + 3\beta_2^3) \lambda_2) + \\
& \bar{R}_4 (\beta_2 - \lambda_2) (-48k^4 + (2kp_2 + i\beta_2) (-16k^3 p_2 + 72k^3 p_2^3 + \\
& 84ik^2 p_2^2 \beta_2 - 30kp_2 \beta_2^2 - 3i\beta_2^3 + 2(4ik^2 - 3i(2kp_2 + i\beta_2)^2) \lambda_2))) + \\
& 2R_3 R_4 (16k^2 p_2^2 + (\beta_2 - \lambda_2)^2) (\bar{R}_4 (2ikp_2 + \beta_2 - \lambda_2) (48k^4 + 48k^4 p_2^4 - 3\beta_2^4 + \\
& 48ik^3 p_2^3 (\beta_2 - \lambda_2) - 4ikp_2 (4k^2 - 3\beta_2^2) (\beta_2 - \lambda_2) + \\
& 8k^2 \beta_2 \lambda_2 + 6\beta_2^3 \lambda_2 + 8k^2 p_2^2 (-4k^2 + 3\beta_2 \lambda_2)) + \\
& \bar{R}_3 (-2ikp_2 + \beta_2 - \lambda_2) (48k^4 + 48k^4 p_2^4 - \\
& 3\beta_2^4 - 48ik^3 p_2^3 (\beta_2 - \lambda_2) + 4ikp_2 (4k^2 - 3\beta_2^2) (\beta_2 - \lambda_2) + \\
& 8k^2 \beta_2 \lambda_2 + 6\beta_2^3 \lambda_2 + 8k^2 p_2^2 (-4k^2 + 3\beta_2 \lambda_2)))) \\
& (c_2^2 (4k^2 p_2^2 + (\beta_2 - \lambda_2)^2) (16k^2 p_2^2 + (\beta_2 - \lambda_2)^2) (\beta_2 - \lambda_2) \mu_{02}^{3/2})),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_3 = & \frac{1}{32} \mu_0^{3/2} ((R_2^2 n_0 (-\bar{R}_1 (\beta_1 - \lambda_1)) (-96ik^5 p_1^5 + 144k^4 \beta_1 - 144k^4 p_1^4 \beta_1 + \\
& 16k^2 \beta_1^3 + 3\beta_1^5 - 16ip_1^3 (4k^5 - 3k^3 \beta_1^2) - 8k^2 (12k^2 + \beta_1^2) \lambda_1 - \\
& 8p_1^2 (16k^4 \beta_1 + 3k^2 \beta_1^3 - 4k^4 \lambda_1) + 2ip_1 (144k^5 + 40k^3 \beta_1^2 + 9k\beta_1^4 - 16k^3 \beta_1 \lambda_1)) + \\
& \bar{R}_2 (4kp_1 - i(\beta_1 - \lambda_1)) (96k^5 p_1^5 - 48ik^4 p_1^4 \beta_1 + 48k^3 p_1^3 (4k^2 + \beta_1^2) - \\
& i\beta_1 (144k^4 + 16k^2 \beta_1^2 + 3\beta_1^4) + \\
& 8ik^2 (12k^2 + \beta_1^2) \lambda_1 - \\
& 24ik^2 p_1^2 (8k^2 \beta_1 + \beta_1^3 - 4k^2 \lambda_1) + 2p_1 (48k^5 - 8k^3 \beta_1^2 + 3k\beta_1^4 + 16k^3 \beta_1 \lambda_1))) \\
& (c_1^2 (\beta_1 - \lambda_1) (2ikp_1 + \beta_1 - \lambda_1)) + \\
& (2R_1 R_2 n_0 (R_1 (2kp_1 + i(\beta_1 - \lambda_1)) (96k^5 p_1^5 - 48ik^4 p_1^4 \beta_1 + \\
& p_1^3 (-64k^5 + 48k^3 \beta_1^2) - \\
& i\beta_1 (144k^4 + 16k^2 \beta_1^2 + 3\beta_1^4) + 8ik^2 (12k^2 + \beta_1^2) \lambda_1 + \\
