

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

GARDNER TİPİ DENKLEMLER İÇİN WHITHAM MODÜLASYON TEORİSİ



DOKTORA TEZİ
Günay ASLANOVA

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Programı

TEMMUZ 2021

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

GARDNER TİPİ DENKLEMLER İÇİN WHITHAM MODÜLASYON TEORİSİ



DOKTORA TEZİ

**Günay ASLANOVA
(509152204)**

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Semra AHMETOLAN

TEMMUZ 2021

İTÜ, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü'nün 509152204 numaralı Doktora Öğrencisi Günay ASLANOVA, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “GARDNER TİPİ DENKLEMLER İÇİN WHITHAM MODÜLASYON TEORİSİ” başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Doç. Dr. Semra AHMETOLAN**

İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Nalan ANTAR**

İstanbul Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Ali YAPAR

İstanbul Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Durmuş DAĞHAN

Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Cüneyt UTKU

TÜBİTAK

Teslim Tarihi : **10 Haziran 2021**

Savunma Tarihi : **13 Temmuz 2021**





Aileme,



ÖNSÖZ

Doktora tez çalışmamın her aşamasında beni yönlendiren, çalışma disipliniyle bana örnek olan, bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım tez danışman hocam Doç. Dr. Semra AHMETOLAN'a en içten teşekkürlerimi sunarım. Tez çalışmasının planlanmasında ve yürütülmesinde desteğini eksik etmeyen, çalışmanın zenginleşmesine katkı sağlayan Arş. Gör. Dr. Ali DEMİRCİ'ye teşekkür ederim. Bu sürece değerli düşünce ve eleştirileriyle katkıda bulunan tez izleme komitesi üyeleri Prof. Dr. Nalan ANTAR'a, Doç. Dr. Cihan BAYINDIR'a ve Dr. Öğr. Üyesi Cüneyt UTKU'ya teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca zaman ayırıp tez çalışmamı değerlendiren, tez savunma sınavına bilgi ve olumlu görüşleriyle katkıda bulunan Prof. Dr. Ali YAPAR'a ve Prof. Dr. Durmuş DAĞHAN'a teşekkür ederim. Tez çalışmam süresince sabır ve anlayış gösteren, her koşulda yanımda olan sevgili aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu tez çalışması, "Bilimsel Araştırma Projesi" kapsamında İstanbul Teknik Üniversitesi tarafından desteklenmiştir (Proje numarası: TGA-2018-41318). Desteklerinden dolayı İstanbul Teknik Üniversitesi'ne teşekkür ederim. Ayrıca, bu projedeki çalışmalarım sırasında her zorluğu birlikte aştığımız arkadaşım Arş. Gör. Neşe ÖZDEMİR'e gösterdiği destek için teşekkür ederim.

Tez çalışmamın okuyuculara yararlı olmasını dilerim.

Temmuz 2021

Günay ASLANOVA
(Yüksek Matematikçi)



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖNSÖZ	vii
İÇİNDEKİLER	ix
KISALTMALAR	xi
SEMBOLLER	xiii
ŞEKİL LİSTESİ	xv
ÖZET	xvii
SUMMARY	xxi
1. GİRİŞ	1
2. WHITHAM MODÜLASYON DENKLEMLERİ	15
2.1 Giriş	15
2.2 Whitham Modülasyon Teorisi	16
2.3 Gardner Denklemine İlerleyen Dalga Çözümü	21
2.4 (2+1) Boyutlu Gardner-KP Denklemine İndirgenmesi	23
2.5 Çoklu Ölçekler Yönteminin Uygulanması	27
2.6 Riemann Değişkenleri Cinsinden Modülasyon Denklemleri	29
3. SAYISAL ÇÖZÜMLER	33
3.1 Giriş	33
3.2 Gardner ve Silindirik Gardner Denklemlerinin Sayısal Çözümleri.....	34
3.3 Whitham Modülasyon Denklemlerinin Sayısal Çözümleri.....	42
4. (3+1) BOYUTLU GARDNER-KP DENKLEMİ	59
4.1 Giriş	59
4.2 Küresel Gardner (sG) Denklemine Elde Edilmesi	60
4.3 sG Denklemi İçin Whitham Modülasyon Denklemleri.....	62
4.4 Sayısal Çözümler.....	66
4.4.1 Küresel Gardner denklemine sayısal çözümü	66
4.4.2 Whitham modülasyon denklemlerine sayısal çözümleri.....	68
5. SONUÇLAR	77
KAYNAKLAR	81
EKLER	87
EK A: Eliptik İntegraller ve Eliptik Fonksiyonlar	89
EK B: Modülasyon Denklemlerinde Tanımlanan Katsayılar	95
EK C: Modifiye ETDRK4 Metodu	99
ÖZGEÇMİŞ	102



KISALTMALAR

2DBO	: İki boyutlu Benjamin-Ono
BEC	: Bose-Einstein Condensate
BO	: Benjamin-Ono
cBO	: Silindirik Benjamin-Ono
cG	: Silindirik Gardner
cKdV	: Silindirik KdV
DSW	: Dispersive Shock Wave (Dispersif şok dalgası)
ETD	: Exponential Time Differencing
FFT	: Fast Fourier Transform
IST	: Inverse Scattering Transform (Ters saçılma dönüşümü)
KdV	: Korteweg-de Vries
KP	: Kadomtsev-Petviashvili
mETDRK4	: Modified Exponential Time Differencing fourth order Runge-Kutta
mKdV	: Modifiye KdV
mKP	: Modifiye KP
NLS	: Nonlinear Schrödinger
RK4	: Dördüncü merteye Runge-Kutta
sG	: Küresel Gardner
VSW	: Viscous Shock Wave (Viskoz şok dalgası)
WMT	: Whitham Modülasyon Teorisi



SEMBOLLER

k	: Dalga sayısı
ω	: Açısal frekans
θ	: Faz
V	: Faz hızı
m	: Jacobi eliptik fonksiyonlarının modülü
$cn(u,m)$: Kosinüs Jacobi eliptik fonksiyonu
$sn(u,m)$: Sinüs Jacobi eliptik fonksiyonu
$K(m)=K$: Birinci türden tam eliptik integral
$E(m)=E$: İkinci türden tam eliptik integral



ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 1.1	: Başlangıç adım parametrelerinin değerine bağlı olarak DSW genel yapısı.	3
Şekil 1.2	: (a) Avustralya’da gözlemlenen atmosferik undular bore (Mick Petroff, NASA, 2009) (b) Severn Nehri’nde gözlemlenen undular bore (Scott Dickerson, 2013).	4
Şekil 1.3	: Trinidad çevresinde gözlemlenen iç dalgalar (NASA, 2003).	7
Şekil 3.1	: cG denkleminin $t = 10$ için sayısal çözümü.	37
Şekil 3.2	: Gardner denkleminin $t = 10$ için sayısal çözümü.	38
Şekil 3.3	: cG denkleminin $f^- = 0.8$ ve $f^+ = 0.1$ değerleri için sayısal çözümü ($t=10$).	39
Şekil 3.4	: cG denkleminin $f^- = 1.7$ ve $f^+ = 0.1$ değerleri için sayısal çözümü ($t=10$).	40
Şekil 3.5	: cG denkleminin $f^- = 0.8$ ve $f^+ = 0.9$ değerleri için sayısal çözümü ($t=10$).	40
Şekil 3.6	: cG denkleminin $f^- = 0.1$ ve $f^+ = 0.7$ değerleri için sayısal çözümü ($t=10$).	41
Şekil 3.7	: cG denkleminin $f^- = 0.9$ ve $f^+ = 0.6$ değerleri için sayısal çözümü ($t=10$).	42
Şekil 3.8	: Gardner denkleminde (a) Riemann değişkenlerinin başlangıç değerleri (b) $t = 10$ için (3.25) denkleminin sayısal çözümü ile elde edilen Riemann değişkenleri.	45
Şekil 3.9	: Gardner denkleminin $t = 10$ için elde edilen sayısal ve asimptotik çözümlerinin karşılaştırılması.	46
Şekil 3.10	: Gardner denkleminin $t = 5$ için elde edilen sayısal ve asimptotik çözümlerinin karşılaştırılması.	47
Şekil 3.11	: Gardner denkleminin $t = 7.5$ için elde edilen sayısal ve asimptotik çözümlerinin karşılaştırılması.	48
Şekil 3.12	: Gardner denkleminin $t = 15$ için elde edilen sayısal ve asimptotik çözümlerinin karşılaştırılması.	48
Şekil 3.13	: Gardner denkleminin $t = 15$ için elde edilen sayısal ve asimptotik çözümlerinin farkı.	49
Şekil 3.14	: cG denkleminde $t = 10$ için (3.25) denkleminin sayısal çözümü ile elde edilen Riemann değişkenleri.	51
Şekil 3.15	: cG denkleminin $t = 10$ için elde edilen sayısal ve asimptotik çözümlerinin karşılaştırılması.	52
Şekil 3.16	: cG denkleminin $t = 5$ için elde edilen sayısal ve asimptotik çözümlerinin karşılaştırılması.	53

Şekil 3.17	: cG denkleminin $t = 7.5$ için elde edilen sayısal ve asimptotik çözümlerinin karşılaştırılması.....	54
Şekil 3.18	: cG denkleminin $t = 15$ için elde edilen sayısal ve asimptotik çözümlerinin karşılaştırılması.....	55
Şekil 3.19	: cG denkleminin $t = 15$ için elde edilen sayısal ve asimptotik çözümlerinin farkı.....	56
Şekil 3.20	: (a) Gardner denkleminin için, (b) cG denkleminin için $t = 0$ ve $t = 15$ arasındaki doğrudan sayısal çözümlere ait uzay-zaman grafikleri.	57
Şekil 4.1	: sG denkleminin $t = 10$ için sayısal çözümü.	67
Şekil 4.2	: sG denkleminde $t = 10$ için (4.39) denkleminin sayısal çözümü ile elde edilen Riemann değişkenleri.	70
Şekil 4.3	: sG denkleminin $t = 10$ için elde edilen sayısal ve asimptotik çözümlerinin karşılaştırılması.....	71
Şekil 4.4	: sG denkleminin $t = 5$ için elde edilen sayısal ve asimptotik çözümlerinin karşılaştırılması.....	72
Şekil 4.5	: sG denkleminin $t = 7.5$ için elde edilen sayısal ve asimptotik çözümlerinin karşılaştırılması.....	73
Şekil 4.6	: sG denkleminin $t = 15$ için elde edilen sayısal ve asimptotik çözümlerinin karşılaştırılması.....	74
Şekil 4.7	: sG denkleminin $t = 15$ için elde edilen sayısal ve asimptotik çözümlerinin farkı.....	74
Şekil 4.8	: sG denkleminin için, $t = 0$ ve $t = 20$ arasındaki doğrudan sayısal çözümlere ait uzay-zaman grafikleri.	75

GARDNER TİPİ DENKLEMLER İÇİN WHITHAM MODÜLASYON TEORİSİ

ÖZET

Nonlineer dispersif dalgalar üzerine yapılan çalışmalar incelendiğinde akışkanlarda undular bore (salınımlı gelgit dalgası) olarak adlandırılan dispersif şok dalgaları dikkat çekmektedir. Dispersif şok dalgaları, teorideki kısaltmayla DSW'lar, okyanuslardan atmosfere, optik fiberlere kadar birçok uygulamada görülür. Bu dalgaları incelemek için dalga teorisindeki en önemli araştırmalardan biri olarak görülen Whitham Modülasyon Teorisi (WMT) geliştirilmiştir. Bu teori ile dalga trenlerinin yavaş modülasyonunun analizi yapılabilmektedir. WMT, ilk olarak su dalgaları teorisinde en çok kullanılan denklemlerden biri olan Korteweg-de Vries (KdV) denklemi için uygulanmıştır. KdV denkleminin geniş bir uygulama alanı olduğu bilinmektedir. Bu denklem, sığ su yüzeylerindeki dalgaların matematiksel bir modelidir. Bu nedenle, 1965 yılında KdV denklemi için yapılan çalışmalar sonraki yıllarda DSW'ların incelendiği birçok çalışma için örnek olmuştur.

Modülasyon teorisi, genlik, frekans ve dalga sayısı kavramlarının zamandaki yavaş değişimini içermektedir. Bu teori ile yavaş değişkenler için kısmi diferansiyel denklemler elde edilir. "Whitham modülasyon denklemleri" veya "Whitham sistemi" olarak adlandırılan bu denklemler, oldukça zengin bir matematiksel yapıya sahiptir ve aynı zamanda dispersif şok dalgalarının tanımlanması için güçlü bir analitik araçtır. Elde edilen hiperbolik modülasyon denklemleri, stabil dalga trenlerine ve eliptik modülasyon denklemleri ise stabil olmayan dalga trenlerine karşılık gelir. Eliptik modülasyon denklemleri elde edildiğinde, dalga treninin uzun süreli değişimini incelemek için yüksek mertebe nonlineerlik ve dispersiyon gerektiği bilinmektedir. Modülasyon denklemleri elde edildikten sonra bu denklemler için Riemann değişkenleri olarak adlandırılan parametrelerin tanımlanmasıyla Whitham sistemi daha basit yapıya indirgenmektedir.

Orijinal WMT'de modülasyon denklemleri, korunum yasalarının ortalaması alınarak bulunur. Ancak bizim tez çalışmamızda kullanacağımız Gardner-tipi denklemlerin korunum yasaları bilinmediğinden, korunum yasaları yerine kullanılacak koşulların asimptotik analiz yöntemi olan çoklu ölçekler metodunun uygulanmasıyla elde edilmesi planlanmaktadır. Bu metod, ilerleyen dalga çözümü olan herhangi bir nonlineer dalga denklemine uygulanabilir. Modülasyon denklemlerinin sayısal çözümleri ise Lax-Wendroff metodunun nonlineer filtreye iki aşamalı bir biçimi seçilerek elde edilmektedir.

Bu tez çalışmasında ilk olarak, (2+1) boyutlu Gardner-KP denklemi için bir benzerlik dönüşümü uygulanmasıyla (1+1) boyutlu silindirik Gardner (cG) denklemi elde edilmiştir. Elde edilen bu denklem için dispersif şok dalgası çözümünü betimleyen Whitham sistemi, tanımlanan uygun Riemann değişkenleri cinsinden türetilmiştir. cG denkleminin Whitham sisteminin sayısal çözümleriyle elde edilen DSW çözümü (asimptotik çözüm) ve cG denkleminin doğrudan sayısal çözümü karşılaştırılarak

aralarında uyumlu sonuçlar oluştuğu gözlemlenmiştir. Bu çalışmada incelenen ikinci problemde, (3+1) boyutlu Gardner-KP denklemi için benzer analiz yapılarak uygun başlangıç koşulu ile bu denklem (1+1) boyutlu küresel Gardner (sG) denklemine indirgenmiştir. İndirgenen denklem için WMT uygulanarak modülasyon denklemleri elde edilmiştir. Whitham sisteminin sayısal çözümlerinin bulunması sonucunda asimptotik çözümle sG denkleminin sayısal simülasyonları karşılaştırılarak aralarında tutarlılık olduğu gözlemlenmiştir. Böylece, uygun koşullar altında yüksek boyutlu denklemler için de DSW analizinin başarılı sonuçlar verdiği görülmüştür.

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Tezin birinci bölümünde, çalışılan problemlerin kapsamından bahsedilmiş olup ayrıca tez konusuyla ilgili literatür özetine yer verilmiştir.

İkinci bölümde, ilk olarak Whitham'ın yaptığı çalışmalar özetlenerek orijinal Whitham modülasyon teorisi incelenmiştir. Böylece, tezinin çıkış noktası olarak korunum yasalarının kullanılmasına dayanan metod, KdV denklemi için açıkça gösterilmiştir. Tez içerisinde türetilen denklemlerin yapısı Gardner denklemiyle benzerlik taşıdığından ikinci bölümün devamında,

$$u_t + 6uu_x \pm 6\alpha u^2 u_x + u_{xxx} = 0 \quad (1)$$

ile gösterilen Gardner denklemi tanıtılarak uygulama alanlarından bahsedilmiştir. Daha sonra, Gardner denkleminin ilerleyen dalga çözümü, Jacobi eliptik fonksiyonları cinsinden bulunmuştur. Bu çözüm, çoklu ölçekler metodu ile merteye problemleri elde edilip modülasyon denklemlerinin yazılmasında kullanılacağı için önemlidir. Son olarak, Gardner denkleminin xy -düzlemine genişletilmesiyle elde edilen (2+1) boyutlu Gardner-KP denklemi verilerek bu denkleme bir benzerlik dönüşümü uygulanmıştır. Bunun sonucunda, (1+1) boyutlu cG denklemi elde edilmiştir. Bu denklem için WMT uygulanmış ve dispersif şok dalgası çözümünü elde etmek için basamak formunda bir başlangıç koşulu alınmıştır. Böylece, cG denkleminde DSW yayılımını modelleyen modülasyon denklemleri Riemann değişkenleri cinsinden bulunmuştur.

Üçüncü bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda, Gardner ve cG denklemlerinin sayısal çözümlerine yer verilmektedir. Bu denklemlerin modellediği dalgaların yapısı, başlangıç adım parametreleri olarak adlandırılan f^- , f^+ değerlerine bağlı olarak değişmektedir. Bu parametrelerin farklı değerleri için grafikler elde edilerek cG denkleminin çözümlerinin davranışı incelenmiştir. İkinci kısımda ise, Whitham modülasyon teorisi aracılığıyla elde edilen modülasyon denklemlerinin sayısal çözümleri ile Gardner ve cG denklemlerinin doğrudan sayısal simülasyonları, kullanılan yöntemin uygunluğunun kontrol edilmesi için karşılaştırılmıştır. Farklı t zaman değerlerindeki sayısal çözümler grafiklerle gösterilmiştir. Bunun sonucunda, WMT ile elde edilen asimptotik çözümler ve denklemlerin doğrudan sayısal çözümleri için uyumlu sonuçlar elde edildiği görülmektedir.

Dördüncü bölümde, (3+1) boyutlu Gardner-KP denklemi verilerek bu denklem için yapılan indirgeme sonucunda (1+1) boyutlu küresel Gardner (sG) denklemi elde edilmiştir. WMT aracılığıyla bulunan modülasyon denklemleri, sG denkleminin DSW çözümlerinde kullanılmaktadır. Önceki bölümdeki gibi, sG denkleminin sayısal çözümleri elde edilerek asimptotik çözümle karşılaştırma yapılmıştır. Elde edilen grafiklere göre, salınımların ön kenar genliği ile dalga boyunun asimptotik yaklaşımda ve sayısal çözümlerde uyumlu olduğu gözlemlenmiştir. Böylece, modülasyon teorisi, sG denklemindeki dispersif şok dalgaları için de doğru ve uygun çözümler elde etmemizi sağlamıştır.

Beşinci bölümde, tez çalışmasında elde edilen sonuçlar özetlenmiştir. WMT kullanılarak genlik, dalga sayısı, frekans gibi dalga parametrelerinin zamandaki yavaş değişimi analiz edilmektedir. Bunların değişimi, DSW yayılımını karakterize eden denklem sisteminden oluşan Whitham modülasyon denklemleri tarafından yönetilir. Asıl denklemlerin doğrudan sayısal çözümlerinden elde edilemeyen DSW'larına ait yayılma zarfı, yayılma hızı ve belirli bir andaki maksimum-minimum genlik büyüklükleri gibi bilgiler modülasyon denklemlerinin çözümlerinden elde edilebilmektedir. Bu çalışmada, WMT ile elde edilen modülasyon denklemlerinin sayısal çözümleri ile indirgenmiş (1+1) boyutlu Gardner tipi denklemlerin sayısal çözümleri karşılaştırılarak kullanılan yöntemin doğruluğu kontrol edilmiştir. Farklı zaman değerleri için elde edilen grafikler bu denklemlerin DSW yayılım davranışlarını inceleme imkanı tanımıştır.





WHITHAM MODULATION THEORY FOR THE GARDNER TYPE EQUATIONS

SUMMARY

Nonlinear waves are defined by partial differential equations that include the terms dispersion, dissipation and nonlinearity. If dispersion and dissipation effects are neglected, the signal of the wave initially transmitted breaks at a critical time value. But physically, most models include weak dispersion and weak dissipation effects since these terms cannot be generally neglected. However, in many mediums the dissipation effects are very small and dispersion is more dominant. Thus, dissipation effect is negligible. In this case, dispersive shock waves (DSWs) are formed. DSWs, also termed undular bores in fluid mechanics, are slowly modulated, locally periodic wavetrains that develop in weakly dispersive nonlinear media. DSWs are defined by the equations obtained from Whitham Modulation Theory (WMT).

WMT was developed in 1965 for nonlinear dispersive waves and has been the subject of many observations and experiments in fields such as water waves, atmosphere, superfluids, cold plasmas and optics. This theory is used in analyzing the slow change of concepts such as amplitude, wave number and frequency over time. The aim of this thesis is to find the dispersive shock wave solutions of the Gardner-type equations by applying WMT. These Gardner-type equations are obtained by reducing the (2+1) and (3+1) dimensional Gardner-KP equations to (1+1) dimensional equations. With the modulation theory, it is assumed that the propagation of the dispersive shock wave occurs at different scales, called fast and slow scales, according to time and location. The propagation of the wave train is on a fast scale but the change in physical quantities such as amplitude, wavenumber, frequency occurs on a slow scale. Modulation equations are obtained according to the change of these variables in time.

The (2+1) dimensional Gardner-KP equation has the form

$$(u_t + 6uu_x \pm 6u^2u_x + \varepsilon^2u_{xxx})_x + \lambda u_{yy} = 0, \quad (2)$$

where $u = u(x, t)$ and $0 < \varepsilon \ll 1$. We are interested in a class of initial conditions which is the two dimensional extension of the Riemann-type initial condition

$$u(\eta, 0) = \begin{cases} f^-, & \eta < 0, \\ f^+, & \eta > 0, \end{cases} \quad (3)$$

where $\eta = x + \frac{1}{2}\phi(y, 0)$. Here f^- , f^+ are called the initial step parameters, which will be explained later. The special choice of a parabolic initial front

$$\phi(y, 0) = \tilde{c}y^2 \quad (4)$$

is assumed, where \tilde{c} is a real constant. We use the following ansatz,

$$u = f\left(x + \frac{\phi(y,t)}{2}, t, y\right) \quad (5)$$

for the solutions of the (2+1) dimensional Gardner-KP equation, where the front is then described by $x + \phi(y, t)/2 = \text{constant}$. By using the ansatz (5), we obtain the following system of equations:

$$\phi_t + \frac{\lambda}{2}(\phi_y)^2 = 0 \quad (6a)$$

$$f_t + 6ff_\eta - 6f^2f_\eta + \frac{\lambda}{2}\phi_{yy}f + \varepsilon^2f_{\eta\eta\eta} = 0. \quad (6b)$$

The equation (6a) is called a front shape (FS) equation and the equation (6b) characterizes a dispersive shock wave propagation of the wave front. The solution of the initial value problem for the FS equation (6a) and (4) is obtained as

$$\phi(y, t) = \frac{\tilde{c}y^2}{1+2\tilde{c}\lambda t} \quad (7)$$

Then, we substitute the solution (7) into the equation (6b) and obtain the cylindrical Gardner (cG) equation:

$$f_t + 6ff_\eta - 6f^2f_\eta + \frac{\lambda\tilde{c}}{1+2\tilde{c}\lambda t}f + \varepsilon^2f_{\eta\eta\eta} = 0. \quad (8)$$

We define $t_0 = \frac{1}{\lambda\tilde{c}}$ and then the term $\frac{\lambda\tilde{c}}{1+2\tilde{c}\lambda t}$ is written as $\frac{1}{(2t+t_0)}$. Also, we consider the case $\lambda = 1$.

Our aim is to apply the Whitham modulation theory to the equation (8). By applying the theory, we obtain a system of quasilinear modulation equations describing slow evolution of parameters in the periodic solution of a dispersive nonlinear partial differential equation. We solve the resulting Whitham modulation equations numerically and compare these results with direct numerical solutions of the cG equation. A good agreement is found between these numerics except the negligible phase and a small discontinuity in front of the DSW. The discontinuity can be analysed by considering higher order terms; but this is outside the scope of this study.

In the second problem examined in this study, similar analysis was performed for the (3+1) dimensional Gardner-KP equation

$$(u_t + 6uu_x - 6u^2u_x + \varepsilon^2u_{xxx})_x + \lambda(u_{yy} + u_{zz}) = 0 \quad (9)$$

and this equation reduced to the (1+1) dimensional spherical Gardner (sG) equation

$$f_t + 6ff_\eta - 6f^2f_\eta + \frac{2\lambda\tilde{c}}{1+2\tilde{c}\lambda t}f + \varepsilon^2f_{\eta\eta\eta} = 0. \quad (10)$$

We use the ansatz

$$u = f\left(x + \frac{\phi(y, z, t)}{2}, t\right) \quad (11)$$

for the solutions of the (3+1) dimensional Gardner-KP equation along the paraboloid front. Modulation equations are obtained by applying WMT for the reduced equation. The consistency between the asymptotic solution formed as a result of the numerical solutions of the Whitham system and the numerical simulations of the sG equation enabled the accuracy of the method used to be checked. Thus, it has been seen that DSW analysis gives successful results for high dimensional equations under suitable conditions.

This thesis consists of five chapters. In the first part of the thesis, the scope of the studied problems is mentioned and also a summary of the literature related to the thesis subject is included.

In the second chapter, firstly, Whitham's work has been summarized and the original Whitham Modulation Theory has been examined. Thus, the method based on the use of the conservation laws as the starting point of the theory is clearly demonstrated for the KdV equation. Later, the traveling wave solution of Gardner equation is found in terms of the Jacobi elliptic functions. This solution is important as it will be used to obtain order problems with the multiple scale method and to write the modulation equations. Since the structure of the equations derived in the thesis is similar to the Gardner equation, in the continuation of the second chapter, the Gardner equation is introduced and its application areas are mentioned. Finally, the (2+1) dimensional Gardner-KP equation obtained by extending the Gardner equation to the xy - plane is given and a similarity reduction is applied to this equation. As a result, the cylindrical Gardner (cG) equation, which is a (1+1) dimensional equation, has been obtained. WMT is applied for this equation and an initial condition in a step form is taken to obtain the dispersive shock wave solution of this equation. Thus, the modulation equations modeling the DSW propagation in the cG equation are found in terms of the Riemann variables.

The third chapter consists of two parts. In the first part, the direct numerical solutions of Gardner and cG equations are given. Figures are used to compare numerical solutions of two equations. In the second part, numerical solutions of the modulation equations obtained from Whitham modulation theory and direct numerical simulations of Gardner and cG equations are compared to check the suitability of the method used. Numerical solutions at different time values are shown graphically. As a result, it is seen that compatible results are obtained for direct numerical solutions of the equations and asymptotic solutions obtained with WMT.

In the fourth chapter, the (3+1) dimensional Gardner-KP equation is given and as a result of the reduction made for this equation, the (1+1) dimensional sG equation is obtained. The modulation equations found from WMT are used in the DSW solutions of the sG equation. As in the previous chapter, numerical solutions of the sG equation are obtained and comparison with the asymptotic solution is made. According to the figures obtained, it has been observed that the leading edge amplitude of the oscillations are compatible with the asymptotic approach and numerical solution. Thus, WMT enabled us to obtain accurate and suitable solutions for dispersive shock waves in the sG equation.

In the fifth chapter, the results obtained in this study are summarized. The formation of the DSW depends on the selection of the initial step parameters f^- , f^+ . We require that $f^+ < f^- \leq 1/2$ in order to formation of the DSW solution in the Gardner type equations. The difference between the simulations is that the amplitude decreases over time for the cylindrical Gardner and spherical Gardner equations in the trailing and leading edges. DSW solution of the Gardner equation is also considered in this study. Since the Gardner equation does not contain a time-dependent term, the amplitude value remains constant according to the initial step parameters. In order to observe the DSW propagation behavior of the Gardner type equations obtained in this study, more detailed results can be seen by examining the graphics and animation videos.



1. GİRİŞ

Bu bölümde, tez çalışmasında yer verilecek temel kavramların ve tez konusuyla ilgili olarak literatürde yapılan çalışmaların açıklanması amaçlanmıştır. Ayrıca, tez çalışmasında incelenecek problemler tanıtılarak bu problemlerin çözümleri için izlenecek yol özetlenecektir.