& 8ip_1^2 (8k^4 \beta_1 - 3k^2 \beta_1^3 - 4k^4 \lambda_1) + 2kp_1 (3(4k^2 + \beta_1^2)^2 - 16k^2 \beta_1 \lambda_1)) + \\
& \bar{R}_2 (2kp_1 - i(\beta_1 - \lambda_1)) (96k^5 p_1^5 + 48ik^4 p_1^4 \beta_1 + p_1^3 (-64k^5 + 48k^3 \beta_1^2) - \\
& 8ip_1^2 (8k^4 \beta_1 - 3k^2 \beta_1^3 - 4k^4 \lambda_1) + 2kp_1 (3(4k^2 + \beta_1^2)^2 - 16k^2 \beta_1 \lambda_1) + \\
& (144k^4 \beta_1 + 16k^2 \beta_1^3 + 3\beta_1^5 - 8k^2 (12k^2 + \beta_1^2) \lambda_1))) \\
& (c_1^2 (4k^2 p_1^2 + (\beta_1 - \lambda_1)^2) (\beta_1 - \lambda_1)) - (R_1^2 n_0 (-\bar{R}_2 (\beta_1 - \lambda_1) \\
& (96ik^5 p_1^5 + 144k^4 \beta_1 - 144k^4 p_1^4 \beta_1 + 16k^2 \beta_1^3 + 3\beta_1^5 + \\
& 16ip_1^3 (4k^5 - 3k^3 \beta_1^2) - 8k^2 (12k^2 + \beta_1^2) \lambda_1 - 8p_1^2 (16k^4 \beta_1 + 3k^2 \beta_1^3 - 4k^4 \lambda_1) - \\
& 2ip_1 (144k^5 + 40k^3 \beta_1^2 + 9k\beta_1^4 - 16k^3 \beta_1 \lambda_1)) + \bar{R}_1 (4kp_1 + i(\beta_1 - \lambda_1)) \\
& (96k^5 p_1^5 + 48ik^4 p_1^4 \beta_1 + 48k^3 p_1^3 (4k^2 + \beta_1^2) + 24ik^2 p_1^2 (8k^2 \beta_1 + \beta_1^3 - 4k^2 \lambda_1) + \\
& 2p_1 (48k^5 - 8k^3 \beta_1^2 + 3k\beta_1^4 + 16k^3 \beta_1 \lambda_1) + (144k^4 \beta_1 + 16k^2 \beta_1^3 + 3\beta_1^5 - \\
& 8k^2 (12k^2 + \beta_1^2) \lambda_1))) \\
& (c_1^2 (\beta_1 - \lambda_1) (-2ikp_1 + \beta_1 - \lambda_1) (-4ikp_1 + \beta_1 - \lambda_1)) - \\
& (n_0 (R_4^2 (2kp_2 + i(\beta_2 - \lambda_2)) (4kp_2 + i(\beta_2 - \lambda_2)) (-\bar{R}_3 (\beta_2 - \lambda_2) \\
& (-96ik^5 p_2^5 + 144k^4 \beta_2 - 144k^4 p_2^4 \beta_2 + 16k^2 \beta_2^3 + 3\beta_2^5 - \\
& 16ip_2^3 (4k^5 - 3k^3 \beta_2^2) - 8k^2 (12k^2 + \beta_2^2) \lambda_2 - 8p_2^2 (16k^4 \beta_2 + 3k^2 \beta_2^3 - 4k^4 \lambda_2) + \\
& 2ip_2 (144k^5 + 40k^3 \beta_2^2 + 9k\beta_2^4 - 16k^3 \beta_2 \lambda_2)) + \\
& \bar{R}_4 (4kp_2 - i(\beta_2 - \lambda_2)) (96k^5 p_2^5 - 48ik^4 p_2^4 \beta_2 + 48k^3 p_2^3 (4k^2 + \beta_2^2) - \\
& i\beta_2 (144k^4 + 16k^2 \beta_2^2 + 3\beta_2^4) + 8ik^2 (12k^2 + \beta_2^2) \lambda_2 - 24ik^2 p_2^2 (8k^2 \beta_2 + \beta_2^3 - 4k^2 \lambda_2) + \\
& 2p_2 (48k^5 - 8k^3 \beta_2^2 + 3k\beta_2^4 + 16k^3 \beta_2 \lambda_2))) + 2R_3 R_4 (16k^2 p_2^2 + (\beta_2 - \lambda_2)^2) \\