Whitham Modülasyon Teorisi (WMT), nonlinear dispersif dalgalar için 1965 yılında geliştirilerek günümüze kadar su dalgaları, atmosfer olayları, süper akışkanlar, soğuk plazmalar ve optik gibi alanlarda yapılan birçok gözlem ve deneyin konusu olmuştur. Bu teori; genlik, dalga sayısı ve faz hızı gibi kavramların zamandaki yavaş değişiminin analiz edilmesinde kullanılmaktadır. Tez çalışmasının amacı, literatürdeki uygulama alanlarında öneme sahip olan (2+1) ve (3+1) boyutlu Gardner-KP denkleminin (1+1) boyutlu denklemlere indirgenmesiyle elde edilen Gardner tipi denklemler için dispersif şok dalgası çözümlerinin modülasyon teorisi kullanılarak elde edilmesidir. Modülasyon teorisi ile dispersif şok dalgası yayılımının, zamana ve konuma göre hızlı ve yavaş ölçek olarak adlandırılan farklı ölçeklerde gerçekleştiği kabul edilir. Dalga treninin yayılımı hızlı ölçekte; genlik, dalga sayısı, faz hızı gibi fiziksel büyüklüklerdeki değişim ise yavaş ölçekte gerçekleşir.

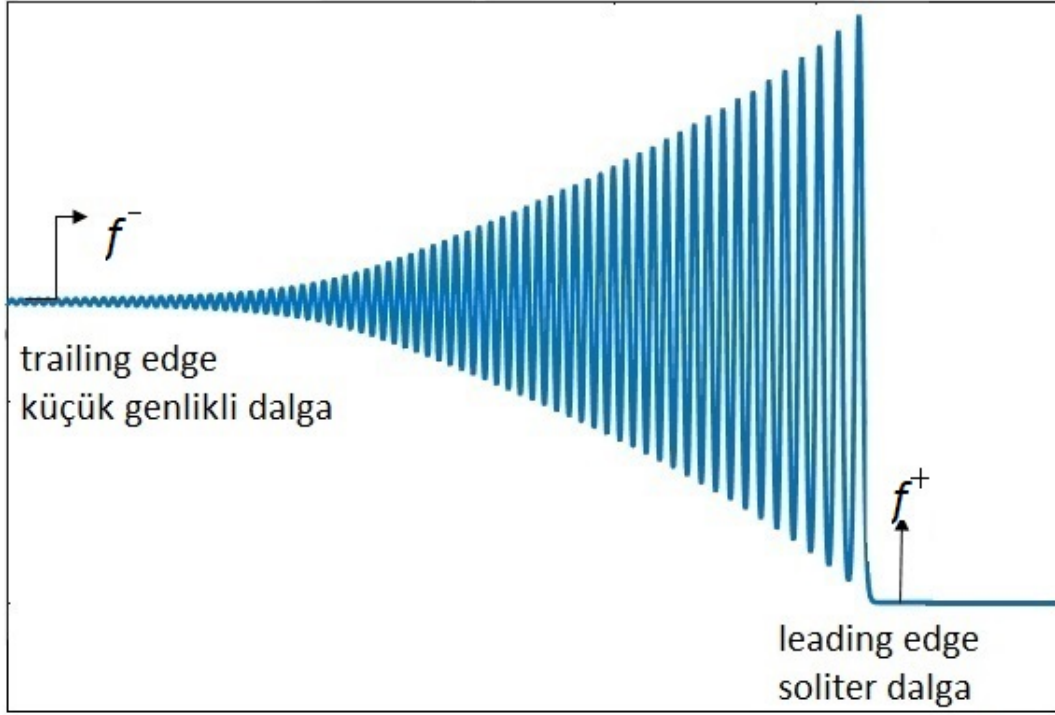
Tarihsel olarak, nonlinear dispersif dalgaların incelenmesi, 1847 yılında Stokes'un su dalgaları üzerine yaptığı öncü çalışmalarla başlamıştır. Stokes, nonlinear dispersif dalga sistemlerindeki periyodik dalga trenlerinin varlığını ilk kez kanıtlamıştır. [1]. Bu çalışmada, Stokes tarafından bir pertürbasyon tekniği ile ardışık yaklaşımlar kullanılarak derin sudaki periyodik düzlem dalgalar için nonlinear çözüm elde edilmiştir. Düzlem dalgalarının bu tekniğe dayanan nonlinear çözümleri *Stokes genişlemesi* olarak bilinir. Bu çalışma ile birlikte Stokes'un sonuçları, özellikle nonlinear su dalgaları alanında ve genel olarak nonlinear dispersif dalga fenomeni üzerinde güçlü bir etki sağlamıştır. Stokes'un su dalgaları üzerine derin araştırmaları, modern nonlinear dispersif dalgalar teorisinin başlangıç noktası olarak düşünülebilir. Çünkü, nonlinear dispersif dalgalar teorisindeki temel kavramların ve sonuçların çoğu, su dalgalarının araştırılmasıyla ortaya çıkmıştır.

Dispersif dalgalar, faz hızının dalga sayısına bağlı olduğu dalgalar olarak ifade edilmektedir. Buna göre, farklı dalga sayılarına karşılık gelen dalga modları farklı hızlarda yayılır. Böylece, nonlinearlik etkisi dalga cephesinin dikleşmesine yol açarken dispersif etkiler dalga treni olarak salınımların yayılımına yol açar. Diğer taraftan, dispersif sistemlerde, dispersiyon bağıntısından karmaşık (kompleks) açısal frekans, $\omega = \omega(k)$, elde edilmesi durumunda sadece faz hızı dalga sayısına bağlı olmayacak dalganın genliği de zamanla değişecektir. Buna göre, açısal frekansın kompleks olması durumunda, $\Im(\omega) > 0$ ise bir sönme olacaktır. Bu durum *dissipasyon* olarak adlandırılmaktadır. Böylece, dissipasyon etkisi dalganın $t \rightarrow \infty$ iken sönümüne yol açar. Bu durumda dalga yayılımı gerçekleşmez ve dalga modlarında bozulma meydana gelir. Aksi durumda, yani $\Im(\omega) < 0$ olması durumunda dalga genliği zaman ilerledikçe büyüyecektir, bu durumda çözüm stabil olmayacaktır.

Nonlinear dalgalar, dispersiyon, dissipasyon ve nonlinearlik terimlerini içeren kısmi diferansiyel denklemlerle tanımlanır. Eğer, dispersiyon ve dissipasyon etkileri ihmal edilirse, başlangıçta iletilen dalga sinyali kritik bir zaman değerinde kırılmaya uğrar. Fakat fiziksel olarak genellikle bu terimler ihmal edilemediğinden, çoğu model zayıf dispersiyon ve zayıf dissipasyon etkilerini içerir. Bununla birlikte, birçok ortamda dissipasyon etkileri çok küçük olduğundan dispersiyon daha baskındır ve dissipasyon etkisi ihmal edilebilir. Bu durumda, *dispersif şok dalgaları* (dispersive shock wave: DSW) oluşur (Şekil 1.1). Eğer, dissipasyon dispersiyona göre baskın olursa *viskoz şok dalgası* (viscous shock wave: VSW) oluşur. VSW, genellikle akışkanlarda ve sıkıştırılabilir gazlarda görülür.

Dispersif şok dalgası teriminin yerine akışkanlarda undular bore (salınımlı gelgit dalgası) terimi de kullanılmaktadır.

Şekil 1.1'de görülen f^- ve f^+ parametreleri, DSW oluşumu için belirlenen başlangıç adım parametreleridir. Bunlar, daha açık olarak sonraki bölümde ifade edilecektir. DSW'lar, salınımlarla birlikte genişleyen bir cepheye sahiptir. Bu salınımlar, uzay-zaman düzleminde karakteristik bir fan içinde yayılır ve bu fanın sınırları, DSW'nun ön kenar (leading edge) ve arka kenarını (trailing edge) temsil eder. Bu iki kenar, farklı yayılma hızlarına sahiptir. Genellikle, ön kenar büyük genlikli soliter dalgalardan oluşurken, arka kenar küçük genlikli dalga olarak yayılan lineer dalgalardan oluşur.



Şekil 1.1 : Başlangıç adım parametrelerinin değerine bağlı olarak DSW genel yapısı.

1965 yılında G. B. Whitham'ın Korteweg-de Vries (KdV) denklemi üzerinde tanıtılarak geliştirdiği modülasyon teorisi ile dalga trenlerinin yavaş modülasyonunun analizi yapılmıştır [2, 3]. Bu teorinin pek çok uygulama alanı vardır. Bunun dışında, bu teori ile ters saçılma dönüşümü (inverse scattering transform: IST) ve integrallenebilir hidrodinamik sistemlerin genel teorisi arasında önemli bağlantılar olduğu yapılan incelemelerden görülmektedir [4–6]. Whitham modülasyon teorisi kullanılarak elde edilen denklemler aracılığıyla DSW'lar tanımlanmaktadır. Burada, dalganın üç temel kavramının önemi bulunmaktadır. Bunlar;

1) Genlik – dalganın yüksekliği,

2) Frekans – birim zamandaki dalga sayısı,

3) Faz – dalga formu döngüsündeki bir noktanın anlık pozisyonu

olarak sıralanabilir. Bu kavramlar, nonlinear periyodik dalgaları tasvir etmelerinin yanısıra modülasyon teorisinin de çıkış noktasını oluşturmaktadır. Modülasyon teorisi, bu kavramların zamandaki değişimini içermektedir.

DSW'lar için kapsamlı deneysel gözlemlerin yardımıyla, birçok alanda önemli araştırmalar yapılmıştır. Nonlinear optik alanında fotoreaktif kristallerde [7, 8], optik fiberlerde [9, 10] ve kolloid ortamlarda [11, 12] DSW'lar gözlemlenmiştir. Ayrıca

atmosfer olayları [13–15], iç gelgitteki DSW'lar [16] için de önemli araştırmalar yapılmıştır. Örneğin; atmosferde gözlemlenen "morning glory" (şekil 1.2(a)) ya da İngiltere'deki Severn Nehri'nde görölen undular bore (şekil 1.2(b)).



şekil 1.2 : (a) Avustralya'da gözlemlenen atmosferik undular bore (Mick Petroff, NASA, 2009) (b) Severn Nehri'nde gözlemlenen undular bore (Scott Dickerson, 2013).

Whitham'ın nonlinear dispersif dalgalar üzerine yaptığı incelemeler [2,3], su dalgaları, optik, plazmalar ve atmosferdeki çeşitli fiziksel uygulamalarda kullanılmaktadır. Whitham, yaptığı çalışmalarda, genlik, dalga sayısı ve ortalama yükseklik gibi parametrelerin uzaysal x ve zamansal t ölçeğinde yavaş değişmesi fikrini analiz etmiştir. Bu değişimlerin, dalga treninin fazının değişiminden çok daha küçük olduğunu varsaymıştır [2]. Böylece onun varsayımına göre, faz bir "hızlı" değişkendir ve genlik, dalga sayısı, ortalama yükseklik gibi değişkenler de "yavaş" değişkenlerdir. Bu kabuller altında, yavaş değişkenler için kısmi diferansiyel denklemler elde edilmeye çalışılır. *Whitham modölyasyon denklemleri* veya *Whitham sistemi* olarak adlandırılan bu denklemler, oldukça zengin bir matematiksel yapıya sahiptir ve aynı zamanda çeşitli fiziksel olgularda nonlinear dalgaların tanımlanması için güçlü bir analitik araçtır.

Whitham'ın geliştirdiği teoriye göre modölyasyon denklemleri ile dalga treninin stabilitesi arasında bağlantı vardır. Buna göre, hiperbolik modölyasyon denklemleri, stabil dalga trenlerine ve eliptik modölyasyon denklemleri ise stabil olmayan dalga trenlerine karşılık gelir. Hiperbolik modölyasyon denklemlerine sahip olan bir denklem

olarak

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (1.1)$$

ile verilen KdV denklemi örnek gösterilebilir. Nonlinear Schrödinger denklemi (NLS) ise eliptik modülasyon denklemlerine sahip bir denklemdir.

$$iu_t + \frac{1}{2}u_{xx} + |u|^2u = 0 \quad (1.2)$$

ile gösterilen NLS denklemi, odaklanma (focusing) tipi bir denklemdir. Bu denklemin, su dalgası kararlılık teorisinde [17] ve nonlinear optikte [18] önemi bulunmaktadır. Modülasyon denklemlerinin yapısından dolayı NLS'nin basit bir dalga çözümü mevcut değildir ve dalga trenleri modülasyon açısından kararsızlık göstermektedir [19]. Bununla birlikte, (1.2) denkleminin kararsızlık oluşmadan önce DSW tipi bir çözümü vardır. Bunun nedeni, NLS denkleminin modülasyon denklemlerinin soliton ve lineer dalga limitlerinde hiperbolik olmasıdır [20]. Böylece, ön kenarda soliton ve arka kenarda lineer dalgalar olmak üzere Şekil 1.1'deki yapıya benzer bir çözüm oluşturulabilir [20].

Dispersif şok dalgaları, zayıf dispersiyon ve zayıf nonlinearliğin hakim olduğu durumlarda meydana gelen fiziksel olarak önemli bir olaydır. DSW'lar üzerine incelemeler, bu dalgaların daha çok çarpışmasız şok (collisionless shock) olarak bilindiği 1960 ve 1970'lerdeki çalışmalarla başlamıştır. Sagdeev ve çalışma grubu, ilk olarak çarpışmasız şokun titreşimli yapısını incelemişlerdir [21]. Zayıf dispersif etki gösteren ve kuadratik nonlinear sistemlerin bir modelini tanımlayan KdV denkleminin gelişmelerde önemli bir rolü olmuştur. Bu denklemin periyodik dalga treni çözümü, Jacobi eliptik kosinüs fonksiyonu " cn " ile *knoidal dalga çözümü* biçiminde verilmiştir. Bu çözümden anlaşılacağı gibi modülasyon denklemlerini elde etmek için, eliptik fonksiyonların bazı özelliklerini kullanmak gerekir. Özellikle KdV denklemi için 1965 yılında Whitham'ın çalışması, nonlinear dalga problemlerinde modülasyon teorisinin büyük faydasını göstermiş ve bundan sonra birçok farklı çalışma ortaya çıkmıştır. Bu çalışmalardan biri, Gurevich ve Pitaevskii tarafından Whitham modülasyon teorisi yardımıyla KdV denklemi için Riemann probleminin çözülmesidir [22]. Bu çalışma, DSW'ların açık olarak elde edildiği ilk çalışmadır. Bu sonuçlar ışığında integrallenebilir başka denklemler için de teori uygulanmaya başlamıştır. 1976 yılında Driscoll ve O'Neil, integrallenebilir modifiye KdV (mKdV) denklemini inceleyerek modülasyon denklemlerini elde etmiş ve dispersif şok dalgalarını geliştirmişlerdir

[23]. Bu denklemin KdV denkleminden farkı, kübik nonlineerlik içermesidir. Daha sonra, KdV'nin dispersiyon etkisinin çok küçük olduğu durum IST aracılığıyla formüle edilmiştir [24–26]. 1980 yılında Flaschka, Forest ve McLaughlin tarafından KdV denklemi için Whitham teorisinin çoklu faz genişlemesi (multiphase extension) geliştirilmiştir [27]. Ayrıca, modülasyon yaklaşımı kısa sürede odakdışı (defocusing) NLS denkleme genişletilerek [28, 29], sonraki yıllarda birçok denklem için benzer çalışmalar yapılmıştır.

[30]'da Matsuno, tek boyutlu Benjamin-Ono (BO) denkleme Whitham'ın geliştirdiği klasik teoriyi uygulayarak modülasyon denklemlerini elde etmiştir. Bu çalışmada Matsuno, dispersiyon etkisinin çok küçük olduğu durum için özel bir başlangıç koşulu almış ve uyguladığı teorisin farklı başlangıç koşulları için de geliştirilebileceğini vurgulamıştır. Ayrıca, BO denkleminin başlangıç değer problemi için elde edilen sayısal ve analitik sonuçlar karşılaştırılarak incelemelerin uyumluluğu gösterilmiştir. Bu çalışmadan kısa bir süre sonra Matsuno, BO denklemi için farklı başlangıç koşulları olarak bu problemler üzerinde WMT'nin uygulanabilirliğini göstermiştir [31].

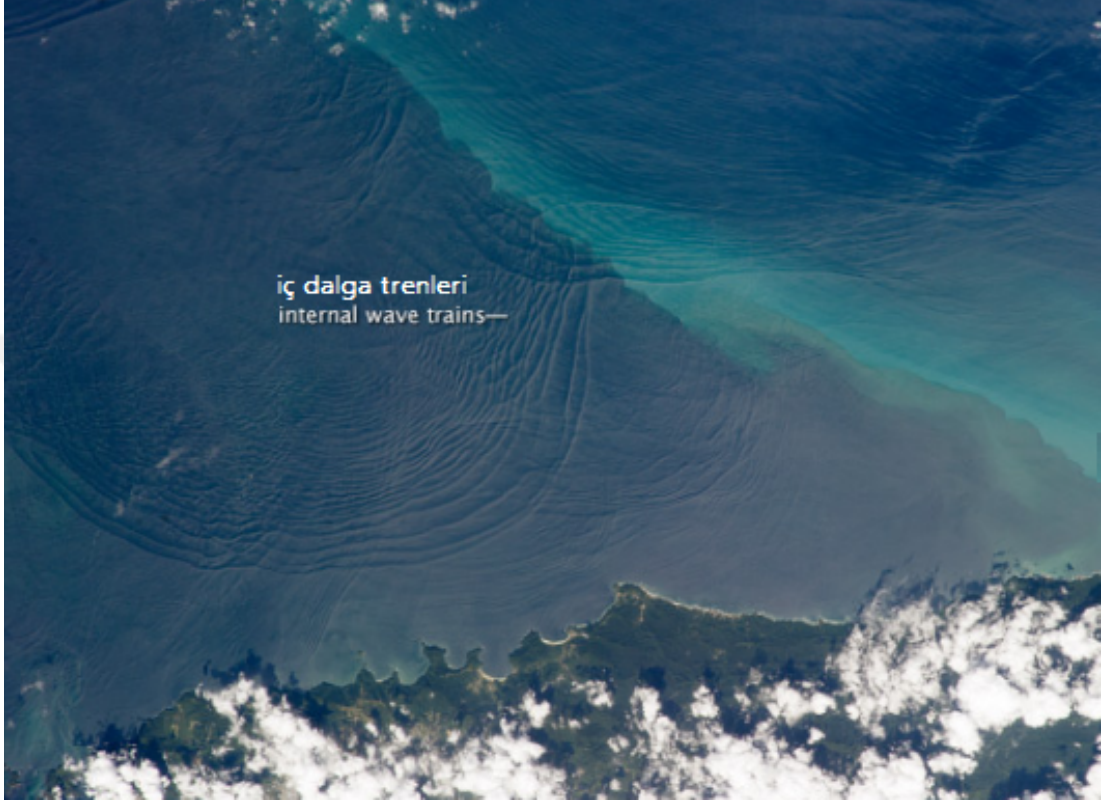
Dalgaların uzun süreli yayılımı göz önüne alındığında, küçük dissipasyon etkileri de ayrı bir öneme sahiptir. Bu durumda, Whitham denklemleri, dissipasyon etkilerini içerecek şekilde modifiye edilmelidir. Bu şekilde dissipasyon etkilerinin de dikkate alındığı Whitham denklemleri,

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = \nu u_{xx} \quad (1.3)$$

formundaki viskoz terim içeren KdV-Burgers denklemi için 1987 yılında bulunmuştur [32]. Buna dayanarak daha genel bir yaklaşım 2004 yılında Kamchatnov tarafından geliştirilmiştir [33]. Kamchatnov'un bu çalışmasında geliştirdiği teori, Whitham metodunun, pertürbe integrallenebilir sistemlerdeki dissipatif undular bore oluşumunu modellemede önemini göstermiştir. Burada, dissipasyon, nonlinear dispersif dalgaların oluşumunu engellemeyecek kadar küçük varsayılmıştır. Kamchatnov tarafından geliştirilen teori, 2005 yılında Kaup-Boussinesq denklem sistemi için uygulanmıştır [34]. Bu çalışmada zayıf etkili dissipatif undular bore oluşumunu modellemek için, küçük bir viskoz terimle modifiye edilmiş integrallenebilir Kaup-Boussinesq sıg su denklem sistemi kullanılmıştır.

Nonlinear dalgalar üzerine yapılan çalışmalara bakıldığında, kuadratik veya kübik nonlinear terimlerin dikkate alınması gereken durumların da olduğu görülmektedir.

Örneğin, okyanuslar farklı yoğunluklara sahip çok sayıda su katmanından oluşur. En üstteki katman diğer katmanlara göre daha az yoğundur. Alt tabaka bir engelle karşılaştığında, buna karşı bir tepki oluşur ve bununla birlikte su tabakasında bir dalga meydana gelir. Böylece, iç dalga ortaya çıkar (Şekil 1.3).



Şekil 1.3 : Trinidad çevresinde gözlemlenen iç dalgalar (NASA, 2003).

İç dalgalar, katmanlar arasındaki sınırlar boyunca hareket eder. 1995 yılında Oregon Körfezi'nde yapılan "Kıyı Okyanusu Araştırma Deneyi"nde (Coastal Ocean Probe Experiment: COPE), iç dalgaların ağırlıklı olarak güçlü olduğu gözlemlenmiştir. Bu deney ve sonrasında yapılan incelemeler, kuadratik ve daha yüksek mertebeden nonlineerlik içeren dalga denklemlerinin önemini ortaya çıkarmıştır. Bu etkiyi gösteren en basit model, aslında 1960'lı yılların sonlarından beri literatürde bilinen Gardner denklemidir. Bu denklem,

$$u_t + 6uu_x \pm 6\alpha u^2 u_x + u_{xxx} = 0 \quad (1.4)$$

şeklinde hem kuadratik hem de kübik nonlineerlik içermektedir. Başlangıçta, KdV denkleminin korunum yasalarının elde edilmesi sırasında ortaya çıkmıştır [35]. Daha sonra Gardner denklemi olarak genelleştirilmiştir. Katı-hal ve plazma fiziği [36, 37],

akışkan dinamikleri [38] ve kuantum alan teorisi [39] gibi fizikteki çeşitli dallarda da uygulanabilir olduğu görülmüştür. Gardner denkleminin WMT ile çözümlerinin analizi Kamchatnov ve çalışma arkadaşları tarafından 2012 yılında yapılmıştır [40]. Sonlu-gap integral yönteminin indirgenmiş bir uyarlaması kullanılarak Gardner denklemi için modülasyon sistemi, Riemann tipi değişkenler cinsinden bulunmuştur. Gardner denklemi, esasen kuadratik nonlineerlik içeren KdV denkleminde türetildiği için, "genişletilmiş KdV" (extended KdV) veya "birleşik KdV-mKdV" (combined KdV-mKdV) isimleriyle de bilinmektedir.

Son yıllarda, DSW'lar ile ilgili teorik ve deneysel çalışmalar devam ederek modülasyon teorisini temel alan problemler; nonlineer optikte, jeofizikte, su dalgalarında önemli uygulama alanları bulmuştur. 2000'li yıllarda yapılan çalışmalar incelendiğinde Bose-Einstein yoğunlaşması (Bose-Einstein Condensate: BEC) olarak adlandırılan bir kuantum sıvısında üretilen dispersif şok dalgalarının incelenmesi dikkat çekmektedir. Yapılan çalışmada, BEC'deki dispersif şok dalgasının deneysel, sayısal ve analitik sonuçları açıklanmıştır [41]. Deneylerin sayısal simülasyonları ve daha düşük boyutlu yaklaşımlarla karşılaştırmalar, deneysel olarak gözlemlenen dalgaların DSW'lara karşılık geldiğini göstermektedir. Ayrıca, yapılan çalışmada, klasik dissipatif şok dalgaları ve dispersif şok dalgaları arasında bir karşılaştırma yapılmıştır. Buna göre, DSW ile dissipatif şok arasındaki temel fark, şok hızı ve yapısından kaynaklanmaktadır. DSW, zaman arttıkça büyüklük bakımından doğrusal olarak genişleyen salınımlı dalga trenleridir. Dissipatif şok ise sabit hızla yayılır ancak dalga cephesi uzayda sınırlı bir bölgede kalır.

Literatürde dispersif şok çözümleri bulunan diğer denklemleri araştırdığımızda karşılaştığımız denklemler, nonlineer Schrödinger [42], Camassa-Holm [43], Benjamin-Ono [31, 44, 45], Ostrovsky [46] denklemleridir. Ayrıca, Kaup-Boussinesq denklem sistemi için de modülasyon denklemleri elde edilmiştir [47, 48]. Bu denklemler temel alınarak, modülasyon denklemlerinin çözümleri, su dalgalarında, meteorolojide, jeofizikte, nonlineer optikte dalgaların yayılımını tanımlamak için kullanılmıştır. 2015 yılında Kamchatnov, pertürbe KdV denklemi için orijinal Whitham metodunu kullanarak modülasyon denklemlerini elde etmiştir [49]. Bu çalışmada, ayrıca dissipatif pertürbasyon etkileri altında, pertürbe Whitham denklemlerinin kararlı-durum çözümleri bulunmuştur.

Son yıllarda yapılan diğer çalışmaları incelediğimizde karşılaştığımız en dikkat çekici ve bu tez çalışmasının da temelini oluşturan yayın olarak 2016 yılında Ablowitz, Demirci ve Ma tarafından Kadomtsev-Petviashvili (KP) ve iki boyutlu Benjamin-Ono (2DBO) denklemleri için bulunan dispersif şok dalgası çözümlerinden bahsedebiliriz [44]. 2016 yılına kadar olan yayınlarda, çoğunlukla (1+1) boyutlu denklemler için inceleme yapıldığı görülmektedir. Bu nedenle, (2+1) boyutlu denklemler için KP ve 2DBO denklemlerini temel alan bu çalışma önemlidir. Bu denklemler için dispersif şok dalgası çözümü bulabilmek amacıyla, (2+1) boyuttan indirgeme yapılarak, KP denklemi için silindirik KdV (cKdV) ve 2DBO denklemi için silindirik BO (cBO) denklemleri elde edilmiştir. Bunun için, Riemann tipi başlangıç koşulu ve parabolik cephe kullanılmıştır. Ayrıca sayısal çözümle karşılaştırmalar yapılmıştır. Bu çalışmadaki yöntem kullanılarak iki boyutlu NLS denkleminin indirgenmiş yapısı olan radyal Schrödinger denklemi için DSW çözümleri farklı bir çalışmada elde edilmiştir [50].

Ablowitz, Biondini ve Wang, 2017'de yayınlanan çalışmalarında (2+1) boyutlu KP denkleminin Whitham modülasyon denklemlerini, [44]'te özel varsayımlar altında yapılan çalışmadan farklı olarak genel bir başlangıç koşulu için elde etmişlerdir [51]. Çalışmanın devamında, KP-Whitham sistemi için başlangıç-değer ve sınır-değer problemi incelenmiştir. Ayrıca, KP denkleminin periyodik çözümlerinin stabilitesi üzerine çalışılmıştır. Fakat kararlılık incelemesi dışında, elde edilen sistemin çözümü verilmemiştir. İlgili Whitham modülasyon denklemlerinin sayısal çözümlerinin elde edilmesi açık bir problem olarak görülmektedir.

2017 yılında yayınlanan başka bir çalışmada, 2DBO denklemi için de benzer bir analiz yapılmıştır [45]. Bu çalışmada da, çoklu ölçekler metodu kullanılarak indirgeme yapılmadan doğrudan (2+1) boyutlu denklem için Whitham sistemi elde edilmiştir. Bunun yanı sıra, bu denklemin ilerleyen dalga çözümünün stabilitesini araştırmak için Whitham sistemi kullanılmıştır. KP denkleminin aksine, (2+1) boyutlu Benjamin-Ono denkleminin integrallenebilir olup olmadığı bilinmemektedir. Ancak, Luke tarafından geliştirilen ve bu tez çalışmasında da kullanılan yöntemde integrallenebilirlik gerekli bir koşul değildir [52].

Ablowitz, Biondini ve Rumanov, [53] ile verilen çalışmalarında KP, 2DBO ve modifiye KP (mKP) denklemleri üzerinde çalışmışlardır. Bu çalışmada, daha önce

[44]'te çalışılan KP ve 2DBO denklemlerinin Whitham sistemini daha basit yapıda elde etmişlerdir. Ayrıca, bu çalışmada mKP denkleminin de Whitham sistemi oluşturulmuştur. Devamında ise, mKP denkleminin periyodik çözümlerinin stabilite analizi yapılmıştır. [44]'teki çalışma dışında, (2+1) boyutlu denklemler için yapılan çalışmalarda ilgili denklemler için Whitham modülasyon sistemi uygun başlangıç koşul sınıfı için genel olarak türetilmiştir. Fakat bu sistemin tam çözümleri ve bu çözümlerin orijinal (2+1) boyutlu denklemlerin çözümlerinin karşılaştırılması konusunda bir sonuç verilmemiştir. Yani, ilgili denklemler için elde edilen sonuçlar test edilmemiştir.

Literatür dikkatli incelendiğinde, zayıf dispersiyon limiti ve dispersif şok dalgaları ile ilgili son yıllarda yapılan çalışmalarda daha çok (1+1) boyutlu denklemlerin incelendiği görülmüştür. Yani, bir uzaysal ve bir zamansal koordinat kullanılmıştır. Bunun en önemli sebebi, çok boyutlu sistemler için teoremin nasıl uygulanacağı hakkında çok az bilginin olmasıdır. Ancak, son yıllarda (2+1) ve (3+1) boyutlu denklemler için de dispersif şok dalgası çözümleri elde edilmeye başlanmıştır. Bu tezin amacı, bu tür denklemler için önemli bir kaynak oluşturulmasıdır.

Tez çalışmasında, literatürde önemli bir yere sahip olan (2+1) ve (3+1) boyutlu Gardner-Kadomtsev-Petviashvili (Gardner-KP) denklemleri alınarak değişken dönüşümü ile (1+1) boyutlu modifiye denklem yapıları elde edilecek ve uygun analiz ile DSW çözümleri araştırılacaktır. Önerdiğimiz çözüm formu sonucu elde edilen silindirik ve küresel denklemlere Whitham Modülasyon Teorisi uygulanarak modülasyon denklemlerinin türetilmesi amaçlanmaktadır. Sonrasında (1+1) boyutlu silindirik ve küresel denklemlerin çözümleri, belirlenen başlangıç koşulu altında sayısal olarak incelenecektir. Ayrıca, WMT ile elde edilen modülasyon denklemlerinin çözümleri ve indirgenmiş (1+1) boyutlu denklemlerin sayısal çözümleri karşılaştırılarak kullanılan yöntemin doğruluğu kontrol edilmiş olacaktır. Elde edilen bu sonuçlar ile nonlinear dalga yayılımını modelleyen birçok yüksek boyutlu denklemin incelenmesi ve benzer çalışmaların yapılması için zemin oluşturması beklenmektedir.

Tez çalışmasında ilk problem olarak (2+1) boyutlu Gardner-KP ve bu denklemin (1+1) boyuta indirgediğimiz şekli olan silindirik Gardner (cG) denklemleri incelenecektir. cG denkleminin DSW çözümleri için [54] ile gösterilen çalışmamız incelenebilir.

Gardner denklemi ile ilgili literatürde yapılan çalışmalar olmasına karşın [36–40], cG denklemi için [54] haricinde literatürde henüz bir çalışma yapılmamıştır. Bu nedenle, bu denklem gelecekte yapılacak çalışmalar için bir temel oluşturacaktır.

(2+1) boyutlu bir denklem olan Gardner-KP denklemi, ε ve λ sabit olmak üzere

$$(u_t + 6uu_x \pm 6u^2u_x + \varepsilon^2u_{xxx})_x + \lambda u_{yy} = 0 \quad (1.5)$$

şeklinde ifade edilir. Zayıf dispersiyon etkisi için, $|\varepsilon| \ll 1$ olarak tanımlanmaktadır. Bu denklemin, KP denklemine göre avantajları, daha geniş yayılma açısına sahip dalga trenlerini tasvir eder ve kübik terim nedeniyle KP denkleminde daha yüksek nonlineerliğe sahip dalgaları tanımlar. Bu denklem, integrallenebilirdir.

Gardner-KP denklemi (2+1) boyutlu olduğundan, yani iki uzaysal ve bir zamansal koordinat içerdiğinden tez çalışmamızda öncelikli olarak bu denklem (1+1) boyuta indirgenip elde edilecek denklem için WMT uygulanacaktır. Öncelikle, Whitham'ın klasik teorisi hakkında bilgi verilecek ve buna alternatif olarak bizim kullanacağımız çoklu ölçekler metoduna (multiple scale method) dayanan ve ilk olarak Luke tarafından uygulanan yöntem [52] ayrıntılı olarak ifade edilecektir. Bu yöntem, periyodik ilerleyen dalga çözümü olan herhangi bir nonlineer dalga denklemine uygulanabilir ve temelinde, değişkenleri yavaş ve hızlı değişkenler olarak ikiye ayırmak fikri vardır. Whitham'ın geliştirdiği teoriden farkı, bu yöntemde, korunum yasalarına ihtiyaç duyulmamaktadır. Çoklu ölçekler metodu ile mertebeli problemleri elde edilip bu denklemlerin yardımıyla yazılan sekülerlik koşulları kullanılarak yavaş değişen parametreler için Whitham denklemleri türetilmektedir. Pertürbasyon teorisi uygulanarak Whitham modülasyon denklemleri elde edildikten sonra tanımlanan uygun Riemann değişkenleri cinsinden çözüm elde edilmektedir. Daha sonra cG denkleminin sayısal çözümü bulunarak bu çözümle Whitham sisteminin çözümü (asimptotik çözüm) arasında karşılaştırma yapılmaktadır.

İkinci problem olarak, çalışmamızda (3+1) boyutlu Gardner-KP denklemi için benzer inceleme yapılarak DSW çözümleri elde edilmektedir. Bunun için benzerlik dönüşümü kullanılarak (3+1) boyutlu denklem, (1+1) boyutlu küresel Gardner (spherical Gardner: sG) denklemine indirgenmektedir. sG-Whitham sisteminin elde edilebilmesi için WMT uygulanarak modülasyon denklemleri, Riemann değişkenleri ile uygun formda yazılacaktır. (3+1) boyutlu BO denklemi için dispersif şok dalgaları ile ilgili

[55] çalışmasında elde edilen sonuçlar, bu denklemler için de Whitham teorisinin geliştirilebileceğini göstermektedir.

Çalışmanın ilk bölümünü oluşturan bu bölümde, dispersif şok dalgalarının incelenmesi üzerine yapılan çalışmalar özetlenerek tez içerisinde yer alan problemler ve uygulanacak yöntemler kısaca açıklanmıştır.

İkinci bölümde, $(2+1)$ boyutlu Gardner-KP denklemi ve bu denkleme uygulanan değişken dönüşümü sonucunda elde edilen $(1+1)$ boyutlu cG denklemi tanıtılacaktır. cG denklemi elde edildikten sonra çoklu ölçekler metodu uygulanarak mertebeli problemleri türetilecektir. İlk mertebeli problemin çözümünden elde edilen Gardner denkleminin ilerleyen dalga çözümü, dispersif şok dalgası yayılımını modelleyen modülasyon denklemlerinin elde edilmesinde önemli bir yer tutmaktadır.

Üçüncü bölümde, cG denkleminin Whitham modülasyon denklem sisteminin sayısal çözümleri araştırılacaktır. Bunun için Shampine tarafından geliştirilen, MATLAB temeline dayanan sayısal çözücü programı kullanılacaktır [56]. Ayrıca, sayısal çözümler sonucunda elde edilen bu sonuçlar Gardner ve cG denklemlerinin doğrudan sayısal çözümleri ile karşılaştırılacaktır. Böylece, kullanılan yöntemin doğruluğu da kontrol edilecektir. Gardner ve cG denklemlerinin sayısal çözümleri için en etkin spektral tabanlı sayısal yöntem olarak bilinen ve birçok nonlineer evrim tipi diferansiyel denklemin çözümünde hızı ve doğruluğu test edilmiş "Exponential Time Differencing Runge-Kutta 4 (ETDRK4)" yöntemi kullanılacaktır. Sayısal çözümlerin karşılaştırılmasıyla DSW'lar için önemli birtakım sonuçlar elde edilecektir.

Dördüncü bölümde, $(3+1)$ boyutlu Gardner-KP denklemi tanıtılarak bu denklem için yapılacak indirgeme sonucunda $(1+1)$ boyutlu küresel Gardner (sG) denklemi elde edilecektir. WMT aracılığıyla bulunan modülasyon denklemleri, sG denkleminin DSW çözümlerinin oluşturulmasında kullanılmaktadır. Önceki bölümdeki analize benzer olarak, sG denkleminin sayısal çözümleri elde edilerek asimptotik çözümlerle karşılaştırma yapılacaktır. Elde edilen çizimlere göre, salınımların ön kenar genliği ile dalga boyunun asimptotik yaklaşımda ve sayısal çözümde uyumlu olduğu gözlemlenmektedir. Böylece, WMT, sG denklemindeki dispersif şok dalgaları için doğru ve uygun sonuçlar elde etmemizi sağlamıştır.

Beşinci bölümde, sonuçların genel bir değerlendirmesi yapılmıştır. Bu çalışmanın en önemli katkısı; DSW'lara ait yayılma zarfı, yayılma hızı ve belirli bir andaki maksimum-minimum genlik büyüklükleri gibi bilgilerin sayısal çözümlerden elde edilememesinden dolayı, bu bilgilerin DSW yayılımını modelleyen modülasyon denklemlerinin çözümlerinden elde edilmesidir. Bu çalışmanın, meteorolojik inceleme, su dalgaları, optik, süper akışkanlar gibi birçok uygulama alanında öneme sahip olan konular üzerine yapılan modellerde karşılaşılan (2+1) ve (3+1) boyutlu dispersif nonlinear denklemlerin DSW çözümlerinin elde edilmesi için teorisinin geliştirilmesine katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Bu nedenle, tez çalışmasında yapılmış olan sayısal incelemelerde elde edilen grafiklerin ve simülasyonların bahsedilen uygulama alanlarında kullanılabilecekleri değerlendirilmesi yapılabilir.



2. WHITHAM MODÜLASYON DENKLEMLERİ

2.1 Giriş

Zayıf dispersiyon içeren nonlinear sistemlerin çoğu için KdV denklemi önde gelen bir denklemdir. Modülasyon teorisi, ilk olarak bu denklem için Whitham tarafından 1965 yılında geliştirilmiştir [2, 3]. Whitham yaptığı çalışmalarda, genlik, dalga sayısı ve ortalama yükseklik gibi parametrelerin uzaysal x ve zamansal t ölçeğinde yavaş değişimlerini, bu değişimlerin dalga treninin fazının değişiminden çok daha küçük olduğu varsayımı altında incelemiştir. Bu inceleme ile yavaş değişkenler için **Whitham modülasyon denklemleri** olarak adlandırılan denklem sistemini elde etmiştir. Ayrıca, hiperbolik modülasyon denklemlerinin stabil dalga trenlerine, eliptik modülasyon denklemlerinin ise stabil olmayan dalga trenlerine karşılık geldiği bilinmektedir. Bölüm 2.2’de Whitham’ın yaptığı bu çalışmalar özetlenmiştir.

Tez çalışmasında modülasyon denklemlerinin elde edilmesi için Luke tarafından geliştirilen *çoklu ölçekler yöntemi* [52] kullanılmıştır, ancak teorinin çıkış noktasında korunum yasaları olduğu için öncelikle bu metod açıklanmıştır. Bölüm 2.3’te Gardner denkleminin ilerleyen dalga çözümü, Jacobi eliptik fonksiyonları cinsinden elde edilmiştir. Bu çözüm, daha sonra merteye problemlerinde kullanılmaktadır. Bölüm 2.4’te (2+1) boyutlu bir denklem olan Gardner-Kadomtsev-Petviashvili (Gardner-KP) denklemi ve özel şartlar altında bu denklemin (1+1) boyuta indirgenmiş hali verilmektedir. Öncelikli olarak, değişken dönüşümü ile (2+1) boyutlu Gardner-KP denklemi için indirgeme yapılarak (1+1) boyutlu silindirik Gardner (cG) denklemi elde edilmektedir. cG denklemini oluşturabilmek için özel olarak parabolik dalga cephesi boyunca uzanan basamak tipi bir başlangıç koşulu alınmıştır. Uygun çözüm formu kullanılıp sonsuzluktaki sınır koşulları türetilerek elde edilen denklem sistemi incelenmiştir. Bu denklem sistemindeki denklemlerin birincisi, dalga cephesinin şeklini belirleyen fonksiyonu içerdiğinden cephe şekli denklemi (front shape equation) olarak adlandırılmaktadır. Diğer denklem ise, dalga cephesinin dispersif şok dalga

yayımlarını karakterize eden denklemdir. İlk denklem, uygun bir tanımlama ile literatürde Hopf denklemi olarak bilinen denkleme indirgenmektedir. Bu denklemin çözümü karakteristikler metodu ile yapılmaktadır. Elde edilen çözüm ikinci denklemde yazılarak dispersif şok dalgası yayılımını karakterize eden ve tez içerisinde ayrı bir önemi olan silindirik Gardner denklemi türetilecektir.

Whitham modülasyon denklemleri, başlangıçta ortalama korunum kanunları kullanılarak türetilmiştir [3], fakat çoklu ölçekler yöntemi ile elde edilebileceği de gösterilmiştir. Bölüm 2.5'te, bu yöntem kullanılarak merteye problemleri elde edilmektedir. Yüksek merteye problemlere ihtiyaç duyulmadığından, bu tez çalışmasında ilk iki merteye problem ile ilgilenilecektir. $1/\varepsilon$ mertebeli problemin yapısı Gardner denklemi ile benzer yapıda olduğundan, Gardner denkleminin ilerleyen dalga çözümü kullanılarak modülasyon denklemleri elde edilmiştir.

Whitham, KdV denklemi için modülasyon denklemlerini elde ettikten sonra, çözülmesi zor olan bu denklem sistemini daha kolay çözülebilir hale getirmek için denklemleri bir dönüşüm uygulayarak köşegensel (Riemann) formuna dönüştürmüştür. Bunun için, **Riemann değişkenleri** olarak adlandırılan yeni parametrelerin tanımlanması gerekmektedir. Bölüm 2.6'da Gardner denklemi için Riemann tipli değişkenlerin tanımlanmasıyla birlikte modülasyon denklemleri, köşegen duruma en yakın yapıya indirgenir. Bu sayede modülasyon sisteminin sayısal çözümlerinde kullanılacak sayısal şemaların daha hızlı sonuç vermesi sağlanmaktadır. Whitham teorisi ile elde edilen modülasyon denklemlerinin sayısal çözümleri yapılarak klasik Gardner ve silindirik Gardner denklemlerinin sayısal çözümlerinin karşılaştırılması sonucunda elde edilen sonuçlar Bölüm 3'te açıklanacaktır.

2.2 Whitham Modülasyon Teorisi

Whitham Modülasyon Teorisi (WMT), dispersif kısmi diferansiyel denklemlerde dalga yayılımının analitik açıklaması için güçlü bir araçtır. Whitham tarafından ilk olarak KdV denklemi için tanıtılan bu teori sonraki yıllarda birçok denklem için dalga modülasyonu bağlamında geniş bir uygulama alanı bulmuştur [23]-[55]. Tez çalışmasında, modülasyon denklemlerini elde etmek için çoklu ölçekler yöntemi kullanılacaktır ancak tezinin çıkış noktası korunum yasalarına dayandığı için bu bölümde, kısaca bu yöntemin nasıl uygulandığı açıklanmıştır. Bizim çoklu

ölçekler yöntemini tercih etmemizin sebebi, kullandığımız denklemler için korunum yasalarının henüz bilinmiyor olmasıdır. Luke tarafından geliştirilen çoklu ölçekler yönteminde korunum yasalarına ihtiyaç duyulmamaktadır [52].

Whitham'ın geliştirdiği, korunum yasalarının ortalamasının alınmasına dayanan yöntem (averaging method), dalga modülasyonunun asimptotik analizi için uygun bir tekniktir. Burada "modülasyon" terimi, belirli bir taşıyıcı dalganın ilgili dalga parametrelerinin (genlik, hız, yayılma yönü) uzayda veya zamanda yavaş değiştiği durumu ifade eder.

WMT'nin uygulanabilmesi için aşağıda verilen iki koşulun sağlanması gerekir:

- 1) Orijinal denklem için ilerleyen dalga çözümünün varlığı,
- 2) Dalga parametrelerinin modülasyonunun asimptotik analizini yapabilmek için bu parametrelerin değişimini belirleyen denklemleri (modülasyon denklemleri) oluşturabilmek; eğer mümkünse elde edilen bu denklemleri çözebilmek.

Teorinin uygulanmasında önemi olan ilerleyen dalga çözümünü bulabilmek için V yayılma hızını göstermek üzere, $u(x,t)$ dalga değişkeninin aşağıdaki bağıntıyı sağladığı kabul edilir:

$$u = u(\xi), \quad \xi = x - Vt \quad (2.1)$$

ve bu bağıntı orijinal denklemde yazılıp ξ parametresine göre integre edilerek çözüm bulunmaya çalışılır. Whitham, çözümü " cn " ve " sn " Jacobi eliptik fonksiyonları cinsinden bularak bu çözümü, modülasyon denklemlerini elde etmek için kullanmıştır. İkinci adımdaki koşul için korunum denklemleri alınarak Whitham tarafından bu denklemler ortalama alma (averaging) yöntemi uygulanmasıyla basitleştirilmiştir. Bu yöntemde, modüle edilmiş parametreler için elde edilecek modülasyon denklemleri, ortalama alma prosedürüyle ilgilidir.

Whitham'ın KdV denklemi için yaptığı çalışmalara bakılacak olursa, ilk olarak

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (2.2)$$

denkleminin ilerleyen dalga çözümü için $u = u(\xi)$, $\xi = x - Vt$, kabul edilerek bu ifade (2.2) denkleminde kullanılırsa,

$$u_{\xi\xi\xi} = Vu_{\xi} - 6uu_{\xi} \quad (2.3)$$

elde edilir. Buna göre, B integrasyon sabiti olmak üzere

$$u_{\xi\xi} = Vu - 3u^2 + B \quad (2.4)$$

yazılır. Bu denklemin u_ξ ile çarpılıp integrale edilmesiyle

$$\frac{1}{2}u_\xi^2 = f(u) \quad (2.5)$$

bulunur. Burada,

$$f(u) = -A + Bu + \frac{1}{2}Vu^2 - u^3 = -(u - \alpha)(u - \beta)(u - \gamma) \quad (2.6)$$

şeklinde üçüncü dereceden polinomdur ve A, B integrasyon sabitleridir. $f(u)$ 'nun karmaşık köklerinin alınması durumu, modülasyonel olarak kararsız çözümlere karşılık gelmektedir. α, β, γ parametreleri, üçüncü dereceden polinomun reel kökleri olmak üzere $\alpha > \beta > \gamma$ olsun. Bu durumda periyodik çözüm $f(u)$ ' nun pozitif olduğu $\beta \leq u \leq \alpha$ aralığındaki salınımlara karşılık gelmektedir. (2.6)'da verilen polinom kullanılarak,

$$V = 2(\alpha + \beta + \gamma), \quad A = -\alpha\beta\gamma, \quad B = -(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \quad (2.7)$$

elde edilir. (2.5) ve (2.6) yardımıyla aşağıdaki ifade yazılabilir:

$$\frac{du}{d\xi} = \pm\sqrt{2} \cdot \sqrt{(\alpha - u)(u - \beta)(u - \gamma)} \quad (2.8)$$

KdV denkleminin periyodik çözümünü elde etmek için (2.8) integrale edilerek

$$\sqrt{2}\xi = \int_u^\alpha \frac{du'}{\sqrt{(\alpha - u')(u' - \beta)(u' - \gamma)}} \quad (2.9)$$

bulunur. Buna göre tanımlanan üçüncü integrasyon sabiti, $\xi = 0$ 'da $u(\xi)$ 'nin maksimum değeri α olacak şekilde seçilmiştir. KdV denkleminin $u(\xi)$ çözümünü bulmak için [57] ile gösterilen yardımcı kaynaktaki 236.00 formülü [EK A, denklem A.41] referans alınarak hesapların yapılmasıyla,

$$u(x, t) = \alpha - (\alpha - \beta)sn^2(\sqrt{(\alpha - \gamma)/2}(x - Vt), m), \quad (2.10)$$

$$m = \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \gamma} \quad (2.11)$$

bulunur. (2.10) çözümü, *knoidal dalga* çözümü olarak adlandırılır ve α, β, γ reel parametreleri cinsinden tanımlanır. Sadece periyodik çözüm için düşünülürse, bunlar sabittir ancak dalga modülasyonu bağlamında düşünülürse bunlar x ve t 'nin yavaş değişen fonksiyonlarıdır. Bunların değişimi ise, Whitham modülasyon denklemleri tarafından yönetilir. Bu üç parametre için üç korunum yasası kullanılarak modülasyon

denklemleri elde edilmektedir. KdV denklemi için Whitham'ın kullandığı korunum yasaları aşağıdaki gibi verilebilir [2]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}u + \frac{\partial}{\partial x}(3u^2 + u_{xx}) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}u^2\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(2u^3 + uu_{xx} - \frac{1}{2}u_x^2\right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(u^3 - \frac{1}{2}u_x^2\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{9}{2}u^4 + 3u^2u_{xx} + \frac{1}{2}u_{xx}^2 + u_xu_t\right) &= 0.\end{aligned}\quad (2.12)$$

(2.12)'deki denklemler aslında, sırasıyla kütle, momentum ve enerjinin korunumuna karşılık gelen denklemlerdir. (2.12)'de görülen niceliklerin ortalama değerlerinin hesaplanması, bir yardımcı fonksiyonun (action function) tanımlanmasıyla basitleştirilir. Bunun için (2.5) ve (2.6) kullanılarak,

$$W(A, B, V) = - \oint u_\xi du = -\sqrt{2} \oint \sqrt{(-A + Bu + \frac{1}{2}Vu^2 - u^3)} du \quad (2.13)$$

yazılabilir. Burada integrasyon bölgesi olarak $\beta \leq u \leq \alpha$ aralığı dikkate alınmaktadır. Bu durumda dalga uzunluğu aşağıdaki gibi verilir:

$$L = \frac{1}{k} = \int_0^L d\xi = \oint du/u_\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} \oint du/\sqrt{f(u)} = W_A. \quad (2.14)$$

Bu formüldeki k , dalga sayısını göstermektedir.

Bu durumda, Whitham'ın kullandığı notasyonla birlikte (2.12)'de görülen temel fonksiyonların ortalama değerleri:

$$\begin{aligned}\bar{u} &= \frac{1}{L} \int_0^L u d\xi = k \oint u du/u_\xi = \frac{k}{\sqrt{2}} \oint u du/\sqrt{f(u)} = -kW_B, \\ \overline{\frac{1}{2}u^2} &= k \int_0^L \frac{1}{2}u^2 du/u_\xi = -kW_V, \\ \overline{u_\xi^2} &= k \oint u_\xi^2 du/u_\xi = -kW\end{aligned}\quad (2.15)$$

biçimindedir.

$u_{\xi\xi}$ ikinci türevi, $u_{\xi\xi} = B + Vu - 3u^2$ formülü aracılığıyla korunum yasalarından çıkarılabilir. Bu sonuçlarla birlikte, sadeleştirme işlemlerinden sonra (2.12)'ye karşılık gelen ortalama korunum yasaları,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(kW_B) + \frac{\partial}{\partial x}(kVW_B - B) &= 0, \\
\frac{\partial}{\partial t}(kW_V) + \frac{\partial}{\partial x}(kVW_V - A) &= 0, \\
\frac{\partial}{\partial t}\left(k(AW_A + BW_B + VW_V - W)\right) \\
+ \frac{\partial}{\partial x}\left(kV(AW_A + BW_B + VW_V - W) - \frac{1}{2}B^2 - AV\right) &= 0
\end{aligned} \tag{2.16}$$

biçimindedir. Son denklem aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned}
A[(kW_A)_t + (kVW_A - V)_x] + B[(kW_B)_t + (kVW_B - B)_x] \\
+ V[(kW_V)_t + (kVW_V - A)_x] - W[k_t + (kV)_x] &= 0.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Burada, ilk terim $kW_A = 1$ olması sebebiyle sıfırlanmaktadır ve ikinci ile üçüncü terimler de (2.16) denklemlerindeki ifadeler aracılığıyla yok edilebilir. Sonuç olarak, *dalgaların korunumu yasası* aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(kV) = 0. \tag{2.18}$$

(2.18) ve (2.16)'daki ilk iki denkleme $k = 1/W_A$ yerleştirilmesi ve

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial x} \tag{2.19}$$

maddesel türev formülünün tanımlanmasıyla KdV denkleminin modülasyon denklemleri aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned}
\frac{DW_A}{Dt} - W_A \frac{\partial V}{\partial x} &= 0, \\
\frac{DW_B}{Dt} - W_A \frac{\partial B}{\partial x} &= 0, \\
\frac{DW_V}{Dt} - W_A \frac{\partial A}{\partial x} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Whitham, bu aşamadan sonra modülasyon denklemlerini daha kolay çözülebilir duruma getirmek için **Riemann değişkenleri** olarak tanımladığı parametreleri kullanmıştır. Bu değişkenler ile denklemler köşegensel (Riemann) formuna dönüştürülebilmektedir. KdV denkleminin Riemann değişkenleri, $r_1 \leq r_2 \leq r_3$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
r_1 &= \frac{\alpha + \beta}{2}, \\
r_2 &= \frac{\alpha + \gamma}{2}, \\
r_3 &= \frac{\beta + \gamma}{2}
\end{aligned} \tag{2.21}$$

olarak verilir [2]. Bu değişkenlerin tanımlanmasıyla Whitham denklemleri aşağıdaki biçime dönüşür:

$$\frac{\partial r_i}{\partial t} + v_i(r_1, r_2, r_3) \frac{\partial r_i}{\partial x} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.22)$$

Burada, v_i 'ler **Whitham karakteristik hızları** olarak adlandırılır ve açık halleri aşağıda görülebilir:

$$\begin{aligned} v_1 &= -2(r_1 + r_2 + r_3) + \frac{4(r_3 - r_1)(1 - m)K(m)}{E(m)}, \\ v_2 &= -2(r_1 + r_2 + r_3) - \frac{4(r_3 - r_2)(1 - m)K(m)}{E(m) - (1 - m)K(m)}, \\ v_3 &= -2(r_1 + r_2 + r_3) + \frac{4(r_3 - r_2)K(m)}{E(m) - K(m)}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

KdV denkleminin (2.10) ile gösterilen periyodik çözümünü Riemann değişkenleri cinsinden yazılırsa,

$$u(x, t) = r_2 - r_1 - r_3 + 2(r_3 - r_2)cn^2(\sqrt{r_3 - r_1}(x - Vt), m), \quad (2.24)$$

$$m = \frac{r_3 - r_2}{r_3 - r_1} \quad (2.25)$$

bulunur. (2.23)'te Whitham karakteristik hızlarının tanımında yer alan $K(m)$ ve $E(m)$, sırasıyla birinci ve ikinci türden eliptik integralleri; m ise eliptik integralin modülünü göstermektedir. Jacobi eliptik integralleriyle ilgili ayrıntılı bilgiler EK A'da verilmektedir.

2.3 Gardner Denklemine İlerleyen Dalga Çözümü

Önceki bölümde, Whitham'ın KdV denklemi için uyguladığı teori özetlenerek KdV denkleminin (2.24) ile gösterilen periyodik çözümü elde edildi. Bu bölümde ise Gardner denkleminin ilerleyen dalga çözümü, Jacobi eliptik fonksiyonları cinsinden elde edilecektir. WMT'nin uygulanabilmesi için sağlanması gereken koşullara bakıldığında öncelikle bu çözümün bulunması gerektiği görülmektedir. Elde edilen periyodik çözüm, modülasyon denklemlerinin oluşturulmasında kullanılacaktır. Buna göre,

$$u_t + 6uu_x - 6u^2u_x + u_{xxx} = 0 \quad (2.26)$$

ile gösterilen Gardner denkleminde, $u = u(\xi)$, $\xi = x - Vt$ değişken dönüşümü uygulanarak bu denklemin ξ değişkenine göre iki kere integre edilmesiyle,

$$u_\xi^2 = u^4 - 2u^3 + Vu^2 + Au + B = f(u) \quad (2.27)$$

elde edilir. Burada, A ve B integrasyon sabitleridir. Bu denklemin çözümü, Jacobi eliptik fonksiyonu " cn " ile knoidal dalga çözümü formunda ifade edilebilir. Eğer (2.27) denklemindeki tüm kökler reel ise, knoidal dalga çözümü kararlıdır. İki kök reel, ikisi de kompleks ise çözüm kararsızdır [23]. Dolayısıyla,

$$u_1 < u_2 < u_3 < u_4 \quad (2.28)$$

şeklinde u_1, u_2, u_3, u_4 reel köklerinin sıralandığını kabul edersek ilerleyen dalga çözümü, $f(u)$ 'nun pozitif olduğu $u_2 < u < u_3$ aralığında mevcuttur. Bu durumda, (2.27) denkleminin sağ tarafı aşağıdaki gibi ayrıştırılır:

$$f(u) = (u - u_1)(u - u_2)(u_3 - u)(u_4 - u). \quad (2.29)$$

Burada,

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 &= 2, \\ u_1u_2 + u_1u_3 + u_1u_4 + u_2u_3 + u_2u_4 + u_3u_4 &= V, \\ -u_1u_2u_3 - u_1u_2u_4 - u_1u_3u_4 - u_2u_3u_4 &= A, \\ u_1u_2u_3u_4 &= B. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Bu denklemlerden görüldüğü gibi, u_i , $i = 1, 2, 3, 4$ kökleri lineer bağımlıdır. Bu durumda, bir parametre diğerleri cinsinden yazılabilir. Sadece periyodik çözüm için düşünülürse, u_1, u_2, u_3, u_4 sabittirler. Fakat biz dalga modülasyonu kavramıyla ilgilendiğimiz için artık bunlar sabit değil, uzaysal ve zamansal koordinatlar olan η ve t 'nin yavaş değişen fonksiyonlarıdır. Bunların değişimleri ise dispersif şok dalgası yayılımını karakterize eden Whitham modülasyon denklemleri tarafından yönetilir.