& (\bar{R}_3 (2kp_2 + i(\beta_2 - \lambda_2)) (96k^5 p_2^5 - 48ik^4 p_2^4 \beta_2 + p_2^3 (-64k^5 + 48k^3 \beta_2^2) - \\
& i\beta_2 (144k^4 + 16k^2 \beta_2^2 + 3\beta_2^4) + 8ik^2 (12k^2 + \beta_2^2) \lambda_2 + 8ip_2^2 (8k^4 \beta_2 - 3k^2 \beta_2^3 - 4k^4 \lambda_2) + \\
& 2kp_2 (3(4k^2 + \beta_2^2)^2 - 16k^2 \beta_2 \lambda_2)) + \bar{R}_4 (2kp_2 - i(\beta_2 - \lambda_2)) \\
& (96k^5 p_2^5 + 48ik^4 p_2^4 \beta_2 + p_2^3 (-64k^5 + 48k^3 \beta_2^2) - 8ip_2^2 (8k^4 \beta_2 - 3k^2 \beta_2^3 - 4k^4 \lambda_2) + \\
& 2kp_2 (3(4k^2 + \beta_2^2)^2 - 16k^2 \beta_2 \lambda_2) + (144k^4 \beta_2 + 16k^2 \beta_2^3 + 3\beta_2^5 - 8k^2 (12k^2 + \beta_2^2) \lambda_2))) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \bar{R}_3^2(2kp_2 - i(\beta_2 - \lambda_2))(4kp_2 - i(\beta_2 - \lambda_2))(-\bar{R}_4(\beta_2 - \lambda_2)) \\
& (96ik^5 p_2^5 + 144k^4 \beta_2 - 144k^4 p_2^4 \beta_2 + 16k^2 \beta_2^3 + 3\beta_2^5 + \\
& 16ip_2^3(4k^5 - 3k^3 \beta_2^2) - 8k^2(12k^2 + \beta_2^2)\lambda_2 - \\
& 8p_2^2(16k^4 \beta_2 + 3k^2 \beta_2^3 - 4k^4 \lambda_2) - 2ip_2(144k^5 + 40k^3 \beta_2^2 + 9k\beta_2^4 - 16k^3 \beta_2 \lambda_2)) + \\
& \bar{R}_3(4kp_2 + i(\beta_2 - \lambda_2))(96k^5 p_2^5 + 48ik^4 p_2^4 \beta_2 + 48k^3 p_2^3(4k^2 + \beta_2^2) + \\
& 24ik^2 p_2^2(8k^2 \beta_2 + \beta_2^3 - 4k^2 \lambda_2) + 2p_2(48k^5 - 8k^3 \beta_2^2 + 3k\beta_2^4 + 16k^3 \beta_2 \lambda_2) + \\
& i(144k^4 \beta_2 + 16k^2 \beta_2^3 + 3\beta_2^5 - 8k^2(12k^2 + \beta_2^2)\lambda_2))\sqrt{\mu_{01}} \\
& (c_2^2(4k^2 p_2^2 + (\beta_2 - \lambda_2)^2)(16k^2 p_2^2 + (\beta_2 - \lambda_2)^2)(\beta_2 - \lambda_2)\sqrt{\mu_{02}}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_4 = & e^{-3ikp_2 h_2 - \lambda_2 h_2} n_{02} (e^{4ikp_2 h_2} R_4^2(2kp_2 + i(\beta_2 - \lambda_2))(4kp_2 + i(\beta_2 - \lambda_2)) \\
& (\bar{R}_4(4kp_2 - i\beta_2 + i\lambda_2)(2kp_2 - 3i\beta_2 + 2i\lambda_2) \\
& (48k^4(1 + p_2^2)^2 - 48ik^3(p_2 + p_2^3)\beta_2 - 12ikp_2\beta_2^3 - 3\beta_2^4 + \\
& 2(24ik^3(p_2 + p_2^3) + 4k^2(1 + 3p_2^2)\beta_2 + 6ikp_2\beta_2^2 + 3\beta_2^3)\lambda_2) + \\