$u_2 < u < u_3$ koşulu ile (2.27) denklemi aşağıdaki gibi integre edilebilir:

$$\int_{u_2}^u \frac{du'}{\sqrt{(u' - u_1)(u' - u_2)(u_3 - u')(u_4 - u')}} = \xi. \quad (2.31)$$

Bu denklemin çözümü için [57] yardımcı kaynağından 254.00 formülü [EK A, denklem A.42] referans alınarak hesapların yapılmasıyla, ilerleyen dalga çözümü Jacobi eliptik fonksiyonları cinsinden aşağıdaki gibi elde edilir:

$$f_0 = u_2 + \frac{(u_3 - u_2)cn^2(2(\theta - \theta_0)K, m)}{1 - \frac{u_3 - u_2}{u_4 - u_2}sn^2(2(\theta - \theta_0)K, m)}. \quad (2.32)$$

Burada, $K = K(m)$ birinci türden eliptik integraldir. m ise cn ve sn eliptik fonksiyonlarının modülünü göstermektedir:

$$m^2 = \frac{(u_3 - u_2)(u_4 - u_1)}{(u_3 - u_1)(u_4 - u_2)}. \quad (2.33)$$

Dalga yayılım hızı,

$$V = (u_1u_2 + u_1u_3 + u_1u_4 + u_2u_3 + u_2u_4 + u_3u_4) \quad (2.34)$$

ile verilir.

(2.32) denklemindeki θ_0 , faz değişim parametresidir ve bunu belirleyebilmek için Bölüm 2.5'te çoklu ölçekler yöntemi uygulanırken kullanılan seri açılımında daha yüksek mertebe problemlere bakılmalıdır. Fakat, yüksek mertebe analizi, bu çalışmanın kapsamı dışındadır. Bu nedenle θ_0 parametresinin yaklaşık değeri doğrudan sayısal çözümlerle karşılaştırılarak belirlenecektir.

2.4 (2+1) Boyutlu Gardner-KP Denkleminin İndirgenmesi

Sığ su dalgalarının dinamiği, "Akışkanlar Mekaniği" alanında önemli bir araştırma konusudur. Genellikle KdV denklemi [2], Gardner denklemi [38, 40], Ostrovsky denklemi [46], Benjamin-Bona-Mahoney (BBM) denklemi [58] gibi sığ su dalgalarını modelleyen önemli denklemler için incelemeler yapılmasına rağmen, bunlar (1+1) boyutlu modelleri temsil eder. Literatür incelemesi yapıldığında, (2+1) boyutlu sığ su dalgası dinamiği ile ilgili denklemler için dispersif şok dalgalarında birkaç çalışma dışında belirgin sonuçlar elde edilmediği görülmektedir.

Kadomtsev-Petviashvili (KP) denklemi

$$(u_t + uu_x + \varepsilon^2 u_{xxx})_x + \lambda u_{yy} = 0, \quad (2.35)$$

nonlinear dalga teorisindeki iki boyutlu sığ su dalgaları problemlerinde [59–61] kullanılmaktadır. Ayrıca, plazmalardaki iyon-akustik dalgalarında [62] ve IST'nin KP denklemi başta olmak üzere iki boyutlu denklemlere genişletilmesi problemlerinde de [63] kullanılmıştır. Bu denklem, KdV denkleminin iki boyutlu uzantısıdır ve bu özelliğinden dolayı dalgaların bir boyutlu olması gerektiği kısıtlamasını ortadan kaldırmıştır. Burada, $|\varepsilon| \ll 1$ olduğunda *zayıf dispersiyon etkisi* olarak kabul edilmektedir. Ayrıca, λ parametresinin işaretine göre denklem KP-I ($\lambda < 0$) veya KP-II ($\lambda > 0$) olarak adlandırılmaktadır. KP-I denklemi sudaki yüzey geriliminin

kuvvetli olduğu durumları, KP-II ise yüzey geriliminin zayıf olduğu durumları gösterir. KP denkleminde farklı olarak iki nonlineer terim içeren Gardner denklemi veya genişletilmiş KdV ismiyle de bilinen denklem,

$$u_t + 6uu_x \pm 6u^2u_x + \varepsilon^2u_{xxx} = 0 \quad (2.36)$$

(1+1) boyutlu katmanlı akışkanlardaki nonlineer dalga yayılımını modellemek için kullanılmaktadır [35, 38]. Bu denklemin, iç dalgaları modelleme açısından önemli olduğu gözlemlenmiştir. Gardner denklemi hem kuadratik $6uu_x$ hem de kübik $6u^2u_x$ nonlineer terimlerini içermektedir. Kübik nonlineer terimin önündeki katsayının pozitif veya negatif olmasına bağlı olarak odaklanma (focusing) veya odakdışı (defocusing) Gardner denklemleri olarak adlandırılmaktadır. Bu denklemin, daha önce bahsedildiği gibi katı-hal ve plazma fiziği [36, 37], kuantum alan teorisi [39] ve Bose-Einstein yoğunlaşması [41] vb. birçok alanda uygulamaları da bulunmaktadır. Gardner denkleminin xy -düzlemine genişletilmesiyle (2+1) boyutlu Gardner-KP denklemi elde edilir:

$$(u_t + 6uu_x \pm 6u^2u_x + \varepsilon^2u_{xxx})_x + \lambda u_{yy} = 0. \quad (2.37)$$

Gardner-KP denklemi, okyanuslardaki büyük genlikli, güçlü nonlineer etkiye sahip iç dalgaları modelleme açısından literatürde önemli bir denklem olarak görülmektedir [64].

Bu bölümde, (2+1) boyutlu Gardner-KP denklemi bir benzerlik dönüşümü uygulanarak (1+1) boyutlu silindirik forma indirgenecektir. Buna göre,

$$(u_t + 6uu_x - 6u^2u_x + \varepsilon^2u_{xxx})_x + \lambda u_{yy} = 0, \quad (2.38)$$

denklemi için alınacak başlangıç koşulu:

$$u(x, y, 0) = \frac{1}{2} \left((f^- + f^+) + (f^+ - f^-) \tanh \left(A \left(x + \frac{1}{2} \phi(y, 0) \right) \right) \right) \quad (2.39)$$

şeklinde. Bu başlangıç koşulu, $\eta = x + \frac{1}{2} \phi(y, 0)$ olmak üzere

$$u(\eta, 0) = \begin{cases} f^-, & \eta < 0, \\ f^+, & \eta > 0 \end{cases} \quad (2.40)$$

ile gösterilen Riemann-tipi başlangıç koşulunun iki boyutlu bir genişlemesidir. Burada, f^- , f^+ ve A reel sabitlerdir. $\phi(y, t)$ fonksiyonu ise dalga cephesinin formunu veren fonksiyondur. Problemin tanımında, \tilde{c} reel sabit olmak üzere $\phi(y, 0) = \tilde{c}y^2$ parabolik

cephe kabulü yapılacaktır. Sadece bu koşul altında, (2+1) boyutlu Gardner-KP denkleminin (1+1) boyutlu silindirik Gardner denklemine indirgendiği gösterilecektir. (2.38) denkleminin aşağıdaki çözüm formunu sağladığı kabul edilmektedir:

$$u = f\left(x + \frac{\phi(y,t)}{2}, t, y\right) \quad (2.41)$$

Bu çözüm formu (2.38) denkleminde yazılırsa, $\eta = x + \frac{\phi(y,t)}{2}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2}\phi_t f_\eta + f_t + 6ff_\eta - 6f^2 f_\eta + \varepsilon^2 f_\eta \eta \eta\right)_\eta \\ & + \lambda \left[\frac{1}{4}(\phi_y)^2 f_\eta \eta + \frac{1}{2}\phi_{yy} f_\eta + \phi_y f_{\eta y} + f_{yy}\right] = 0 \end{aligned} \quad (2.42)$$

elde edilir.

Bu denklemde, $f^- > f^+ \geq 0$ için $u = f\left(x + \frac{\phi(y,t)}{2}, t, y\right)$ çözümünü sonsuzlukta aşağıdaki sınır koşullarını sağlar:

i) *Azalmayan tipli başlangıç koşulları için:*

$$\eta \rightarrow -\infty \text{ iken } u \rightarrow R(t)f^+ \text{ ve } \eta \rightarrow \infty \text{ iken } u \rightarrow R(t)f^- \quad (2.43)$$

ii) *Artmayan tipli başlangıç koşulları için:*

$$\eta \rightarrow -\infty \text{ iken } u \rightarrow R(t)f^- \text{ ve } \eta \rightarrow \infty \text{ iken } u \rightarrow R(t)f^+. \quad (2.44)$$

Bu denklemlerde yer alan $R(t)$ fonksiyonu ve f^- , f^+ parametre değerleri, bu bölümün sonunda belirlenecektir.

Bu sınır koşulları altında ve parabolik cephe kabulünden dolayı ϕ_{yy} 'nin y 'den bağımsız olduğu varsayımıyla aşağıdaki denklem sistemi elde edilir:

$$\phi_t + \frac{\lambda}{2}(\phi_y)^2 = 0, \quad (2.45a)$$

$$f_t + 6ff_\eta - 6f^2 f_\eta + \frac{\lambda}{2}\phi_{yy}f + \varepsilon^2 f_\eta \eta \eta = 0. \quad (2.45b)$$

$\phi(y,t)$ fonksiyonu, dalga cephesinin şeklini belirleyen fonksiyon olduğundan bununla ilgili olan (2.45a) denklemi, cephe şekli denklemidir (front shape equation); f ile ilgili olan (2.45b) denklemi ise dalga cephesinin dispersif şok dalgası yayılımını karakterize eden denklemdir.

(2.45a) denklemini çözmek için, $v = \phi_y$ değişken dönüşümü yapılırsa,

$$v_t + \lambda v v_y = 0 \quad (2.46)$$

şeklindeki Hopf denklemi elde edilir. Bu denklem, $v(y,0) = 2\tilde{c}y$ başlangıç koşulu altında çözümlerse,

$$v(y,t) = \frac{2\tilde{c}y}{1+2\tilde{c}\lambda t} \quad (2.47)$$

elde edilir. Böylece cephe şekli denklemi için çözüm

$$\phi(y,t) = \frac{\tilde{c}y^2}{1+2\tilde{c}\lambda t} \quad (2.48)$$

olarak bulunur. Bu ifade, dispersif şok dalgası yayılımını karakterize eden (2.45b) denkleminde yazılırsa,

$$f_t + 6ff_\eta - 6f^2f_\eta + \varepsilon^2 f_{\eta\eta\eta} + \frac{\lambda\tilde{c}}{1+2\tilde{c}\lambda t}f = 0 \quad (2.49)$$

elde edilir. Bu denklem, tez çalışmasında **silindirik Gardner (cG) denklemi** olarak adlandırılacaktır. Literatürde, silindirik KdV ve silindirik BO denklemleri daha önce tanımlandığından [44], bu çalışmaya istinaden (2.49)'da elde edilen Gardner tipi denklem için silindirik Gardner tanımlaması yapılmıştır. Burada, $\lambda = 1$ durumu dikkate alınacaktır. Parabolik cephenin yönünün değiştirilmesiyle, yani \tilde{c} yerine $-\tilde{c}$ alınmasıyla $\lambda = -1$ için de inceleme yapılması mümkündür.

$t_0 = 1/\lambda\tilde{c}$ olarak tanımlanır, $\lambda\tilde{c}/(1+2\tilde{c}\lambda t)$ terimi, $1/(2t+t_0)$ şeklinde yazılır.

Problemin tanımında, parabolik cephe kabulü yerine $\phi(y,0) = \tilde{c}y$ düzlemsel başlangıç cephe kabulü de yapılabilir. Ancak, bu durumda ϕ_{yy} , \tilde{c} parametresinden bağımsız olacağından (2.49) denklemi yerine klasik Gardner denklemi elde edilir. Gardner denkleminin salınımlı gelgit dalgası çözümü (undular bore solution), [40] çalışmasında elde edilmiştir.

(2.49) denkleminin aşağıdaki basamak tipi başlangıç koşulundaki çözümü inşa edilecektir:

$$f(\eta,0) = \begin{cases} f^-, & \eta < 0, \\ f^+, & \eta > 0. \end{cases} \quad (2.50)$$

Bu başlangıç koşulundan da anlaşılacağı üzere, Gardner ve silindirik Gardner denklemlerinin modellediği dalgaların yapısı, f^- , f^+ başlangıç adım parametrelerine bağlı olarak değişmektedir. Bu denklemlerin dispersif şok dalgalarının elde edilebilmesi için, $f^- > f^+ \geq 0$ koşulu dikkate alınmalıdır. Tez çalışmasında, f^- , f^+ parametre değerlerine bağlı olarak, (2.49) denkleminin DSW çözümü belirlenecektir. Şimdi, (2.49) denkleminin sonsuzlukta sağlaması gereken sınır koşullarını belirleyelim. Bunun için, (2.49) denkleminde η 'ya bağlı terimleri ihmal ederek geriye kalan

denklemini, $R(0) = 1$ başlangıç koşulu altında çözelim. Bu başlangıç değeri probleminin çözümü, $R(t)$ 'yi verir:

$$R(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2ct}}. \quad (2.51)$$

Sonraki bölümde, cG denklemi için çoklu ölçekler yöntemi [52] uygulanarak Whitham modülasyon denklemlerinin elde edilmesi amaçlanmaktadır. Bu yöntem, ilerleyen dalga çözümü açık olarak bulunabilen herhangi bir nonlineer dalga denklemine uygulanabilir.

2.5 Çoklu Ölçekler Yönteminin Uygulanması

Bu bölümde, bir asimptotik pertürbasyon yöntemi olarak Luke tarafından geliştirilen çoklu ölçekler yöntemi [52] kullanılarak modülasyon denklemleri elde edilecektir. Bu yöntemin kullanılmasının başlıca nedenlerinden biri, orijinal WMT'de gerekli olan ilgili denklemlere ait korunum yasalarını doğrudan yazmanın verdiği zorluktur. WMT'de modülasyon denklemleri, korunum yasalarının ortalaması alınarak bulunur. Ancak indirgenen silindirik denklem olan cG denklemi için korunum yasaları bilinmediğinden, korunum yasaları yerine kullanılacak koşulların asimptotik analiz yöntemi olan çoklu ölçekler metodunun uygulanmasıyla elde edilmesi planlanmaktadır. Dalgaların korunumu yasası ve sekülerlik koşulları elde edilerek ilerleme sağlanacaktır. Daha sonra, periyodik ilerleyen dalga çözümünün kullanılmasıyla birlikte modülasyon denklemlerinin açık halleri elde edilecektir. Modülasyon denklem sisteminin analitik çözümü mümkün olmadığı için sayısal olarak çözmek amacıyla Shampine tarafından geliştirilen, MATLAB tabanlı birinci mertebeden hiperbolik kısmi diferansiyel denklem çözücü kullanılarak Lax-Wendroff metodunun nonlineer filtreyle iki aşamalı bir biçimi seçilmektedir [56].

Çoklu ölçekler metodu, periyodik ilerleyen dalga çözümü olan herhangi bir nonlineer dalga denklemine uygulanabilir ve Whitham'ın orijinal teorisindeki gibi temelinde, değişkenleri yavaş ve hızlı değişkenler olarak ikiye ayırmak fikri vardır. Whitham'ın geliştirdiği teoriden farkı, bu yöntemde, korunum yasalarına ihtiyaç duyulmamaktadır. Çoklu ölçekler metodu ile mertebeye problemleri elde edilip bu denklemlerin yardımıyla yazılan sekülerlik koşulları kullanılarak yavaş değişen parametreler için Whitham denklemleri bulunur.

Başlangıçta, hızlı salınımları biçimlendirmek amacıyla bir "hızlı" faz değişkeni tanımlanır:

$$\theta = \frac{1}{\varepsilon}(k\eta - \omega t). \quad (2.52)$$

Burada, η , t yavaş değişen uzay-zaman koordinatlarını ve $k(\eta, t)$, $\omega(\eta, t)$ ise sırasıyla, dalga sayısı ve açısal frekansı göstermektedir. Ayrıca, $0 < \varepsilon \ll 1$ olduğu kabul edilmektedir. $\varepsilon \rightarrow 0$ limitinde, yavaş değişkenlere göre türev terimleri ihmal edilebilmektedir, bu nedenle V faz hızını göstermek üzere,

$$\theta_\eta = \frac{k}{\varepsilon}, \quad \theta_t = -\frac{\omega}{\varepsilon} = -\frac{kV}{\varepsilon} \quad (2.53)$$

elde edilir. $\theta = \theta(\eta, t)$ fonksiyonunun ikinci mertebe kısmi türevlerinin var ve sürekli olmasından karışık türevler için, $(\theta_\eta)_t = (\theta_t)_\eta$ olması gerektiği (Clairaut teoremi) bilinmektedir. Böylece, ilk uyumluluk koşulu (dalgaların korunumu) aşağıdaki şekilde yazılır:

$$k_t + (kV)_\eta = 0. \quad (2.54)$$

Hızlı ve yavaş değişkenler ile birlikte, (2.49) denklemini, eski ve yeni değişkenlerin türevleri arasındaki

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \rightarrow \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -\frac{\omega}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial t} \quad (2.55)$$

dönüşümlerini kullanarak yeniden ifade edebiliriz. Buna göre,

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{\omega}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial t} \right) f + 6f \left(\frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right) f - 6f^2 \left(\frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right) f \\ & + \varepsilon^2 \left(\frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^3 f + \frac{\lambda \tilde{c}}{1 + 2\tilde{c}\lambda t} = 0 \end{aligned} \quad (2.56)$$

yazılır. Bu denklemi, ε 'un aynı kuvvetlerini gruplayarak tekrar yazdığımızda,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon} \left(-\omega f_\theta + 6k f f_\theta - 6k f^2 f_\theta + k^3 f_{\theta\theta\theta} \right) \\ & + \left(f_t + 6f f_\eta - 6f^2 f_\eta + 3k^2 f_{\eta\theta\theta} + 3k k_\eta f_{\theta\theta} + \frac{\lambda \tilde{c}}{1 + 2\tilde{c}\lambda t} f \right) \\ & + \varepsilon (3k f_{\theta\eta\eta} + 3k_\eta f_{\eta\theta} + k_{\eta\eta} f_\theta) + \varepsilon^2 f_{\eta\eta\eta} = 0 \end{aligned} \quad (2.57)$$

denklemini oluşturulur. f fonksiyonunun ε parametresinin kuvvet açılımına sahip olduğu, yani

$$f(\theta, \eta, t) = f_0(\theta, \eta, t) + \varepsilon f_1(\theta, \eta, t) + \varepsilon^2 f_2(\theta, \eta, t) + \dots \quad (2.58)$$

kabul edilerek (2.57)'de yerine yazılırsa f_i 'lerin ardışık olarak hesaplanabileceği, ε 'a göre aşağıdaki merteye problemleri elde edilir:

$$O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) : -\omega f_{0,\theta} + 6kf_0 f_{0,\theta} - 6kf_0^2 f_{0,\theta} + k^3 f_{0,\theta\theta\theta} = 0, \quad (2.59)$$

$$O(1) : -\omega f_{1,\theta} + 6k(f_0 f_1)_\theta - 6kf_0^2 f_{1,\theta} - 12kf_0 f_1 f_{0,\theta} + k^3 f_{1,\theta\theta\theta} = U, \quad (2.60)$$

$$U = -\left(f_{0,t} + 6f_0 f_{0,\eta} - 6f_0^2 f_{0,\eta} + 3k^2 f_{0,\eta\theta\theta} + 3kk_\eta f_{0,\theta\theta} + \frac{f_0}{2t + t_0}\right). \quad (2.61)$$

Yüksek merteye problemlere ihtiyaç duyulmadığından, bu tez çalışmasında ilk iki merteye problem ile ilgilenilecektir. Ayrıca, (2.59)'da verilen $1/\varepsilon$ mertebeli denklem Gardner denklemi ile benzer yapıda olduğundan bu denklemin çözümü için Gardner denkleminin ilerleyen dalga çözümü kullanılacaktır.

2.6 Riemann Değişkenleri Cinsinden Modülasyon Denklemleri

Bu bölümdeki amacımız, Gardner denkleminin (2.32) ile verilen ilerleyen dalga çözümündeki u_2, u_3, u_4 bağımsız parametre değerlerine karşılık gelen üç modülasyon denkleminin elde edilmesidir. Bunlardan ilki dalgaların korunumunu veren (2.54) denklemdir. Diğer iki denklemi elde etmek için, (2.60) denklemindeki $O(1)$ mertebeli problemin incelenmesi gerekir. Eğer, (2.32) çözümü (2.60) denkleminde yerine yazılırsa, seküler terimler, yani θ 'ya göre keyfi olarak büyüyen terimler oluşur. Bu terimleri yok edebilmek için eşlenik (adjoint) probleme bakılmalıdır.

Buna göre, w , $\mathcal{L}u = 0$ denkleminin karşılık gelen eşlenik problemin çözümü olsun, yani $\langle \mathcal{L}u, v \rangle = \langle u, \mathcal{L}^A v \rangle$ olmak üzere

$$\mathcal{L}^A w = 0 \quad \text{ve} \quad \mathcal{L}^A = \omega \partial_\theta - 6kf_0 \partial_\theta + 6kf_0^2 \partial_\theta + 12kf_0 f_1 \partial_\theta - k^3 \partial_{\theta\theta\theta} \quad (2.62)$$

olsun. Seküler terimleri yok etmek için, merteye probleminden elde edilen aşağıdaki bağıntıyı kullanabiliriz:

$$\int_0^1 (w \mathcal{L} f_1 - f_1 \mathcal{L}^A w) d\theta = \int_0^1 w U d\theta. \quad (2.63)$$

Bu bağıntıdaki U 'nun tanımı (2.61)'de verilmiştir. Dikkat edilirse, (2.62) denkleminin bir çözümü olarak $w = f_0$ alınır, oluşacak yeni denklem, bir (-) çarpan farkı ile (2.59) ile aynıdır. Dolayısıyla, (2.62) eşlenik probleminin iki lineer bağımsız çözümü olarak, $w = 1$ ve $w = f_0$ alınabilir. Bu çözümler, (2.63)'te yerine yazılırsa sırasıyla aşağıdaki

sekülerlik koşulları elde edilir:

$$\int_0^1 U d\theta = 0, \quad (2.64)$$

$$\int_0^1 f_0 U d\theta = 0. \quad (2.65)$$

Sekülerlik koşullarını yazabilmek için f_0 'ın sağladığı,

$$\int_0^1 \frac{\partial^i f_0}{\partial \theta^i} d\theta = 0, \quad \int_0^1 f_0 \frac{\partial^j f_0}{\partial \theta^j} d\theta = 0 \quad (2.66)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots \quad j = 1, 3, 5, \dots \quad \text{olmak üzere ve} \quad (2.67)$$

$$\int_0^1 f_0 f_{0,\theta\theta} d\theta = - \int_0^1 f_{0,\theta}^2 d\theta \quad (2.68)$$

eşitlikleri kullanılırsa [65], (2.64) ve (2.65) ile ifade edilen ikinci ve üçüncü sekülerlik koşulları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 f_0 d\theta + \frac{\partial}{\partial \eta} \int_0^1 (3f_0^2 - 2f_0^3) d\theta + \frac{1}{2t + t_0} \int_0^1 f_0 d\theta = 0, \quad (2.69)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 f_0^2 d\theta + \frac{\partial}{\partial \eta} \int_0^1 (4f_0^3 - 3f_0^4 - 3k^2 f_{0,\theta}^2) d\theta + \frac{2}{2t + t_0} \int_0^1 f_0^2 d\theta = 0. \quad (2.70)$$

Bu sekülerlik koşullarındaki $f_0^2, f_0^3, f_0^4, f_{0,\theta}^2$ fonksiyonları hesaplanıp integralleri alınır [EK A], modülasyon denklemleri u_1, u_2, u_3, u_4 değişkenleri cinsinden elde edilebilir.

Whitham, KdV denklemi için modülasyon denklemlerini elde ettikten sonra, çözülmesi zor olan bu denklem sistemini daha kolay çözülebilir hale getirmek için denklemleri bir dönüşüm uygulayarak köşegensel (Riemann) formuna indirgemmiştir. Bunun için, Riemann değişkenleri olarak adlandırılan ve u_1, u_2, u_3, u_4 kökleri ile ifade edilen yeni değişkenlerin tanımlanması gerekmektedir. Gardner denkleminin Riemann değişkenleri olarak tanımlanan r_i 'lerin kökler cinsinden ifadeleri aşağıdaki gibi elde edilmiştir [40]:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1}{4}(u_1 + u_2)(u_3 + u_4), \\ r_2 &= \frac{1}{4}(u_1 + u_3)(u_2 + u_4), \\ r_3 &= \frac{1}{4}(u_2 + u_3)(u_1 + u_4). \end{aligned} \quad (2.71)$$

Burada, u_i 'ler daha önce belirtildiği gibi η ve t 'nin yavaş değişen fonksiyonlarıdır, dolayısıyla $r_i = r_i(\eta, t)$ olur.

u_i fonksiyonlarının r_i 'ler cinsinden ifadeleri aşağıdaki gibi yazılabilirler:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4r_1} - \sqrt{1-4r_2} + \sqrt{1-4r_3}), \\ u_2 &= \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4r_1} + \sqrt{1-4r_2} - \sqrt{1-4r_3}), \\ u_3 &= \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1-4r_1} - \sqrt{1-4r_2} - \sqrt{1-4r_3}), \\ u_4 &= \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1-4r_1} + \sqrt{1-4r_2} + \sqrt{1-4r_3}). \end{aligned} \quad (2.72)$$

Böylece, dalgaların korunumu yasası ve sekülerlik koşulları birlikte düşünülürse modülasyon denklemleri için,

$$\begin{aligned} k_t + (kV)_\eta &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 f_0 d\theta + \frac{\partial}{\partial \eta} \int_0^1 (3f_0^2 - 2f_0^3) d\theta + \frac{1}{2t+t_0} \int_0^1 f_0 d\theta &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 f_0^2 d\theta + \frac{\partial}{\partial \eta} \int_0^1 (4f_0^3 - 3f_0^4 - 3k^2 f_{0,\theta}^2) d\theta + \frac{2}{2t+t_0} \int_0^1 f_0^2 d\theta &= 0 \end{aligned} \quad (2.73)$$

yazılabilir.

EK A'da $f_0^2, f_0^3, f_0^4, f_{0,\theta}^2$ için verilen formüller kullanılarak modülasyon sistemi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} A_{11}r_{1t} + A_{12}r_{2t} + A_{13}r_{3t} + B_{11}r_{1\eta} + B_{12}r_{2\eta} + B_{13}r_{3\eta} + C_1 &= 0, \\ A_{21}r_{1t} + A_{22}r_{2t} + A_{23}r_{3t} + B_{21}r_{1\eta} + B_{22}r_{2\eta} + B_{23}r_{3\eta} + C_2 &= 0, \\ A_{31}r_{1t} + A_{32}r_{2t} + A_{33}r_{3t} + B_{31}r_{1\eta} + B_{32}r_{2\eta} + B_{33}r_{3\eta} + C_3 &= 0. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Bu denklem sistemini matris formunda aşağıdaki şekilde gösterebiliriz:

$$Ar_t + Br_\eta + C = 0. \quad (2.75)$$

Burada,

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix} \quad \text{ve} \\ C &= \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}, \quad r_t = \begin{pmatrix} r_{1t} \\ r_{2t} \\ r_{3t} \end{pmatrix}, \quad r_\eta = \begin{pmatrix} r_{1\eta} \\ r_{2\eta} \\ r_{3\eta} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A matrisi tekil matris olmadığından, (2.75) denklemini soldan A^{-1} ile çarptığımızda, modülasyon sisteminin Riemann değişkenleri cinsinden ifadesi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\frac{\partial r_i}{\partial t} + v_i(r_1, r_2, r_3) \frac{\partial r_i}{\partial \eta} + \frac{h_i(r_1, r_2, r_3)}{2t+t_0} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.76)$$

Burada, v_i 'ler Whitham karakteristik hızlarını göstermektedir ve

$$\begin{aligned} v_1 &= 2(r_1 + r_2 + r_3) + \frac{4(r_2 - r_1)K(m)}{E(m) - K(m)}, \\ v_2 &= 2(r_1 + r_2 + r_3) - \frac{4(r_2 - r_1)(1 - m^2)K(m)}{E(m) - (1 - m^2)K(m)}, \\ v_3 &= 2(r_1 + r_2 + r_3) + \frac{4(r_3 - r_2)K(m)}{E(m)} \end{aligned} \quad (2.77)$$

olarak tanımlanmaktadır. h_i 'ler ise silindirik terimleri göstermektedir. Daha kısa ifade elde edebilmek için $S_i = 1 - 4r_i$, ($i = 1, 2, 3$) tanımlaması yapılarak silindirik terimler aşağıdaki gibi yazılırlar:

$$\begin{aligned} h_1 &= -\frac{S_1 E}{E - K} - \frac{\sqrt{S_1}(\sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\sqrt{S_3})\Pi}{(E - K)(S_1 - S_3)} \\ &\quad + \frac{K\sqrt{S_1}\left(S_1 - \sqrt{S_1}(-1 + \sqrt{S_3}) + \sqrt{S_2}(1 + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})\right)}{2(E - K)(\sqrt{S_1} - \sqrt{S_3})}, \\ h_2 &= \frac{E(S_3 - S_1)S_2 - \sqrt{S_2}(\sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})(\sqrt{S_2} + \sqrt{S_1}\sqrt{S_3})\Pi}{E(S_1 - S_3) + K(S_3 - S_2)} \\ &\quad + \frac{K}{2(E(S_1 - S_3) + K(S_3 - S_2))} \left(\sqrt{S_2} \left(\sqrt{S_2} + \sqrt{S_3} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left(S_1 + S_2 - \sqrt{S_2}(-1 + \sqrt{S_3}) + \sqrt{S_1}(1 + \sqrt{S_3}) \right) \right), \\ h_3 &= -S_3 + \frac{\sqrt{S_3}(\sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})(\sqrt{S_1}\sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})\Pi}{E(S_3 - S_1)} \\ &\quad + \frac{\sqrt{S_3}(\sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})(1 + \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} - \sqrt{S_3})K}{2(\sqrt{S_1} - \sqrt{S_3})E}. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Bu denklemlerde, $K = K(m)$, $E = E(m)$ ve $\Pi = \Pi(n, m)$ sırasıyla, birinci, ikinci ve üçüncü türden tam eliptik integralleri göstermektedir. Eliptik integrallerin özellikleri için [57] ile gösterilen kitaptan yararlanılmıştır. Tez içerisinde kullanılan formüller ve (2.75)'te yer alan matrislerin açık ifadeleri, EK A ve EK B'de verilmiştir. Ayrıca, modül (m), üçüncü türden eliptik integralin parametresi (n), dalga sayısı (k) ve faz hızı (V), Riemann değişkenleri cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$m = \frac{\sqrt{r_2 - r_1}}{\sqrt{r_3 - r_1}}, \quad n = \frac{\sqrt{1 - 4r_1} - \sqrt{1 - 4r_2}}{\sqrt{1 - 4r_1} + \sqrt{1 - 4r_3}} \quad (2.79)$$

$$k = \frac{\sqrt{r_3 - r_1}}{2K(m)}, \quad V = 2(r_1 + r_2 + r_3). \quad (2.80)$$

3. SAYISAL ÇÖZÜMLER

3.1 Giriş

Önceki bölümde, sekülerlik koşulları oluşturularak cG denkleminin modülasyon denklemleri elde edilmiştir. Bu bölümde ise, klasik Gardner ile silindirik Gardner denklemleri için uygulanan sayısal yöntem ve sonuçları açıklanacaktır. Ayrıca, bulunan sayısal çözümler ile modülasyon denklemlerinin elde edilecek sayısal çözümleri karşılaştırılarak kullanılan yöntemin doğruluğunun gösterilmesi amaçlanmaktadır.

Sayısal yöntem, dispersif şok dalgası çözümünün elde edilmesi için önemli bir araçtır. Bununla birlikte, sayısal çözüm arayışının algoritmik açıdan birtakım zorlukları da vardır. Bu bölüm, bu zorlukları uygun bir sayısal yöntemle inceleme yaklaşımımızı ortaya koymaktadır. Gardner ve cG denklemlerinin doğrudan sayısal çözümleri için, ETDRK4 (exponential time differencing fourth order Runge-Kutta) metodunun Trefethen tarafından uygulanan modifiye biçimi (mETDRK4) kullanılacaktır [66]. Ayrıca, uzaysal parça için bir Fourier spektral yöntemi kullanılarak inceleme yapılacaktır. Yani, problemi Fourier uzayında belirli bir t zaman değerinde çözmek için mETDRK4 yöntemini kullanmaktayız.

Literatürde Fourier spektral yöntemlerinin kullanıldığı çalışmalar için Klein ve çalışma arkadaşları tarafından dördüncü mertebe zaman adımı yaklaşımının birçok denklem için uygulanması [67, 68] ve bununla birlikte solitonlar, patlama çözümleri [69, 70], dispersif şok dalgaları [71], salınım rejimleri [72] çalışmaları örnek verilebilir. Fourier spektral yöntemine alternatif olarak, yazarların kompakt bir sonlu farklar yöntemi geliştirdikleri çalışma örnek gösterilebilir [73]. Sayısal analizin başka bir uygulaması olarak Chebyshev spektral yöntemlerine dayanan eliptik teta fonksiyon çözümleri sınıfının incelendiği araştırma [74] önem taşımaktadır.

Çalışmamızda kullanacağımız Fourier spektral yönteminin bazı avantajları vardır. En önemlisi, MATLAB ile periyodik sınır koşullarına sahip bir kısmi diferansiyel

denklemleri çözmek için Fourier spektral yöntemi kullanarak kod yazmak uygulama açısından diğer yöntemler kadar zor değildir. Nonlineer terimler, hızlı Fourier dönüşümü (Fast Fourier Transform: FFT) kullanılarak değerlendirilir. Bu nedenle kod neredeyse sonlu farklar yöntemi kadar hızlıdır ve daha fazla spektral doğruluğa sahiptir. Bu yönteme çoğunlukla “pseudo-spektral” yöntem denir.

Yöntemin uygulama açısından sağladığı kolaylıklar dışında bazı kısıtlamaları da vardır. Örneğin, sınır koşulları Fourier spektral yöntemleri için sınırlayıcı bir koşulu gerektirmektedir. Bu spektral yöntemler için kullanılan sınır koşulları periyodiktir, ancak birçok problem için periyodik sınır koşulları dışında sınır koşulları da alınabilmektedir. Bu zorluğu gidermek için çalışmamızda uygun bir dönüşüm kullanılarak sınır koşulları düzenlenmiştir. Periyodik olmayan sınır koşulları için başka bir alternatif olarak Chebyshev polinomları kullanılabilir; ancak böyle bir uygulama kodun çalışma süresini uzatacaktır.

Modülasyon denklemlerinin sayısal çözümlerinde ise Shampine tarafından geliştirilen MATLAB temeline dayanan birinci mertebeden hiperbolik sistem çözücü kullanarak Lax-Wendroff metodunun iki aşamalı bir biçimi uygulanacaktır [56, 75].

3.2 Gardner ve Silindirik Gardner Denklemlerinin Sayısal Çözümleri

Bu bölümde, denklemlerin doğrudan sayısal çözümleri incelenecektir. Daha önce bahsedildiği üzere, Gardner ve cG denklemlerinin modellediği dalgaların yapısını, başlangıç adım parametreleri olarak adlandırılan f^-, f^+ parametreleri belirler. Bu parametre değerlerinin seçimi için sağlanması gereken koşullar bu bölümde açıklanacaktır.

Odakdışı Gardner denklemi,

$$f_t + 6ff_\eta - 6f^2f_\eta + \varepsilon^2 f_\eta \eta \eta = 0 \quad (3.1)$$

için bu parametrelerin değerlerine bağlı olarak dispersif şok dalgası (undular bore), genişleme (rarefaction) dalgası, solibore, trigonometrik bore gibi farklı durumları içeren dalga incelemeleri yapılabilir [40]. Buna göre, (3.1) denklemi için başlangıç koşulu, f^- ve f^+ parametrelerine bağlı olarak aşağıdaki gibi yazılır:

$$f(\eta, 0) = \begin{cases} f^-, & \eta < 0, \\ f^+, & \eta > 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Gardner denkleminin (3.2) başlangıç koşulu altındaki çözümünün sınıflandırması [40] çalışmasında verilmiştir. Bu sınıflandırmaya göre, Gardner denklemiyle KdV denkleminin dispersiyonsuz limitleri arasında birebir uygunluk vardır. Gardner denkleminin dispersiyonsuz limiti:

$$f_t + 6f(1-f)f_\eta = 0 \quad (3.3)$$

ve KdV denkleminin dispersiyonsuz limiti:

$$v_t + 6vv_\eta = 0 \quad (3.4)$$

olarak verilir. $v = f(1-f)$ kuadratik dönüşümü (3.4) denklemine uygulanırsa,

$$(1-2f)[f_t + 6f(1-f)f_\eta] = 0 \quad (3.5)$$

elde edilir. (3.4) denkleminin $v = a$ şeklindeki sabit çözümü, (3.3) denkleminde, ikinci dereceden $v(f) = f(1-f) = a$ denkleminin köklerinin bulunmasıyla ortaya çıkan iki farklı sabit çözüme yol açmaktadır. Bu denklemin kökleri, f^- ve f^+ ile gösterilir. (3.3) ve (3.4) denklemlerinin çözümleri arasındaki uygunluk, $v(f)$ 'nin monoton olduğu $f < 1/2$ ve $f > 1/2$ ile sınırlı bölgelerde mümkündür. $f = 1/2$ değeri ise dönüş noktası (turning point) olarak adlandırılır. Bu noktanın etrafındaki değerlerin incelenmesine bağlı olarak farklı dalga biçimleri gözlemlenmiştir [40].

Gardner ve cG denklemlerinin sayısal çözümlerinin incelenmesinde, dispersif şok dalgası oluşumu için,

$$f^+ < f^- \leq 1/2 \quad (3.6)$$

koşulu dikkate alınmalıdır [40].

Sayısal simülasyonlarımızda, zaman adımı için dördüncü mertebe Runge-Kutta (RK4) prosedürü kullanılmıştır [66]. ETD RK4 metodu, daha önce de bahsedildiği üzere periyodik sınır koşullarına sahip problemlerde kullanışlıdır. Ancak silindirik denklem için,

$$f_t + 6ff_\eta - 6f^2f_\eta + \frac{1}{2t+t_0}f + \varepsilon^2 f_{\eta\eta\eta} = 0 \quad (3.7)$$

denkleminde f , artmayan tipli başlangıç koşullarında aşağıdaki sınır koşullarına sahiptir:

$$\eta \rightarrow -\infty \text{ iken } f \rightarrow R(t)f^- \text{ ve } \eta \rightarrow \infty \text{ iken } f \rightarrow R(t)f^+. \quad (3.8)$$

Burada, daha önce Bölüm 2’de elde edilen (2.51) ifadesinde $t_0 = 1/\tilde{c}$ tanımlanarak $R(t) = \sqrt{\frac{t_0}{2t+t_0}}$ olarak elde edilmektedir.

Her iki uçtaki sınır koşulları, t 'nin fonksiyonu olarak verildiğinden,

$$f = R(t)\psi \quad (3.9)$$

dönüşümü kullanılarak sınır koşulları uygun hale getirilir. Buna göre, (3.7) denkleminde bu dönüşümün uygulanmasıyla,

$$R'\psi + R\psi_t + 6R^2\psi\psi_\eta - 6R^3\psi^2\psi_\eta + \varepsilon^2 R\psi_{\eta\eta\eta} + \frac{R\psi}{2t+t_0} = 0 \quad (3.10)$$

elde edilir. Bu denklemde R ve türevinin yerine yazılıp gerekli sadeleştirmenin yapılmasıyla, (3.7) denklemi aşağıdaki değişken katsayılı Gardner denklemine dönüştürülür:

$$\psi_t + 6R\psi\psi_\eta - 6R^2\psi^2\psi_\eta + \varepsilon^2\psi_{\eta\eta\eta} = 0. \quad (3.11)$$

Bu durumda, (3.11) denklemi için sol sınır koşulu $\psi_- = f^-$ ve sağ sınır koşulu $\psi_+ = f^+$ olarak sabit değerler almaktadır.

Sayısal çözümlerde ETDRK4 metodunun modifiye edilmiş bir versiyonunu kullandık. Yöntemin gerekli spektral doğruluğu için, başlangıç koşulu düzgün ve periyodik olmalıdır. Ancak, (2.39) ile gösterilen başlangıç koşulu periyodik değildir. Bu sorunu çözebilmek için, (3.11) denklemini η değişkenine göre türeterek $\psi_\eta = z$ tanımlamasını kullanırsak,

$$z_t + 6R(\psi z)_\eta - 6R^2(\psi^2 z)_\eta + \varepsilon^2 z_{\eta\eta\eta} = 0 \quad (3.12)$$

denklemini elde edilir. Böylece (2.39) başlangıç koşulu, $\hat{C} > 0$ sabit bir değer olmak üzere,

$$z(\eta, 0) = -\frac{\hat{C}}{2} \operatorname{sech}^2(\hat{C}\eta) \quad (3.13)$$

olarak dönüştürülür.

Fourier uzayında çalışabilmek için, (3.12) denklemi

$$\hat{z}_t = \mathcal{L}\hat{z} + 6R\mathcal{N}_1(\hat{z}, t) - 6R^2\mathcal{N}_2(\hat{z}, t), \quad (3.14)$$

olarak yazılır. Burada, $\hat{z} = \mathcal{F}(z)$, z 'nin Fourier dönüşümünü, \mathcal{L} lineer terimi ve \mathcal{N}_1 ile \mathcal{N}_2 nonlineer terimleri göstermektedir. Lineer ve nonlineer terimlerin açık ifadeleri aşağıda görülebilir:

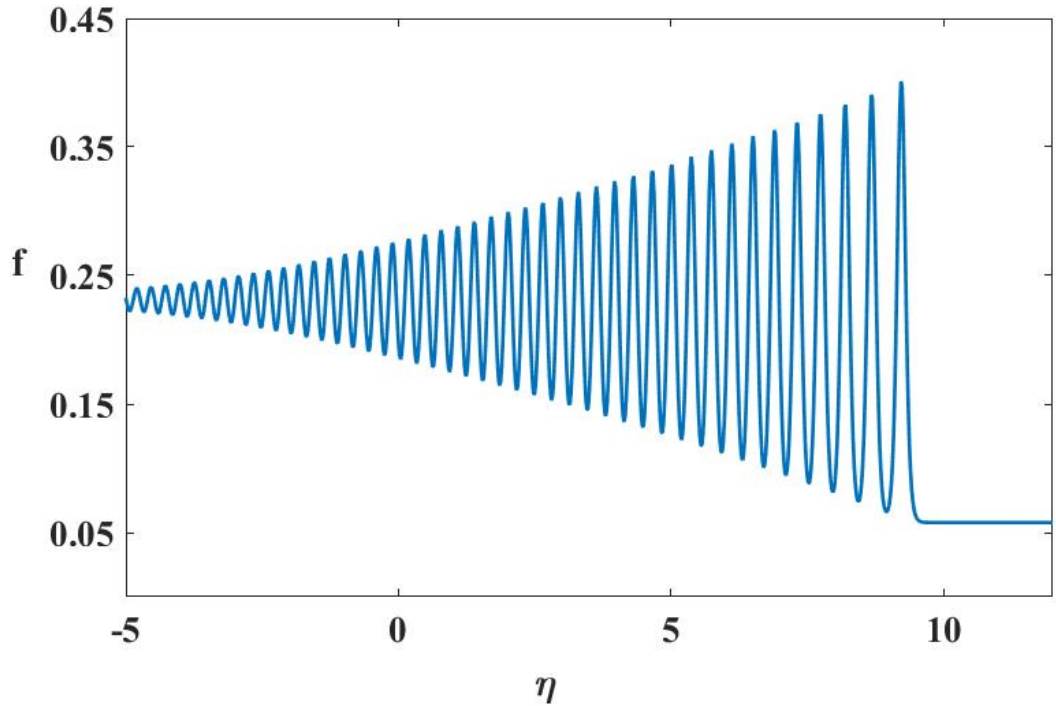
$$\mathcal{L}\hat{z} = i\varepsilon^2 k^3 \hat{z}, \quad (3.15)$$

$$\mathcal{N}_1(\hat{z}, t) = -ik \mathcal{F} \left(\left(\int_{-L}^{\eta} \mathcal{F}^{-1}(\hat{z}) d\eta' + \psi_- \right) \mathcal{F}^{-1}(\hat{z}) \right), \quad (3.16)$$

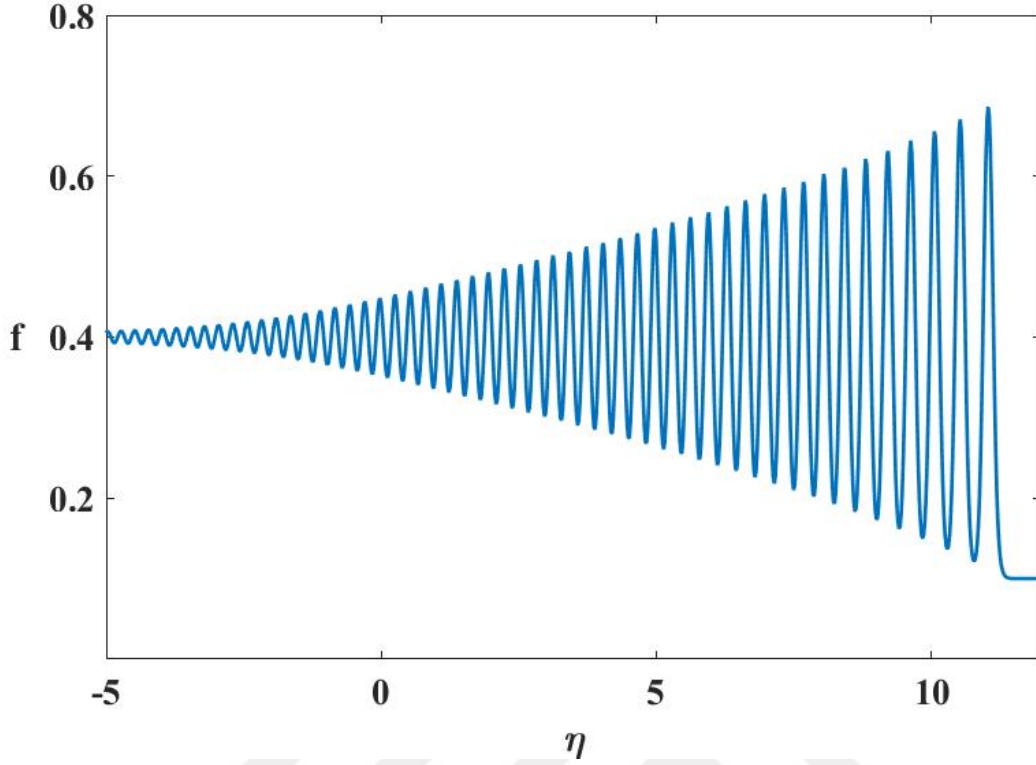
$$\mathcal{N}_2(\hat{z}, t) = -ik \mathcal{F} \left(\left(\int_{-L}^{\eta} \mathcal{F}^{-1}(\hat{z}) d\eta' + \psi_- \right)^2 \mathcal{F}^{-1}(\hat{z}) \right). \quad (3.17)$$

Böylelikle, (3.12) denklemi sayısal olarak $[-L, L]$ sonlu uzaysal bölgesinde (3.15)-(3.17) denklemleri yardımıyla çözülebilir. Modifiye ETDRK4 (mETDRK4) metodu için uzayda Fourier modlarının sayısı $N = 2^{12}$, uzaysal bölge tanım aralığı için $L = 40$ ve zaman adımı için $h = 10^{-3}$ alınmaktadır. Ayrıca, $\tilde{c}^{-1} = t_0 = 10$, $\varepsilon^2 = 10^{-3}$ ve $\hat{C} = 10$ parametre kabulleri yapılmaktadır. Metodun uygulanmasıyla ilgili ayrıntılı bilgi ve formüllere, EK C bölümünde yer verilmiştir.

Bu aşamadan sonra, yapılan tüm hesaplar ve mETDRK4 yöntemindeki katsayılar MATLAB programına aktarılarak sonuçlar elde edilmiştir. cG denkleminin sayısal çözümü, Şekil 3.1'de (3.2) başlangıç koşulu ile birlikte elde edilmiştir. Burada, başlangıç adım parametreleri olarak $f^- = 0.4$, $f^+ = 0.1$ alınmıştır. Eğer, (3.7) denklemindeki silindirik terimi gösteren $f/(2t + t_0)$ ihmal edilirse, bu denklem klasik Gardner denkleminde indirgenmektedir. Bu denklemin sayısal çözümü de Şekil 3.2'de görülebilir.



Şekil 3.1 : cG denkleminin $t = 10$ için sayısal çözümü.



Şekil 3.2 : Gardner denkleminin $t = 10$ için sayısal çözümü.

Farklı zaman değerleri için inceleme yapıldığında, cG denklemindeki t 'ye bağlı terimden dolayı genlik seviyelerinde düşüş olduğu gözlemlenmiştir. Şekil 3.1'de ön kenar seviyesi için $\tilde{c}^{-1} = t_0 = 10$ ve $t = 10$ zaman değerinde,

$$R(t)f^+ = \frac{\sqrt{t_0}}{\sqrt{2t+t_0}}f^+ \quad (3.18)$$

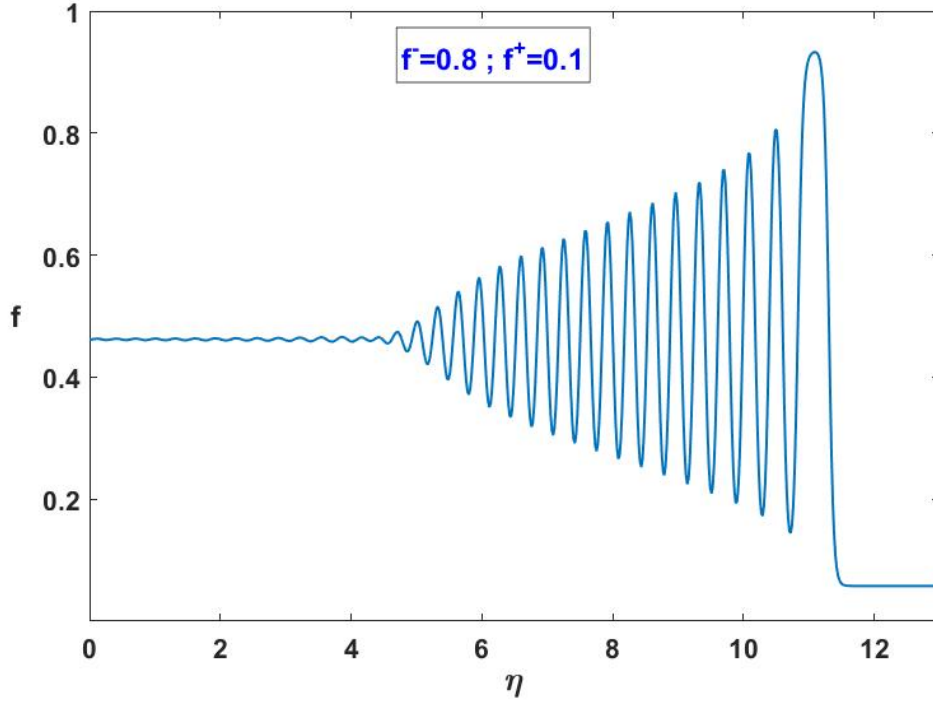
hesaplanırsa 0.0586 elde edilir. Arka kenar seviyesi için de benzer olarak,

$$R(t)f^- = \frac{\sqrt{t_0}}{\sqrt{2t+t_0}}f^- \quad (3.19)$$

formülü kullanılarak 0.2309 bulunur.

Gardner denkleminin Şekil 3.2'de gösterilen grafiği incelendiğinde, bu denklem için $f^- = 0.4$ ve $f^+ = 0.1$ başlangıç adım parametrelerinin değerlerine bağlı olarak zaman içinde değişim gözlemlenmediği, ön ve arka kenar seviyelerinin sabit bir durumda konumlandığı görülmüştür.

f^- ve f^+ değerleri DSW oluşumunu sağlamak için öncelikle $f^+ < f^- \leq 1/2$ aralığında seçilmiştir. Ancak, Şekil 3.3-Şekil 3.7'de farklı değerlerdeki grafikler elde edilerek cG denkleminin çözümlerinin davranışı incelenmiştir.



Şekil 3.3 : cG denkleminin $f^- = 0.8$ ve $f^+ = 0.1$ değerleri için sayısal çözümü ($t=10$).

f^- ve f^+ değerlerinin seçiminde,

$$f^+ < \frac{1}{2} < f^- < 1 - f^+ \quad (3.20)$$

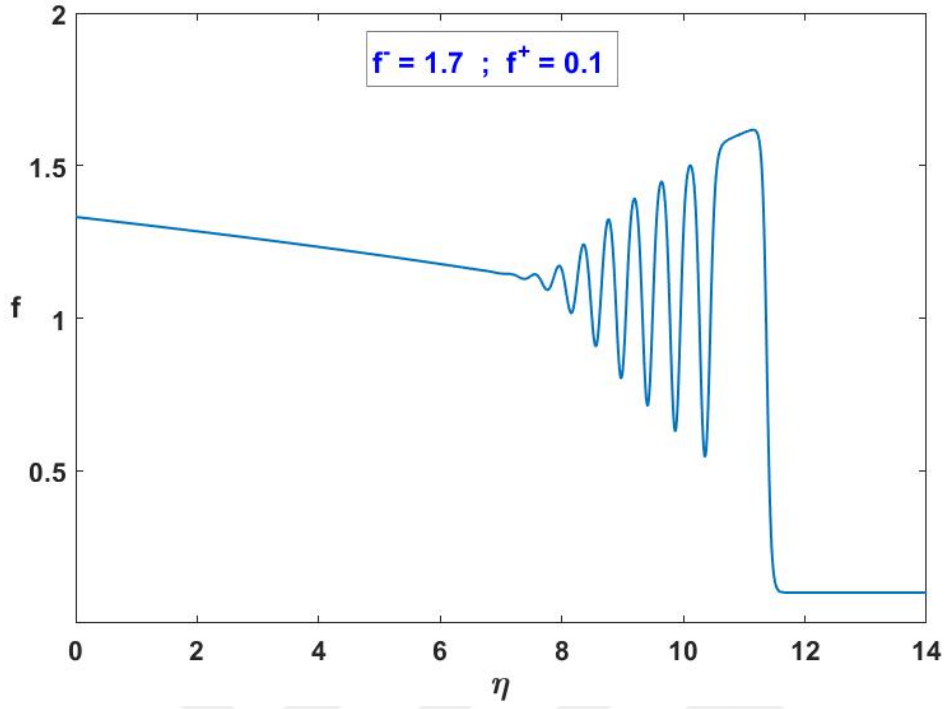
bölgesi dikkate alınarak cG denkleminin sayısal çözümü yapıldığında Şekil 3.3'te verilen grafik elde edilmektedir. DSW oluşumu için sağlanması gereken koşuldan farklı olarak bu grafik elde edilirken $f^- > 1/2$ seçimi yapılmıştır.

Buna göre, Şekil 3.1'de gözlemlenen undular bore tipi çözüm yerine $t = 10$ için arka kenarda $R(t)f^- = 0.46188$ ve $1 - f^+ = 0.9$ arasında ters undular bore ve ön kenarda solibore olarak adlandırılan dalga yapısı gözlemlenmiştir. Gardner denkleminin sayısal çözümleri yapılırken de (3.20) bölgesinde benzer dalga yapısı elde edilmiştir [40].