& e^{2ikp_2 h_2} \bar{R}_3(6ikp_2 + 3\beta_2 - 2\lambda_2)(\beta_2 - \lambda_2) \\
& (-48k^4 + (2kp_2 - i\beta_2)(-16k^3 p_2 + 72k^3 p_2^3 - 84ik^2 p_2^2 \beta_2 - 30kp_2 \beta_2^2 + 3i\beta_2^3 + \\
& 2(-4ik^2 + 3i(2kp_2 - i\beta_2)^2)\lambda_2)) + R_3^2(2kp_2 - i(\beta_2 - \lambda_2))(4kp_2 - i(\beta_2 - \lambda_2)) \\
& (e^{2ikp_2 h_2} \bar{R}_3(4kp_2 + i(\beta_2 - \lambda_2))(2kp_2 + 3i\beta_2 - 2i\lambda_2)(48k^4(1 + p_2^2)^2 + \\
& 48ik^3(p_2 + p_2^3)\beta_2 + 12ikp_2\beta_2^3 - 3\beta_2^4 + \\
& 2(-24ik^3(p_2 + p_2^3) + 4k^2(1 + 3p_2^2)\beta_2 - 6ikp_2\beta_2^2 + 3\beta_2^3)\lambda_2) + \\
& \bar{R}_3(-6ikp_2 + 3\beta_2 - 2\lambda_2)(\beta_2 - \lambda_2)(-48k^4 + (2kp_2 + i\beta_2) \\
& (-16k^3 p_2 + 72k^3 p_2^3 + 84ik^2 p_2^2 \beta_2 - 30kp_2 \beta_2^2 - 3i\beta_2^3 + \\
& 2(4ik^2 - 3i(2kp_2 + i\beta_2)^2)\lambda_2)) + 2e^{2ikp_2 h_2} R_3 R_4(16k^2 p_2^2 + (\beta_2 - \lambda_2)^2) \\
& (\bar{R}_4(2kp_2 - i(\beta_2 - \lambda_2))(2kp_2 + 3i\beta_2 - 2i\lambda_2) \\
& (48k^4 + 48k^4 p_2^4 - 3\beta_2^4 + 48ik^3 p_2^3(\beta_2 - \lambda_2) - \\
& 4ikp_2(4k^2 - 3\beta_2^2)(\beta_2 - \lambda_2) + 8k^2 \beta_2 \lambda_2 + 6\beta_2^3 \lambda_2 + 8k^2 p_2^2(-4k^2 + 3\beta_2 \lambda_2)) + \\
& e^{2ih_2 k p_2} \bar{R}_3(2kp_2 + i(\beta_2 - \lambda_2))(2kp_2 - 3i\beta_2 + 2i\lambda_2) \\
& (48k^4 + 48k^4 p_2^4 - 3\beta_2^4 - 48ik^3 p_2^3(\beta_2 - \lambda_2) + \\
& 4ikp_2(4k^2 - 3\beta_2^2)(\beta_2 - \lambda_2) + 8k^2 \beta_2 \lambda_2 + 6\beta_2^3 \lambda_2 + 8k^2 p_2^2(-4k^2 + 3\beta_2 \lambda_2) \\
& (32c_2^2(\beta_2 - \lambda_2)(-2ikp_2 + \beta_2 - \lambda_2)(2ikp_2 + \beta_2 - \lambda_2)(-4ikp_2 + \beta_2 - \lambda_2) \\
& (4ikp_2 + \beta_2 - \lambda_2)(e^{-\beta_2 h_2} \mu_{02})^{3/2}
\end{aligned}$$

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Dicle TUNA

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:** 2012, Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR/ SUNUMLAR :

- Tuna D., Deliktaş Özdemir E., ve Ahmetolan S. 2021: Heterojen İki Tabakalı Ortamda Doğrusal Olmayan Yatay Kayma Dalgalarının Yayılımı. 22. Ulusal Mekanik Kongresi, 06-10 Eylül 2021, Adana. (kabul edildi)