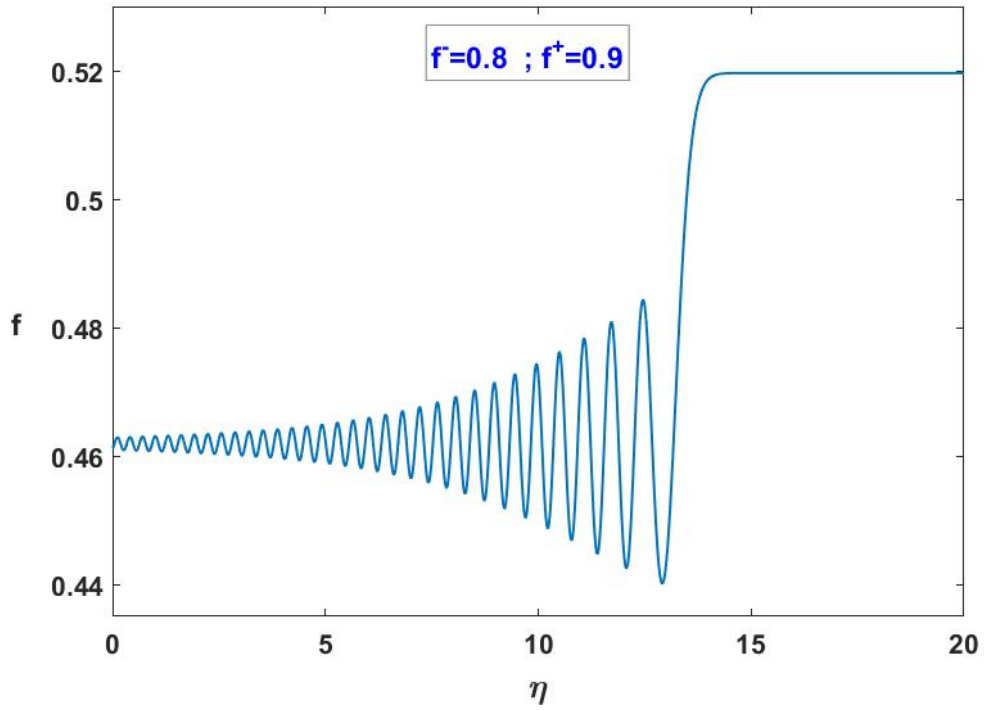
Şekil 3.4 elde edilirken f^- ve f^+ değerlerinin seçiminde,

$$1 - f^- < f^+ < \frac{1}{2} < f^-, \quad f^- + f^+ > 1 \quad (3.21)$$

bölgesi dikkate alınmıştır. Bu grafikte, ön kenarda Şekil 3.3'tekine benzer yapı elde edilirken arka kenarda ters undular bore yerine ters genişleme (rarefaction) olarak adlandırılan dalga yapısı gözlemlenmektedir.



Şekil 3.4 : cG denkleminin $f^- = 1.7$ ve $f^+ = 0.1$ değerleri için sayısal çözümü (t=10).

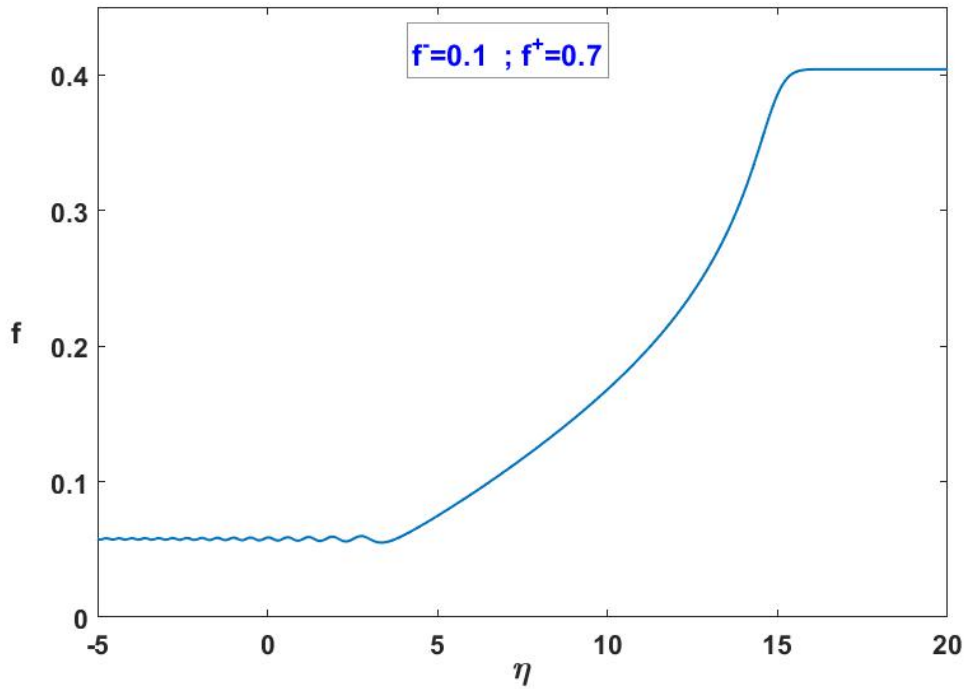


Şekil 3.5 : cG denkleminin $f^- = 0.8$ ve $f^+ = 0.9$ değerleri için sayısal çözümü (t=10).

Eğer, f^- ve f^+ değerleri

$$\frac{1}{2} < f^- < f^+ < 1 \quad (3.22)$$

koşulunu sağlayacak biçimde seçilirse Şekil 3.5 elde edilir. Bu koşul DSW oluşumu için f^- ve f^+ değerlerinin sağlaması gereken koşulun tersi olarak düşünülebilir. Bu nedenle elde edilen dalga yapısı undular bore değil de ters undular bore olarak adlandırılmaktadır. $t = 10$ için arka kenarda $R(t)f^- = 0.46188$ ve ön kenarda $R(t)f^+ = 0.5196$ seviyeleri gözlemlenmektedir.



Şekil 3.6 : cG denkleminin $f^- = 0.1$ ve $f^+ = 0.7$ değerleri için sayısal çözümü ($t=10$).

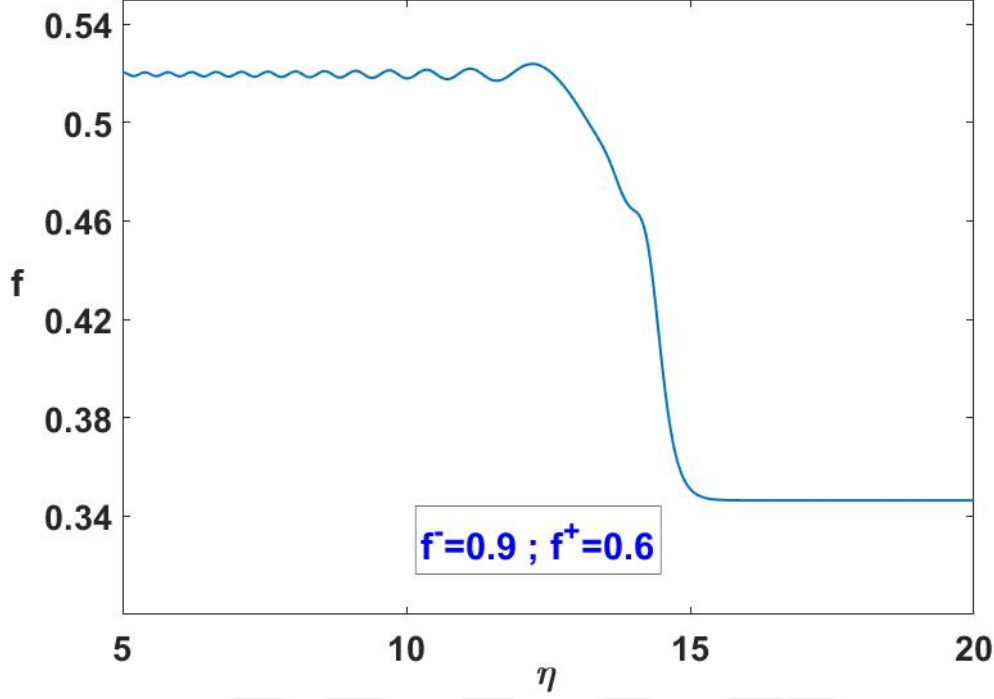
Şekil 3.6 elde edilirken

$$f^- < \frac{1}{2} < f^+ < 1 - f^- \quad (3.23)$$

koşulu dikkate alınmıştır. Buna göre, önceki çizimlerden farklı olarak, undular bore yerine rarefaction dalgası elde edilmiştir. $t = 10$ için arka kenarda $R(t)f^- = 0.0577$ ve ön kenarda $R(t)f^+ = 0.4041$ seviyeleri gözlemlenmektedir.

Şekil 3.7'de ise, f^- ve f^+ değerleri için,

$$\frac{1}{2} < f^+ < f^- \quad (3.24)$$



Şekil 3.7 : cG denkleminin $f^- = 0.9$ ve $f^+ = 0.6$ değerleri için sayısal çözümü ($t=10$).

koşulunu sağlayacak biçimde seçim yapılmıştır. Buna göre Şekil 3.6'daki rarefaction dalgasından farklı olarak ters rarefaction dalgası gözlemlenmektedir.

Sonraki bölümde, Whitham modülasyon teorisi aracılığıyla elde edilen modülasyon denklemlerinin sayısal çözümleri ile Şekil 3.1 ve Şekil 3.2'de verilen Gardner ve cG denklemlerinin doğrudan sayısal simülasyonları, kullanılan yöntemin uygun olup olmadığını kontrol etmek için karşılaştırılacaktır. Bu karşılaştırma için farklı t değerlerinde grafikler elde edilecektir.

3.3 Whitham Modülasyon Denklemlerinin Sayısal Çözümleri

$$\frac{\partial r_i}{\partial t} + v_i(r_1, r_2, r_3) \frac{\partial r_i}{\partial \eta} + \frac{h_i(r_1, r_2, r_3)}{2t + t_0} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.25)$$

ile gösterilen Whitham modülasyon denklemlerinde silindirik terim dikkate alınmazsa, yani $h_i = 0$ durumunda Gardner denklemi için köşegen yapıdaki Whitham sistemi elde edilir. cG denklemi için (3.25) Whitham sistemi köşegen olmadığından analitik çözümün bulunması zorlaşmaktadır. Bu nedenle, DSW oluşumunu incelemek için bir

sayısal yöntem kullanılması zorunluluğu vardır.

Bu bölümde, Whitham sistemi sayısal olarak çözülerek cG denkleminin DSW çözümü elde edilecektir. Daha sonra, bu DSW çözümü ile Şekil 3.1'de verilen cG denkleminin doğrudan sayısal simülasyonu karşılaştırılacaktır. Ayrıca, silindirik terimin etkisinin gözlemlenebilmesi açısından Gardner denklemi için de karşılık gelen modülasyon denklemlerinin sayısal çözümü incelenecektir.

Amacımız, Whitham modülasyon sistemini, Shampine tarafından geliştirilen [56] MATLAB koduna dayanan birinci mertebeden hiperbolik, kısmi diferansiyel denklem çözücü kullanarak çözmek ve nonlinear filtreyle Lax-Wendroff yönteminin iki adımlı formunu seçmektir [75]. Sayısal inceleme yapılabilmesi için, (3.25) denklemindeki Riemann değişkenlerinin başlangıç değerlerinin belirlenmesi gerekmektedir. Bu başlangıç değerleri, DSW oluşumunu sağlayan $f^- = 0.4$, $f^+ = 0.1$ parametre değerleri dikkate alınarak belirlenebilir. Bu amaçla, Riemann değişkenlerinin modülün değişimine göre durumları incelenir. Modül ifadesi,

$$m^2 = \frac{r_2 - r_1}{r_3 - r_1} \quad (3.26)$$

olduğundan limit değerleri için inceleme yapılırsa,

$$m \rightarrow 1 \text{ iken } r_2 \rightarrow r_3, \quad (3.27a)$$

$$m \rightarrow 0 \text{ iken } r_2 \rightarrow r_1 \quad (3.27b)$$

olduğu görülür. Buna göre Riemann değişkenleri için,

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1}{4}(u_1 + u_2)(u_3 + u_4), \\ r_2 &= \frac{1}{4}(u_1 + u_3)(u_2 + u_4), \\ r_3 &= \frac{1}{4}(u_2 + u_3)(u_1 + u_4) \end{aligned} \quad (3.28)$$

formüllerinde (3.27a) ve (3.27b) limit durumlarının dikkate alınmasıyla, sırasıyla aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$m \rightarrow 1 \text{ iken } u_1 = u_2, \quad (3.29a)$$

$$m \rightarrow 0 \text{ iken } u_2 = u_3. \quad (3.29b)$$

Gardner denkleminin (2.32) ile verilen ilerleyen dalga çözümü,

$$f_0 = u_2 + \frac{(u_3 - u_2)cn^2(2(\theta - \theta_0)K, m)}{1 - \frac{u_3 - u_2}{u_4 - u_2}sn^2(2(\theta - \theta_0)K, m)} \quad (3.30)$$

(3.29a)-(3.29b) sonuçlarına göre düzenlenirse,

$$m \rightarrow 1 \text{ iken } u_1 = u_2 = f^+, \quad (3.31a)$$

$$m \rightarrow 0 \text{ iken } u_2 = u_3 = f^- \quad (3.31b)$$

elde edilir. Buna göre, (2.72) formülleri kullanılarak,

$$u_1|_{m=1} = u_2|_{m=1} = f^+ = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4r_1}) \quad (3.32)$$

$$u_2|_{m=0} = u_3|_{m=0} = f^- = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4r_3}) \quad (3.33)$$

bulunur. $f^+ = 0.1$ ve $f^- = 0.4$ değerleri kullanılırsa,

$$r_1 = 0.09; \quad r_3 = 0.24 \quad (3.34)$$

elde edilir. Bu değerlere göre Riemann değişkenlerinin başlangıç değerleri Şekil 3.8(a)'dan da görülebileceği gibi aşağıdaki formda ifade edilir:

$$r_1(\eta, 0) = 0.09, \quad r_2(\eta, 0) = \begin{cases} 0.09 & \eta \leq 0, \\ 0.24 & \eta > 0, \end{cases} \quad r_3(\eta, 0) = 0.24 \quad (3.35)$$

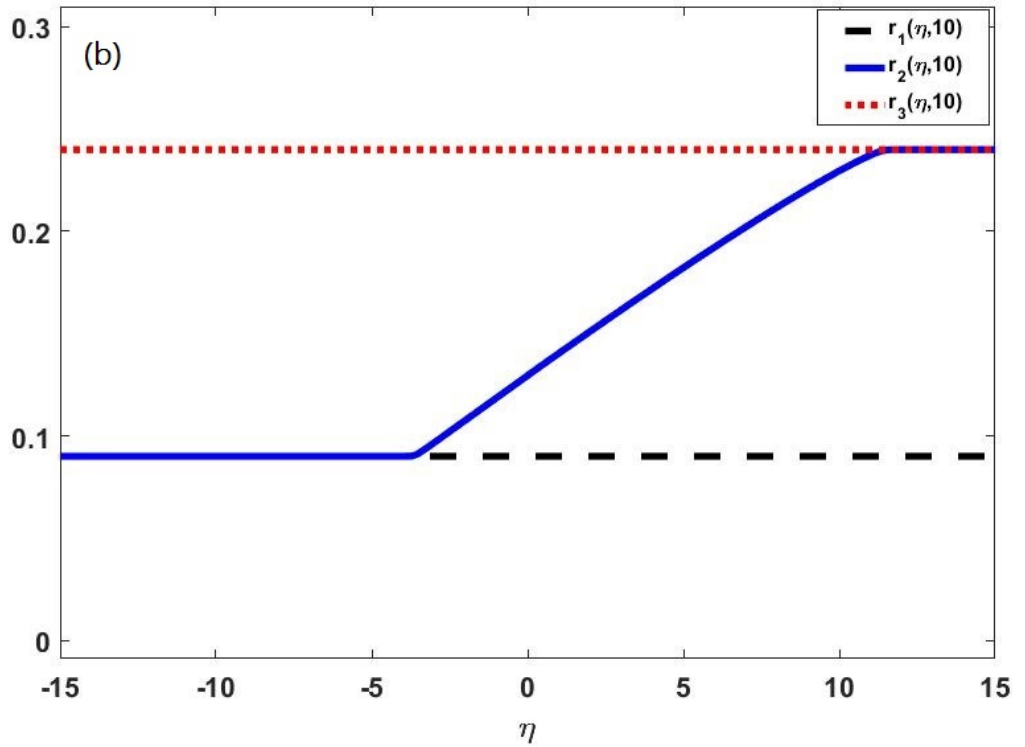
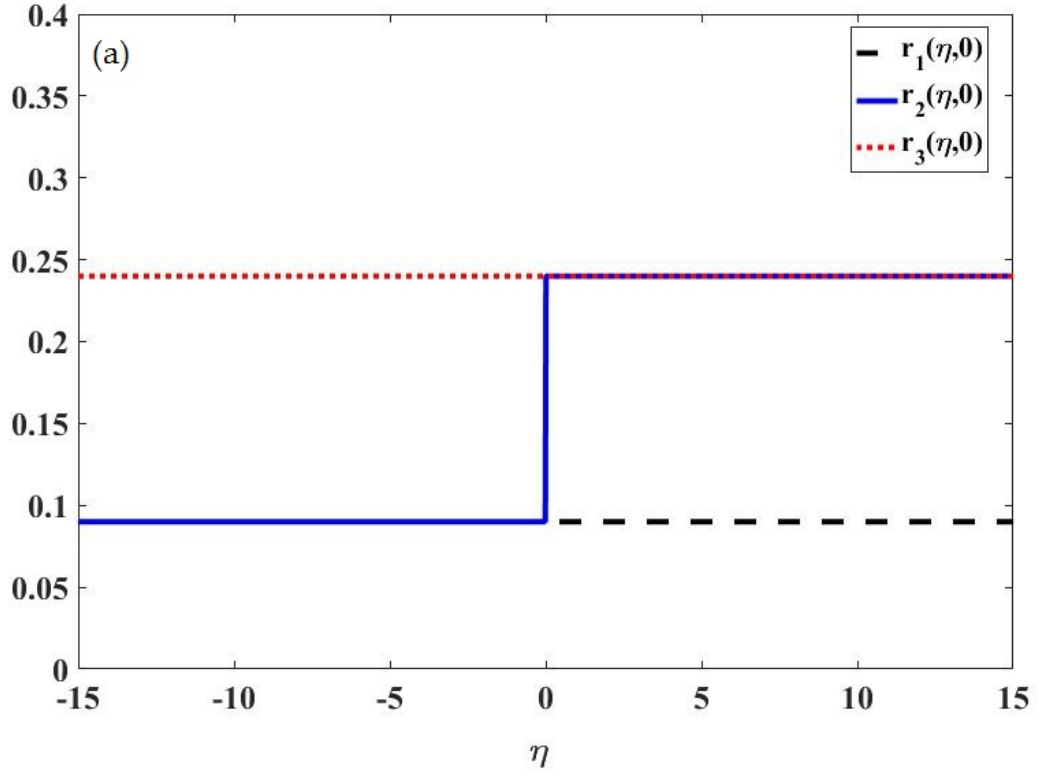
(3.35) değerleri hem Gardner denklemi hem de cG denklemi için kabul edilen başlangıç değerleridir. İlk olarak (3.25) Whitham sisteminde $h_i = 0$ alınarak Gardner denkleminin ait modülasyon denklemleri için sayısal inceleme yapılmaktadır.

(3.35) sınır koşulları ile birlikte MATLAB koduna dayanan Shampine tarafından geliştirilen yöntem kullanılmaktadır [56]. Kod içerisinde, $t = 10$ ve $[-40, 40]$ bölgesi için $N = 2^{12}$ nokta kullanılarak sonuçlar elde edilmiştir. Bu yöntem ile Gardner denkleminin Riemann değişkenlerinin değişimi Şekil 3.8(b)'de görüldüğü gibi çizdirilir.

Gardner denkleminin asimptotik (modülasyon teorisi) çözümünü Şekil 3.2'de gösterilen sayısal çözümle karşılaştırmak için, (2.32) ile verilen periyodik çözümün Riemann değişkenleri cinsinden ifadesi incelenmelidir. Bu çözüm aşağıdaki gibi verilir:

$$f_0(\theta, \eta, t) = \frac{1 - \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} - \sqrt{S_3}}{2} + \frac{(\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2})(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_3})cn^2(2(\theta - \theta_0)K, m)}{(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_3}) + (\sqrt{S_2} - \sqrt{S_1})sn^2(2(\theta - \theta_0)K, m)}. \quad (3.36)$$

Burada $S_i = 1 - 4r_i$, $i = 1, 2, 3$ olarak alınmaktadır.

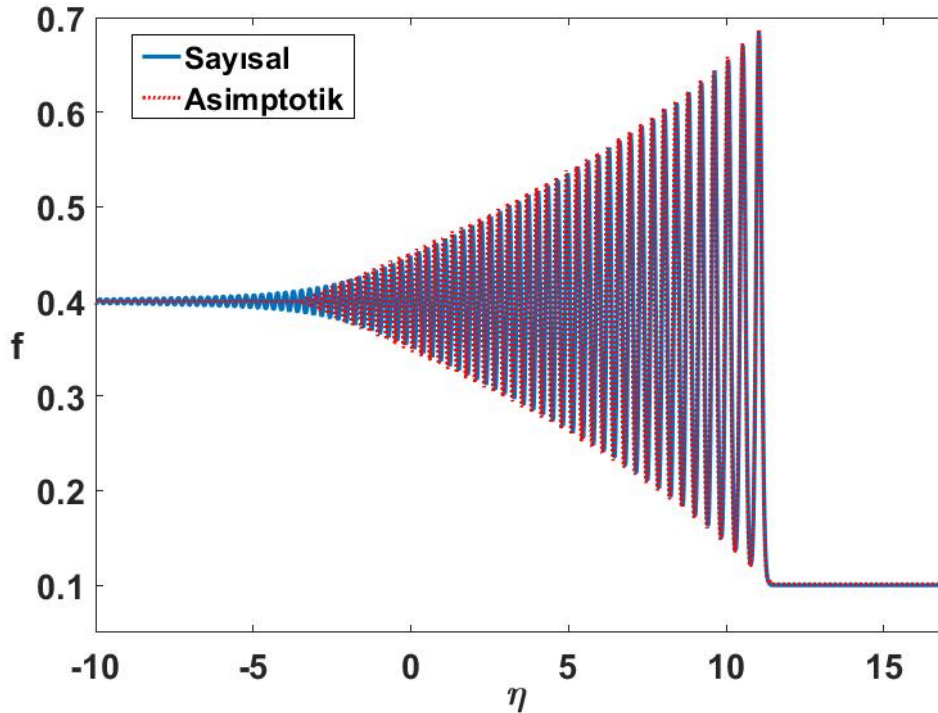


Şekil 3.8 : Gardner denkleminde (a) Riemann değişkenlerinin başlangıç değerleri (b) $t = 10$ için (3.25) denkleminin sayısal çözümü ile elde edilen Riemann değişkenleri.

(2.53) formülünde verilen θ_η ve θ_t integre edilerek hızlı faz değişkeni θ ,

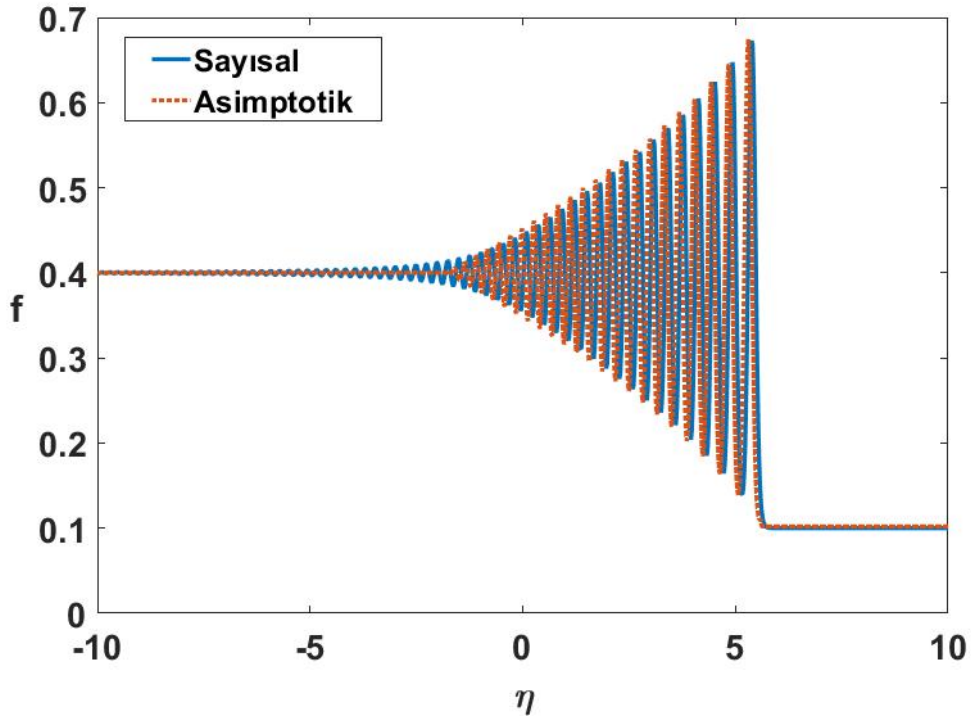
$$\theta(\eta, t) = \int_{-L}^{\eta} \frac{k(\eta', t)}{\varepsilon} d\eta' - \int_0^t \frac{k(\eta, t')V(\eta, t')}{\varepsilon} dt' \quad (3.37)$$

olarak elde edilir. (3.36) çözümü ve hızlı faz değişkeni için (3.37) formülü birlikte kullanılarak Gardner denkleminin asimptotik çözümü MATLAB yardımıyla bulunur. Böylece, bu denklemin DSW çözümleri herhangi bir t zaman değeri için oluşturulur. $t = 10$ için Gardner denkleminin Şekil 3.2'de gösterilen sayısal çözümü ve Whitham teorisi ile elde edilen asimptotik çözümü çakışık olarak Şekil 3.9'da verilmiştir. Elde edilen grafiğe göre, salınımların ön kenar genliği ile dalga boyunun asimptotik yaklaşımda ve sayısal çözümde uyumlu olduğu gözlemlenmektedir. Böylece, Whitham modülasyon teorisi, Gardner denklemindeki dispersif şok dalgaları için $t = 10$ 'da doğru ve uygun yaklaşımları elde etmemizi sağlamıştır. Elde edilen grafiğe göre, ön kenarda KdV tipi bir undular bore ve arka kenarda lineer dalga treni görülmektedir. Ön kenar konumunun $t = 10$ 'da $\eta_+ = 11.33$ olduğu görülür. Böylece DSW'nun ön kenar için $t = 10$ 'da ortalama hızı $V_{avg} = 1.133$ olarak hesaplanır. cG denkleminin asimptotik çözümü elde edildikten sonra ortalama hız değeri bulunarak Gardner denklemi için hesaplanan değerle karşılaştırma yapılacaktır.



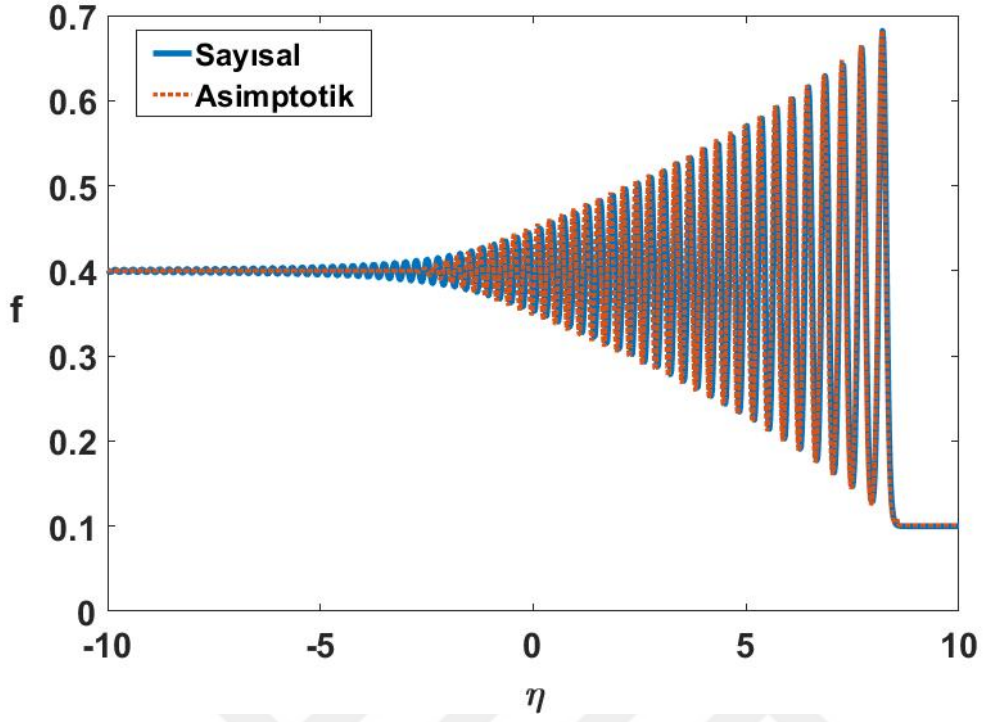
Şekil 3.9 : Gardner denkleminin $t = 10$ için elde edilen sayısal ve asimptotik çözümlerinin karşılaştırılması.

Sayısal yaklaşımda, θ_0 faz değişimi doğrudan sayısal simülasyonlarla uyumlu olacak şekilde seçilmiştir. Bu seçim için dispersif şok dalgasının ortalama değeri bulunur, yani, en büyük soliton genliği ve arka kenarın ortalaması hesaplanır. Sonrasında θ_0 , doğrudan sayısal simülasyonlarda karşılık gelen tümsekle özdeş olan asimptotik çözümden belirlenen en yakın dalganın merkezi olarak seçilir. Gardner denklemi için Şekil 3.9’da gösterilen $t = 10$ zaman değerinde DSW ortalaması yaklaşık olarak, $(0.6878 + 0.4)/2 = 0.5439$ ’dur ve asimptotik çözüm, orta bölgede genlik değeri 0.5199 olan bir tümseğe sahiptir. Farklı zaman değerlerinde θ_0 uyumluluğunun test edilmesi amacıyla Gardner denkleminin doğrudan sayısal ve asimptotik çözümleri çakışık olarak $t = 5$, $t = 7.5$ ve $t = 15$ için sırasıyla Şekil 3.10, Şekil 3.11 ve Şekil 3.12’de verilmiştir.

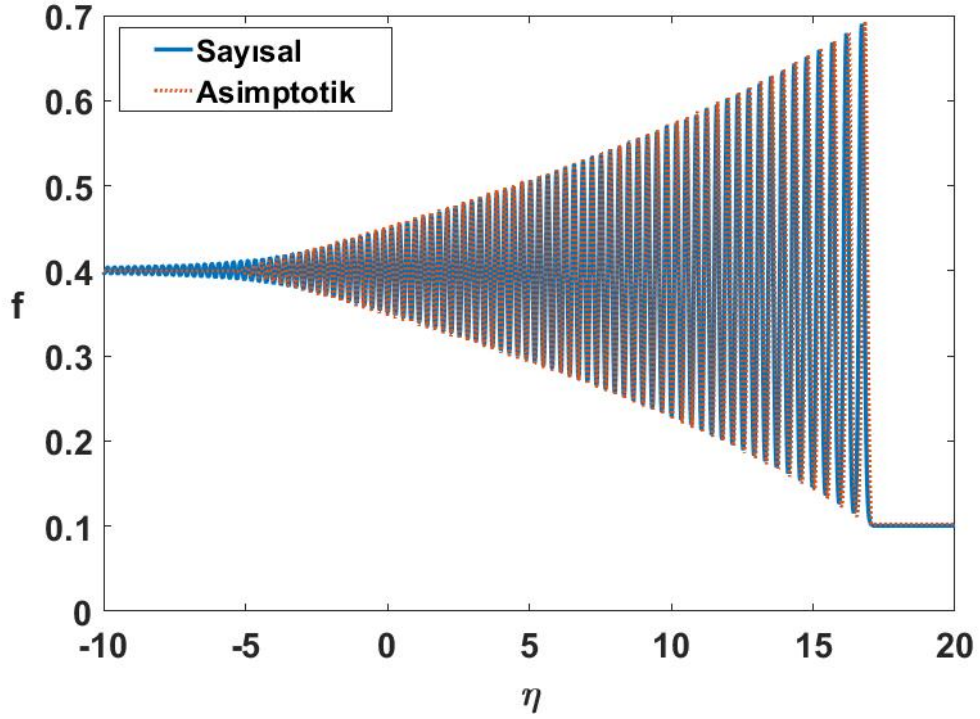


Şekil 3.10 : Gardner denkleminin $t = 5$ için elde edilen sayısal ve asimptotik çözümlerinin karşılaştırılması.

Gardner denklemi için Şekil 3.10’da gösterilen $t = 5$ ’te DSW ortalaması, $(0.6747 + 0.4)/2 = 0.53735$ ’dir ve ortadaki dalga katarının genlik değeri 0.5092 olarak elde edilmiştir. Ön kenar konumunun $t = 5$ ’te $\eta_+ = 5.617$ olduğu görülür. Böylece DSW’nun $t = 5$ ’te ön kenarı için ortalama hızı $V_{avg} = 1.123$ olarak hesaplanır.



Şekil 3.11 : Gardner denkleminin $t = 7.5$ için elde edilen sayısal ve asimptotik çözümlerinin karşılaştırılması.



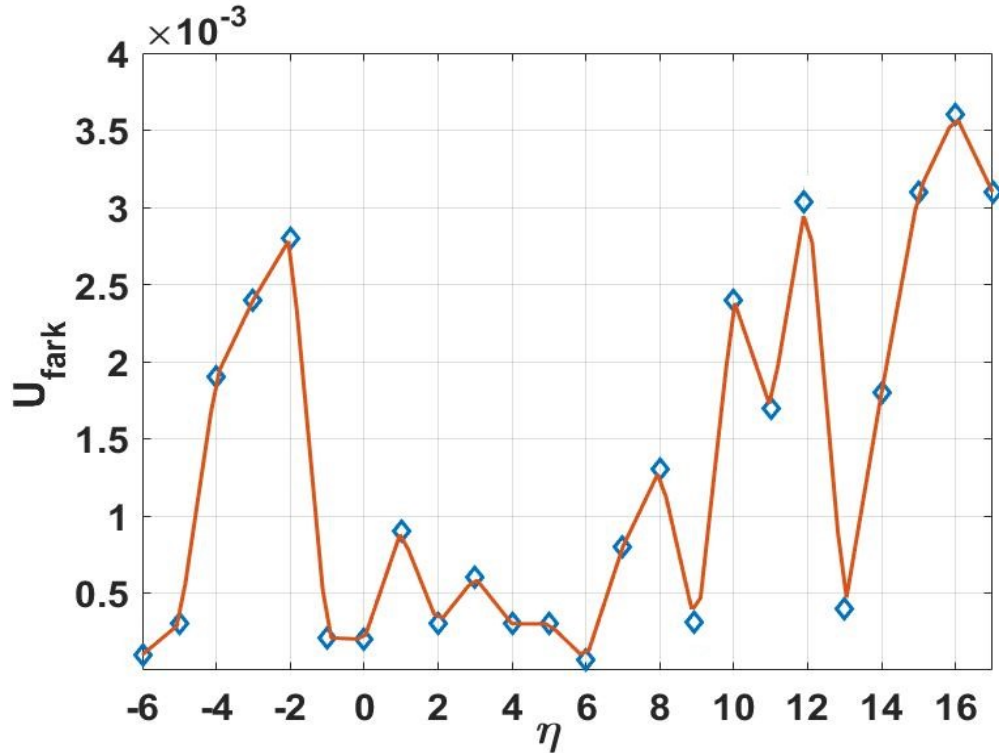
Şekil 3.12 : Gardner denkleminin $t = 15$ için elde edilen sayısal ve asimptotik çözümlerinin karşılaştırılması.

Şekil 3.11’de elde edilen sonuçlara göre, $t = 7.5$ zaman değerinde DSW ortalaması, $(0.6813 + 0.4)/2 = 0.54065$ ’dir ve ortadaki dalga katarının genlik değeri 0.5133 olarak bulunmuştur. $t = 7.5$ için ön kenar konumu $\eta_+ = 8.477$ olduğundan ortalama hız değeri $V_{avg} = 1.130$ olarak hesaplanır.

Şekil 3.12’de ise $t = 15$ zaman değerinde DSW ortalama değeri $(0.6877 + 0.4)/2 = 0.54385$ ’dir ve ortadaki dalga katarının genlik değeri 0.5129 olmuştur.

Ön kenar konumu $t = 15$ ’te $\eta_+ = 17.05$ olarak bulunur. Buna göre, ön kenar için ortalama hız $V_{avg} = 1.137$ olarak elde edilir.

Böylece, Şekil 3.9-Şekil 3.12’de verilen grafikler incelendiğinde, WMT uygulanarak elde edilen asimptotik çözümler ve sayısal çözümlerin çakışık olarak gösterilmesiyle uygun sonuçlar elde edildiği görülmektedir. Bu örtüşmenin analizinin daha açık gözlemlenmesi için her bir adımda hesaplanan asimptotik çözümlerin tepe noktası (f_a) ile sayısal çözümlerin tepe noktasının (f_s) farkının mutlak değerleri Gardner denklemi için $t = 15$ zaman değerinde η ’ya göre Şekil 3.13’te verilmiştir. Bu durumda, $U_{fark} = |f_a - f_s|$ olarak tanımlanmaktadır. Şekil 3.13’e göre, asimptotik çözüm ile sayısal çözümler arasındaki fark kabul edilebilir boyuttadır. Farklı t değerleri için benzer grafikler oluşturulabilir.



Şekil 3.13 : Gardner denkleminin $t = 15$ için elde edilen sayısal ve asimptotik çözümlerinin farkı.

Gardner denkleminin farklı t değerleri için Şekil 3.9-Şekil 3.12'de verilen grafiklerinde, ön soliton (lead soliton) için genlik değeri, $a^+ = 2(f^- - f^+) = 0.6$ olarak sabit kalmaktadır. Bu hesaplanan değer KdV için kullanılan formülle de örtüşmektedir. Benzer analizler, karşılaştırma yapmak için cG denkleminin Whitham sistemi için de yapılabilir. Gardner denklemi ve bu denklemin Whitham sistemi için sınır koşulları, zamana bağıllık içermediğinden sabittir. Ancak cG denkleminin için sınır koşulları, zamana bağlı olarak değişmektedir. Bu nedenle, sınır koşullarının modifiye edilmesi gerekir. cG denkleminin (3.25) ile verilen Whitham sistemi için sınır koşulları, η uzaysal değişkenine bağlı türev teriminin ihmal edilip,

$$\frac{dr_i}{dt} + \frac{h_i(r_1, r_2, r_3)}{2t + t_0} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.38)$$

şeklinde indirgenen adi diferansiyel denklem sisteminin (3.35) başlangıç koşulunda çözülmesiyle elde edilir. Çözüm yapılırken (3.38)'deki $h_i(r_1, r_2, r_3)$ silindirik terimlerinin yerine indirgenmiş formlarının yazılması gerekir. Bunun için h_i fonksiyonlarının $m \rightarrow 0$ ve $m \rightarrow 1$ iken limitleri hesaplanmalıdır.

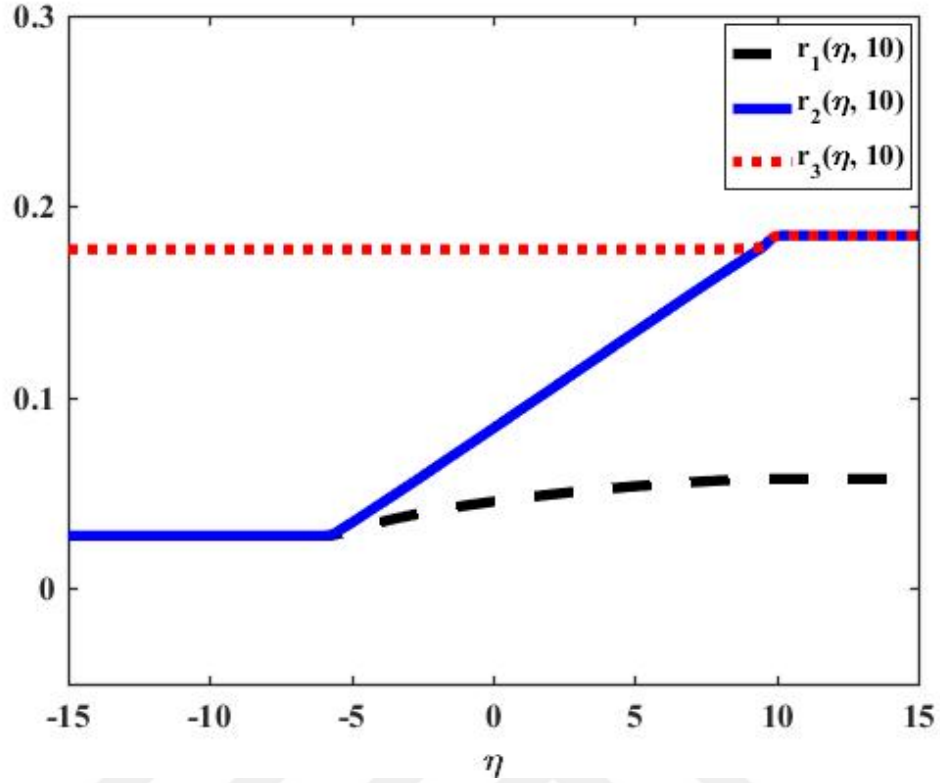
Silindirik terimler, Bölüm 2.6'da $S_i = 1 - 4r_i$ olmak üzere (2.78) denklemleriyle verilmiştir. Buna göre, modül 0 ve 1 değerlerine yaklaşırken silindirik terimlerin içerdiği birinci, ikinci ve üçüncü türden eliptik integrallerin limit değerleri kullanılmalıdır. Ayrıca (3.27a) ve (3.27b) eşitlikleri dikkate alınmalıdır.

Yapılan işlemler sonucunda, h_i terimlerinin limit değerleri aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow 0} h_1 &= \lim_{m \rightarrow 0} h_2 = \lim_{m \rightarrow 0} h_3 = \frac{1}{2}(\sqrt{1 - 4r_3} + 4r_3 - 1) \\ \lim_{m \rightarrow 1} h_1 &= \frac{1}{2}(\sqrt{1 - 4r_1} + 4r_1 - 1) \\ \lim_{m \rightarrow 1} h_2 &= \lim_{m \rightarrow 1} h_3 = -1 + 4r_3 \end{aligned} \quad (3.39)$$

Elde edilen limit sonuçlarına göre indirgenmiş h_i terimlerinin (3.38)'de yazılıp (3.35) başlangıç koşullarıyla birlikte çözülmesiyle Riemann değişkenlerinin değerleri elde edilir. Bu değerler, cG denkleminin için sınır koşullarını belirlemektedir.

Gardner denklemi için yapılan analize benzer olarak, cG denkleminin için de birinci mertebeden hiperbolik sistem çözücü ile Lax-Wendroff metodu uygulanmıştır. Riemann değişkenlerinin başlangıç değerleri Gardner denklemiyle aynıdır (Şekil 3.8(a)). Bu denklemin Riemann değerlerinin değişimi sınır koşullarına bağlı olarak Şekil 3.14'te görülebilir. Bu grafik ile Gardner denkleminin Şekil 3.8(b)'de verilen

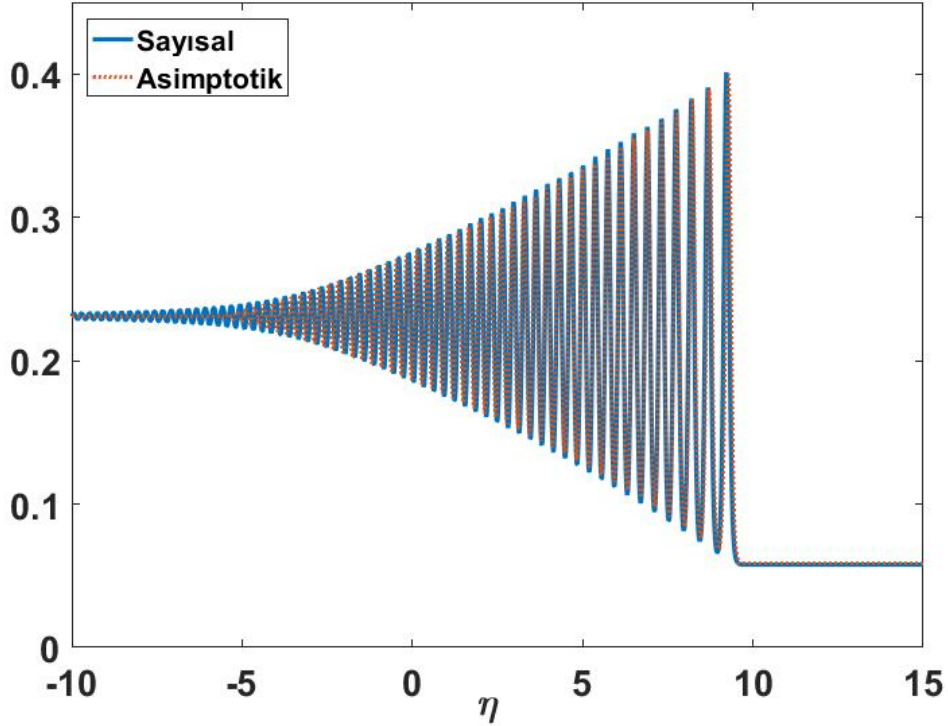


Şekil 3.14 : cG denkleminde $t = 10$ için (3.25) denkleminin sayısal çözümü ile elde edilen Riemann değişkenleri.

Riemann değişkenlerinin davranışını karşılaştırırken, r_1 ve r_2 'nin kesişim noktalarında iki grafik arasında fark oluştuğuna dikkat edilmelidir. Hem ön kenarda hem de arka kenarda benzer bir farklılık görülmektedir. Bu farklılıklar, Gardner ve cG denklemlerindeki DSW'ların kenar dinamikleri hakkında bilgi verir. cG denkleminde DSW'nun ön kenarı ve arka kenarı daha yavaş hareket eder. Bu sonuçlar Şekil 3.20 ve oluşturduğumuz animasyon videosundan [77] gözlemlenebilir.

Böylece, Riemann değerlerinin değişimine göre cG denkleminin doğrudan sayısal simülasyonu ile Whitham sisteminin sayısal çözümünün karşılaştırmalı grafiği Şekil 3.15'te $t = 10$ zaman değeri için verilmektedir. Burada cG denklemindeki parametre değeri için $\tilde{c}^{-1} = t_0 = 10$ alınmıştır.

Görüldüğü gibi, Gardner denklemi için yapılan analize benzer olarak cG denkleminde görülen DSW'da $t = 10$ için salınımların ön kenar genliği ile dalga boyunun asimptotik yaklaşımda ve sayısal çözümde uyumlu olduğu gözlemlenebilir. Böylece, cG denklemi için sınır koşulları zamana bağlı olarak değişmekle birlikte Whitham modülasyon teorisi yine de dispersif şok dalgası çözümleri için doğru ve uygun yaklaşımları



Şekil 3.15 : cG denkleminin $t = 10$ için elde edilen sayısal ve asimptotik çözümlerinin karşılaştırılması.

elde etmemizi sağlamıştır. Farklı zaman değerlerinde cG denkleminin için asimptotik çözümler ve denklemin doğrudan sayısal çözümlerini gösteren grafikler ile bu sonuç açık olarak görülmektedir.

cG denklemindeki θ_0 faz değişimini belirlemek için DSW ortalama değeri hesaplanırsa, önde gelen tümseğin ve arka kenarın ortalaması yaklaşık olarak, $(0.4001 + 0.2309)/2 = 0.3155$ bulunur ve asimptotik çözüm, orta bölgedeki genlik değeri 0.2958 olan bir tümseğe sahiptir.

Gardner denkleminin DSW çözümü için elde edilen Şekil 3.9 ile cG denkleminin DSW çözümünü gösteren Şekil 3.15 arasında karşılaştırma yapılırsa aynı başlangıç adım parametreleri ($f^- = 0.4$ ve $f^+ = 0.1$) kullanılmasına karşın Şekil 3.15'te hem ön kenar hem de arka kenar seviyelerindeki düşüş dikkat çekmektedir. cG denkleminin zamana bağlılığı bu düşüşün ortaya çıkmasına yol açmaktadır. DSW'da ön kenar seviyesi için

$$R(t)f^+ = \frac{\sqrt{t_0}}{\sqrt{2t+t_0}}f^+ \quad (3.40)$$

formülü kullanılarak bu değer 0.0577 olarak bulunur. cG denkleminin doğrudan sayısal çözümünde ise 0.0586 değeri bulunmuştur.

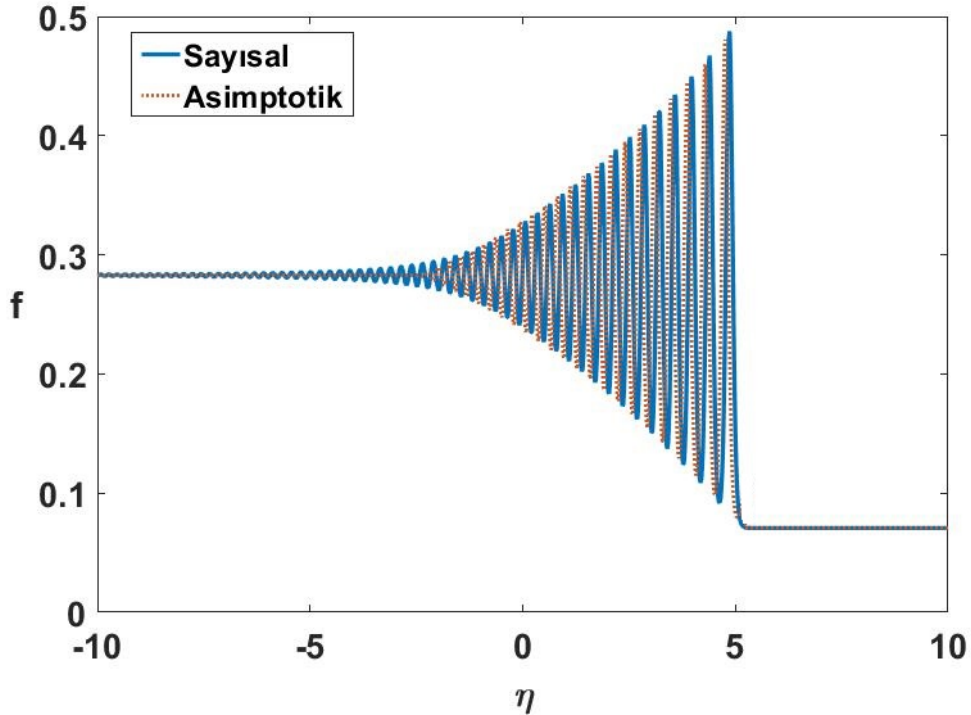
Benzer şekilde arka kenar seviyesi için,

$$R(t)f^- = \frac{\sqrt{t_0}}{\sqrt{2t + t_0}}f^- \quad (3.41)$$

formülünden 0.2308 değeri hesaplanmaktadır. Denklem doğrudan sayısal çözümünde bu değer, 0.2309 olarak bulunur.

$t = 10$ 'da ön kenarın $\eta_+ = 9.57$ konumu kullanılarak ortalama hız hesaplanırsa $V_{avg} = 0.957$ elde edilir. Gardner denkleminin ön kenar için $t = 10$ 'da ortalama hız değeri 1.133 olarak hesaplanmıştı. Buna göre cG denkleminin ön kenarı daha yavaş hareket etmektedir. Arka kenar için de benzer şekilde, hızın Gardner denklemine göre yavaş olduğu görülür.

Farklı zaman değerlerinde cG denklemi için seviye azalmasının gözlemlenebilmesi amacıyla cG denkleminin doğrudan sayısal çözümleri ile asimptotik çözümleri çakışık olarak $t = 5$, $t = 7.5$ ve $t = 15$ değerlerinde, sırasıyla Şekil 3.16, Şekil 3.17 ve Şekil 3.18'de verilmiştir.

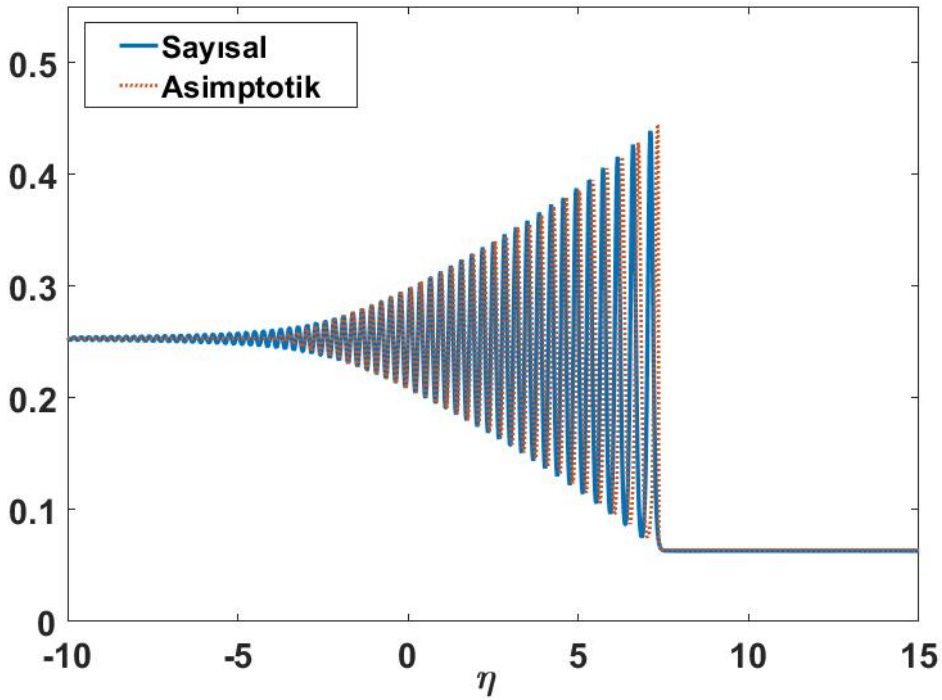


Şekil 3.16 : cG denkleminin $t = 5$ için elde edilen sayısal ve asimptotik çözümlerinin karşılaştırılması.

$t = 5$ için DSW'nun ön kenar ve arka kenar seviyeleri, (3.40) ve (3.41) formülleri kullanılarak hesaplanırsa, sırasıyla 0.071 ve 0.283 değerleri elde edilir. cG

denkleminin doğrudan sayısal çözümünde bu değerlerin ön kenar için 0.073 ve arka kenar için 0.284 olduğu görülmektedir. Böylece, asimptotik çözüm ve sayısal çözüm için uyumlu sonuçlar elde edilmiştir. Ön kenarın $t = 5$ 'teki $\eta_+ = 5.156$ konumu kullanılarak ortalama hız hesaplanırsa $V_{avg} = 1.031$ elde edilir.

Gardner denkleminin ön kenar için $t = 5$ 'te ortalama hız değeri $V_{avg} = 1.123$ olarak hesaplanmıştı. Buna göre hız değerleri yakın olmakla birlikte cG denkleminin ön kenarı daha yavaş hareket etmektedir. $t = 5$ zaman değerinde θ_0 faz değişiminin incelenmesi için cG denkleminin DSW ortalaması $(0.4876 + 0.2829)/2 = 0.38525$ olarak elde edilir ve ortadaki dalga katarının genlik değeri ise 0.3571 bulunur.



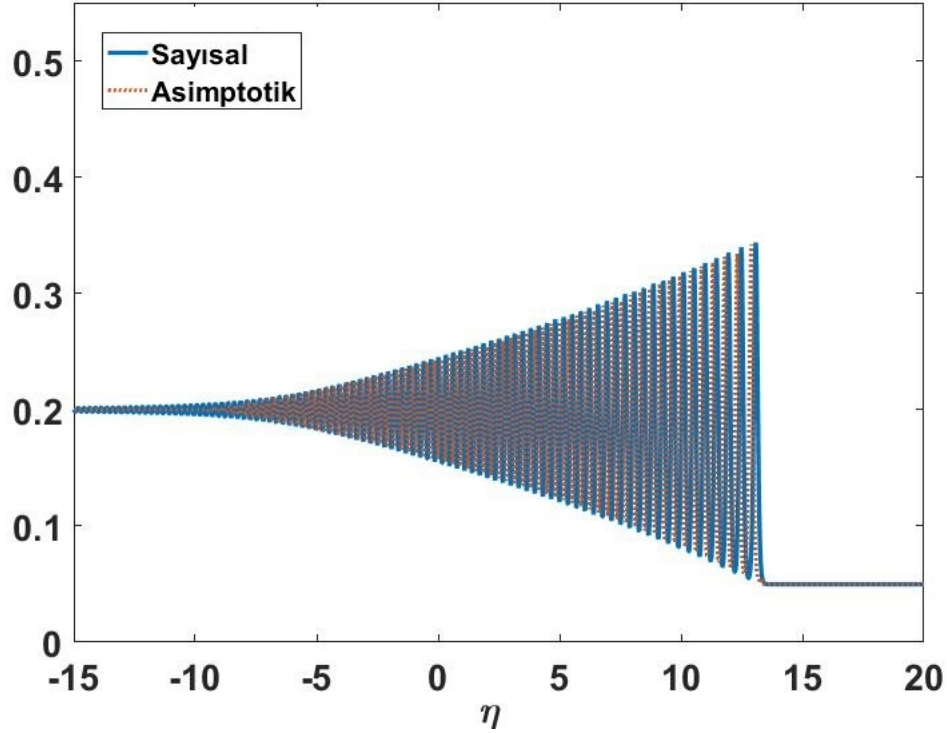
Şekil 3.17 : cG denkleminin $t = 7.5$ için elde edilen sayısal ve asimptotik çözümlerinin karşılaştırılması.

Şekil 3.17'de verilen $t = 7.5$ zaman değerinde cG denklemindeki DSW'nun ön kenar ve arka kenar seviyeleri (3.40) ve (3.41) formülleri kullanılarak hesaplanırsa, sırasıyla 0.064 ve 0.253 değerleri elde edilir. cG denkleminin doğrudan sayısal çözümünde bu değerlerin ön kenar için 0.0637 ve arka kenar için 0.2529 olduğu görülmektedir. Bu değerlerden anlaşılacağı üzere, asimptotik çözüm ve sayısal çözüm için $t = 7.5$ 'te uyumlu sonuçlar elde edilmiştir.

Ön kenarın $t = 7.5$ 'teki $\eta_+ = 7.402$ konumu kullanılarak ortalama hız hesaplanırsa

$V_{avg} = 0.987$ elde edilir. Gardner denkleminin ön kenar için $t = 7.5$ 'te ortalama hız değeri $V_{avg} = 1.130$ olarak hesaplanmıştır. Buna göre $t = 7.5$ 'te cG denkleminin ön kenarı daha yavaş hareket etmektedir.

Şekil 3.17'de DSW ortalaması için $(0.4388 + 0.2541)/2 = 0.34645$ elde edilir ve ortadaki dalga katarının genlik değeri ise 0.3126 olarak bulunur.



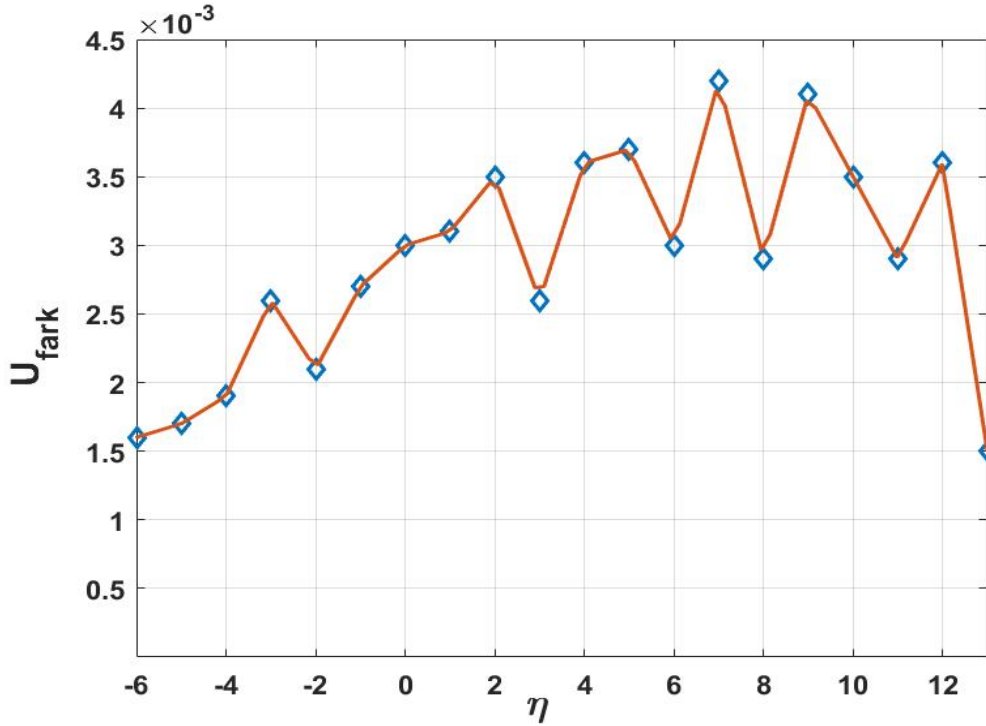
Şekil 3.18 : cG denkleminin $t = 15$ için elde edilen sayısal ve asimptotik çözümlerinin karşılaştırılması.

Şekil 3.18'de verilen $t = 15$ zaman değerinde cG denklemindeki DSW'nun ön kenar ve arka kenar seviyeleri sırasıyla, 0.049 ve 0.2 olarak elde edilir. cG denkleminin doğrudan sayısal çözümünde bu değerlerin ön kenar için 0.048 ve arka kenar için 0.199 olduğu görülmektedir. Bu değerlerden anlaşılacağı üzere, asimptotik çözüm ve sayısal çözüm için $t = 15$ 'te uyumlu sonuçlar elde edilmiştir.

Ön kenarın $t = 15$ 'teki $\eta_+ = 13.34$ konumu kullanılarak ortalama hız hesaplanırsa $V_{avg} = 0.889$ elde edilir. Gardner denkleminin ön kenar için $t = 15$ 'te ortalama hız değeri $V_{avg} = 1.137$ olarak hesaplanmıştır. Buna göre $t = 15$ 'te önceki zaman değerleri gibi cG denkleminin ön kenarı daha yavaş hareket etmektedir.

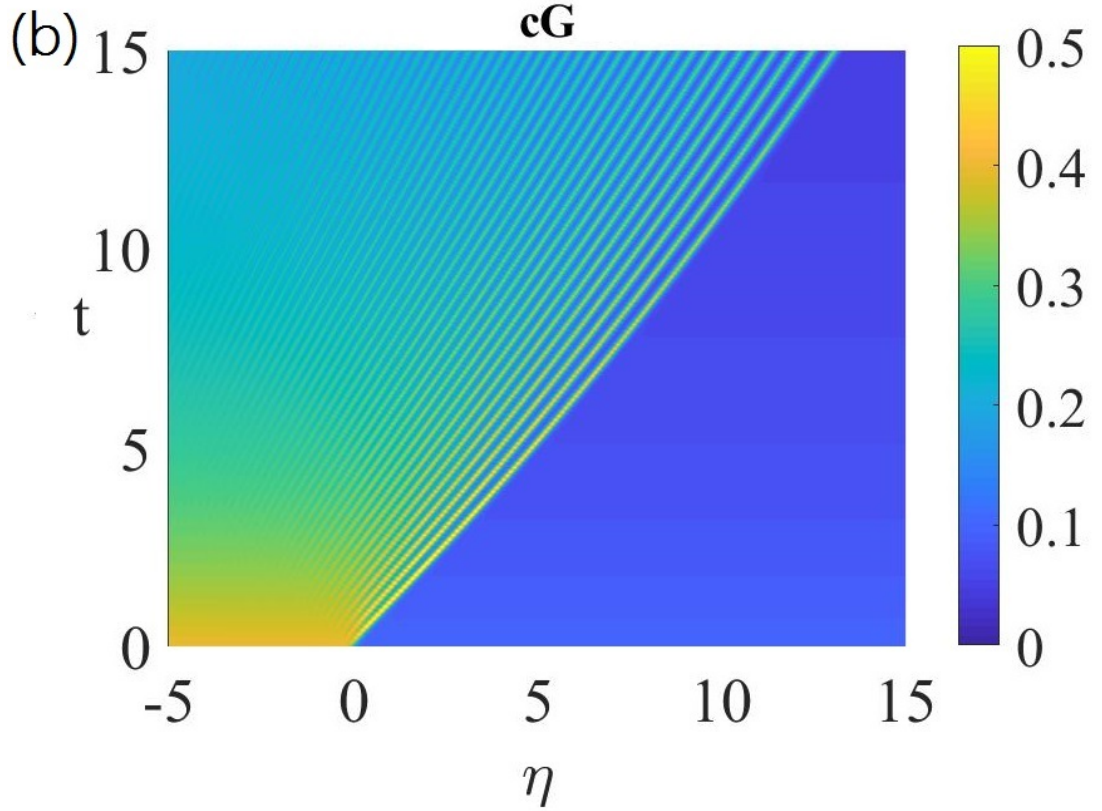
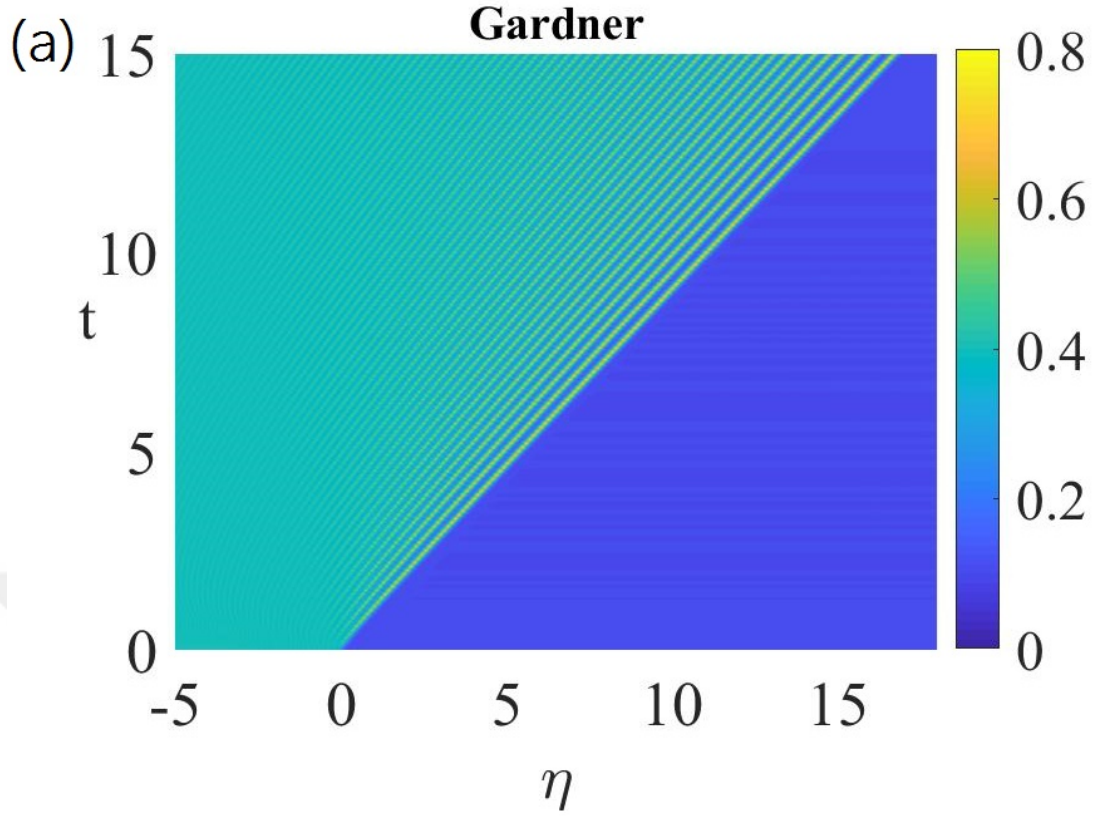
Şekil 3.18'de cG denkleminin DSW ortalaması $(0.3435 + 0.2)/2 = 0.27175$ olarak

elde edilir ve ortadaki dalga katarının genlik değeri ise 0.2526 olarak bulunur. cG denkleminin farklı t zaman değerleri için Şekil 3.15-Şekil 3.18’de verilen asimptotik çözüm ve sayısal çözümlerinin çakışık grafiklerinde uygun sonuçlar elde edildiği görülmektedir. Bu sonuçların daha açık gözlemlenmesi amacıyla Gardner denklemi için Şekil 3.13’te verilen fark analizi grafiğine benzer olarak, her bir adımda hesaplanan asimptotik çözümlerin tepe noktası (f_a) ile sayısal çözümlerin tepe noktasının (f_s) farkının mutlak değerleri $t = 15$ zaman değerinde η ’ya göre Şekil 3.19’da verilmiştir. Burada, $U_{fark} = |f_a - f_s|$ olarak tanımlanmaktadır. Şekil 3.19’a göre, asimptotik çözüm ile sayısal çözümler arasındaki fark kabul edilebilir boyuttadır. Farklı t değerleri için de benzer inceleme yapılabilir.



Şekil 3.19 : cG denkleminin $t = 15$ için elde edilen sayısal ve asimptotik çözümlerinin farkı.

Şekil 3.20(a)-(b)’de Gardner ve cG denklemlerinin $t = 15$ için doğrudan sayısal çözümlerinin (η, t) düzlemindeki uzay-zaman grafikleri görülebilir. Grafikler incelendiğinde, cG denklemindeki DSW yayılımının Gardner denklemine göre daha yavaş olduğu gözlemlenebilir. Ayrıca cG denklemindeki dalga cephesinin geometrik yayılma etkisinden dolayı kavisli olduğu görülür.



Şekil 3.20 : (a) Gardner denklemi için, (b) cG denklemi için $t = 0$ ve $t = 15$ arasındaki doğrudan sayısal çözümlere ait uzay-zaman grafikleri.

cG denklemi için DSW'nun genel hatları [77]'de verilen animasyon ile ayrıntılı bir şekilde görülebilmektedir. cG denkleminin DSW çözümü, (2+1) boyutlu Gardner-KP denkleminin çözümüyle sadece $y = 0$ 'da çakışmaktadır. (2+1) boyutlu denklemin $y = 0$ 'dan farklı herhangi bir kesitindeki çözümü, (2.45a) cephe şekli denkleminin seçilen t zaman değeri ve y kesiti için elde edilen çözümünden bulunan değer kadar cG denkleminin çözümünün ötelenmesi ile bulunur. Bu öteleme, sabit bir t zaman değeri için $\phi(y,t) = \frac{\tilde{c}y^2}{1+2\tilde{c}\lambda t}$ olmak üzere $\eta = x + \phi(y,t)/2$ öteleme değişkeniyle yapılır.



4. (3+1) BOYUTLU GARDNER-KP DENKLEMİ

4.1 Giriş

Bu bölümde, (3+1) boyutlu Gardner-KP denklemi tanıtılarak bu denklem için yapılacak indirgeme sonucunda (1+1) boyutlu küresel Gardner (spherical Gardner: sG) denklemi elde edilecektir. (3+1) boyutlu denklem yapısı aşağıdaki gibi verilebilir:

$$(u_t + 6uu_x - 6u^2u_x + \varepsilon^2u_{xxx})_x + \lambda(u_{yy} + u_{zz}) = 0. \quad (4.1)$$

Bu denklem için öncelikle, alınacak başlangıç koşulu ifade edilecektir. Daha sonra, bu başlangıç koşuluyla birlikte (3+1) boyutlu Gardner-KP denklemi (1+1) boyutlu sG denkleme indirgenecektir. sG denklemini oluşturabilmek için paraboloid tipi cephe kabulü yapılacaktır. Bunun sonucunda sG denkleminin DSW çözümleri araştırılacaktır.

(3+1) boyutlu Gardner-KP denklemini (1+1) boyutlu sG denkleme indirgemek için Bölüm 2’de olduğu gibi bir benzerlik dönüşümü uygulanmaktadır. WMT yardımıyla elde edilecek modülasyon denklemleri, sG denkleminin DSW çözümlerinde kullanılacaktır. Bunun için çoklu ölçekler yöntemi ile merteye problemleri elde edilip incelenecektir. İlk merteye problemin çözümü, Gardner denkleminin periyodik dalga çözümünü vermektedir. Bu periyodik çözümün u_2, u_3, u_4 olmak üzere yavaş değişen üç bağımsız parametresi vardır. Diğer iki merteye problem de elde edildikten sonra bu denklemler yardımıyla sekülerlik koşulları oluşturulur. Bunlar dalganın korunumuyla birlikte Whitham sistemi olarak adlandırılan üç gerekli Whitham modülasyon denklemini tanımlar. Bu modülasyon denklemleri, kuazilineer bir kısmi türevli denklem sistemi oluştururlar. Bu sistem uygun Riemann tipi değişkenler kullanılarak, daha basit bir forma dönüştürülecektir. Elde edilen Riemann tipi değişkenler cinsinden sistem analitik olarak çözülemediği için, Riemann tipi değişkenlerin başlangıç koşulları altında, uygun sayısal yöntemler kullanılarak çözülecektir. Bu sonuçlar, sG denkleminin doğrudan sayısal çözümü ile karşılaştırılacaktır. Sayısal çözümler

karşılaştırıldığına, aralarındaki uyum gözlemlenerek Whitham modülasyon teorisinin ilgili DSW yayılımının anlaşılmasındaki önemi görülecektir.

4.2 Küresel Gardner (sG) Denklemine Elde Edilmesi

Bu bölümde, (4.1) ile gösterilen (3+1) boyutlu Gardner-KP denkleminin paraboloid cephe kabulüyle birlikte (1+1) boyutlu sG denkleme indirgenmesi açıklanacaktır.

(4.1) denklemi için alınacak başlangıç koşulu, $\eta = x + \phi(y, z, 0)/2$ olmak üzere:

$$u(\eta, 0) = \begin{cases} f^-, & \eta < 0 \\ f^+, & \eta > 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

şeklindedir. Bu başlangıç koşulundaki $\phi(y, z, t)$, (4.1) denkleminin çözümünün cephe şeklini ifade etmektedir. Bu çalışmada, \tilde{c} reel sabit olmak üzere, aşağıdaki paraboloid tipi başlangıç cephesi alınacaktır:

$$\phi(y, z, 0) = \tilde{c}(y^2 + z^2). \quad (4.3)$$

Bu başlangıç koşulu, (3+1) boyutlu Benjamin-Ono denklemindeki DSW incelemesi için de kullanılmıştır [55]. (3+1) boyutlu denklem aracılığıyla küresel denklemin elde edilmesi, paraboloid cephe kabulüyle mümkündür. Tez çalışmasının ikinci bölümünde benzer olarak parabolik cephe kabulüyle (2+1) boyutlu Gardner-KP denklemi, (1+1) boyutlu silindirik Gardner denkleme indirgenmişti.

(4.1) denkleminin aşağıdaki çözüm formunu sağladığı kabul edilmektedir:

$$u = f\left(x + \frac{\phi(y, z, t)}{2}, t\right). \quad (4.4)$$

Burada dalga cephesi, $x + \phi(y, z, t)/2 = \text{sabit}$ olarak tanımlanır.

(4.4) çözüm formunun, (4.1) denkleminde yerleştirilmesiyle, $\eta = x + \phi(y, z, t)/2$ olmak üzere aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} \phi_t f_\eta + f_t + 6f f_\eta - 6f^2 f_\eta + \varepsilon^2 f_{\eta\eta\eta} \right)_\eta \\ & + \lambda \left[\frac{1}{4} \left((\phi_y)^2 + (\phi_z)^2 \right) f_{\eta\eta} + \frac{1}{2} (\phi_{yy} + \phi_{zz}) f_\eta \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Burada, f fonksiyonu, aşağıdaki sınır koşullarını sağlar:

i) Azalmayan tipli başlangıç koşulları için:

$$\eta \rightarrow -\infty \text{ iken } f \rightarrow R(t)f^+ \text{ ve } \eta \rightarrow \infty \text{ iken } f \rightarrow R(t)f^- \quad (4.6)$$

ii) Artmayan tipli başlangıç koşulları için:

$$\eta \rightarrow -\infty \text{ ise } f \rightarrow R(t)f^- \text{ ve } \eta \rightarrow \infty \text{ ise } f \rightarrow R(t)f^+. \quad (4.7)$$

$R(t)$ fonksiyonu ve f^-, f^+ parametre değerleri bu bölümün sonunda açıklanacaktır.

Paraboloid cephe kabulü ile birlikte ϕ_{yy} ve ϕ_{zz} ikinci türevlerinin y ve z değişkenlerinden bağımsız olmalarının kabulü, aşağıdaki denklem sisteminin oluşturulmasını sağlar:

$$\phi_t + \frac{\lambda}{2} \left((\phi_y)^2 + (\phi_z)^2 \right) = 0, \quad (4.8)$$

$$f_t + 6ff_\eta - 6f^2f_{\eta\eta} + \frac{\lambda}{2}(\phi_{yy} + \phi_{zz})f + \varepsilon^2 f_{\eta\eta\eta} = 0. \quad (4.9)$$

(4.8) denklemi, (4.3) başlangıç koşulu ile birlikte çözülürse,

$$\phi(y, z, t) = \frac{\tilde{c}(y^2 + z^2)}{1 + 2\tilde{c}\lambda t} \quad (4.10)$$

elde edilir. ϕ_{yy} ve ϕ_{zz} türevlerinin, (4.9) denklemine yazılmasıyla **küresel Gardner (sG) denklemi** olarak adlandıracağımız aşağıdaki yeni denklem yapısı elde edilir:

$$f_t + 6ff_\eta - 6f^2f_{\eta\eta} + \frac{2\lambda\tilde{c}}{1 + 2\tilde{c}\lambda t}f + \varepsilon^2 f_{\eta\eta\eta} = 0. \quad (4.11)$$

Bu tez çalışmasında, $\lambda = 1$ olarak alınacaktır. $t_0 = 1/2\lambda\tilde{c}$ olarak tanımlanırsa, $2\lambda\tilde{c}/(1 + 2\tilde{c}\lambda t)$ terimi, $1/(t + t_0)$ şeklinde yazılır.

Sonraki bölümde, sG denkleminin Whitham modülasyon denklemleri elde edilecektir. Gardner ve cG denklemleriyle benzer olarak, sG denkleminin DSW çözümünü elde edebilmek için de aşağıdaki başlangıç koşulu alınmaktadır:

$$f(\eta, 0) = \begin{cases} f^-, & \eta < 0, \\ f^+, & \eta > 0. \end{cases} \quad (4.12)$$

sG denkleminin modellediği dalgaların yapısı, f^-, f^+ başlangıç adım parametrelerinin değerlerine bağlı olarak değişmektedir. DSW oluşumu için $f^- > f^+ \geq 0$ koşulu ile birlikte $f^+ < f^- \leq 1/2$ sağlanmalıdır. Farklı f^-, f^+ değerleri için inceleme yapıldığında sG denkleminin çözüm davranışı için Bölüm 3'te cG denkleminin Şekil 3.3-Şekil 3.7'de verilen grafiklere benzer sonuçlar elde edilmiştir. Bu çalışmada denklemlerin DSW çözümleri incelendiğinden sG denklemi için farklı çözüm tipleri verilmeyecektir.

(4.11) denklemi için sınır koşullarındaki $R(t)$ fonksiyonunu belirlemek için, (4.11) denkleminde η 'ya bağlı terimler ihmal edilerek elde edilen denklem $R(0) = 1$ başlangıç koşulu altında çözülür. Bu başlangıç değeri probleminin çözümü ile $R(t)$ aşağıdaki gibi elde edilir:

$$R(t) = \frac{t_0}{t + t_0}. \quad (4.13)$$

Bu fonksiyonun (4.7) sınır koşulunda yazılmasıyla, artmayan tipli başlangıç koşulları için sG denkleminin DSW çözümü incelenecektir.

4.3 sG Denklemi İçin Whitham Modülasyon Denklemleri

Whitham modülasyon teorisine göre, dalgayı karakterize eden tüm parametrelerin η ve t 'nin yavaş değişen fonksiyonları olduğu varsayılır. Modülasyon denklemlerini elde etmek için, bu bölümde de Luke tarafından geliştirilen çoklu ölçekler yöntemi uygulanacaktır [52]. Bu amaçla, hızlı değişen faz değişkeni aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\theta_\eta = \frac{k}{\varepsilon}, \quad \theta_t = -\frac{\omega}{\varepsilon} = -\frac{kV}{\varepsilon}. \quad (4.14)$$

Burada η ve t yavaş değişen uzay-zaman koordinatlarını göstermekle birlikte $k(\eta, t)$, $\omega(\eta, t)$ ve $V(\eta, t)$ sırasıyla, dalga sayısı, açısal frekans ve faz hızını göstermektedir. Ayrıca $0 < \varepsilon \ll 1$ olduğu kabul edilmektedir.

Karışık türevler için, $(\theta_\eta)_t = (\theta_t)_\eta$ olduğundan dalgaların korunumunu ifade eden ilk uyumluluk koşulu Bölüm 2'deki gibi elde edilir:

$$k_t + (kV)_\eta = 0. \quad (4.15)$$

Hızlı ve yavaş değişkenler arasındaki türev dönüşümleri,

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \rightarrow \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -\frac{\omega}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial t} \quad (4.16)$$

kullanılarak, (4.11) denklemi aşağıdaki gibi yeniden yazılır:

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{\omega}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial t} \right) f + 6f \left(\frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right) f - 6f^2 \left(\frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right) f \\ & + \varepsilon^2 \left(\frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^3 f + \frac{1}{t + t_0} f = 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

(4.17) denklemi, ε 'un kuvvetlerine göre düzenlenip yazılırsa aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon} \left(-\omega f_\theta + 6k f f_\theta - 6k f^2 f_\theta + k^3 f_{\theta\theta\theta} \right) \\ & + \left(f_t + 6f f_\eta - 6f^2 f_\eta + 3k^2 f_{\eta\theta\theta} + 3kk_\eta f_{\theta\theta} + \frac{1}{t+t_0} f \right) \\ & + \varepsilon (3k f_{\theta\eta\eta} + 3k_\eta f_{\eta\theta} + k_{\eta\eta} f_\theta) + \varepsilon^2 f_{\eta\eta\eta} = 0. \end{aligned} \quad (4.18)$$

f fonksiyonunun,

$$f(\theta, \eta, t) = f_0(\theta, \eta, t) + \varepsilon f_1(\theta, \eta, t) + \dots \quad (4.19)$$

şeklinde ε 'un kuvvet açılımına sahip olduğu kabul edilirse, gerekli düzenlemeden sonra ε 'a göre aşağıdaki merteye problemleri elde edilir:

$$O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) : -\omega f_{0,\theta} + 6k f_0 f_{0,\theta} - 6k f_0^2 f_{0,\theta} + k^3 f_{0,\theta\theta\theta} = 0, \quad (4.20)$$

$$O(1) : -\omega f_{1,\theta} + 6k(f_0 f_1)_\theta - 6k f_0^2 f_{1,\theta} - 12k f_0 f_1 f_{0,\theta} + k^3 f_{1,\theta\theta\theta} = U. \quad (4.21)$$

Burada,

$$U = -\left(f_{0,t} + 6f_0 f_{0,\eta} - 6f_0^2 f_{0,\eta} + 3k^2 f_{0,\eta\theta\theta} + 3kk_\eta f_{0,\theta\theta} + \frac{f_0}{t+t_0} \right). \quad (4.22)$$

Modülasyon denklemlerini elde etmek için ilk iki merteye problemin incelenmesi yeterli olacaktır. (4.20)'de verilen $1/\varepsilon$ mertebeli denklemin çözümü için Gardner denkleminin ilerleyen dalga çözümü kullanılır. Tez çalışmasının ikinci bölümünde, bu çözüm aşağıdaki gibi elde edilmişti:

$$f_0 = u_2 + \frac{(u_3 - u_2)cn^2(2(\theta - \theta_0)K, m)}{1 - \frac{u_3 - u_2}{u_4 - u_2}sn^2(2(\theta - \theta_0)K, m)}. \quad (4.23)$$

Burada $u_1 < u_2 < u_3 < u_4$ olduğu kabul edilmiştir.

(4.23) çözümünde, $K = K(m)$ birinci türden eliptik integrali ve m ise cn ve sn eliptik fonksiyonlarının modülünü göstermektedir. m 'nin açık formülü aşağıdaki gibidir:

$$m^2 = \frac{(u_3 - u_2)(u_4 - u_1)}{(u_3 - u_1)(u_4 - u_2)}. \quad (4.24)$$

$u_2 < f_0 < u_3$ kabulü altında ilerleyen dalga çözümü mevcuttur. u_i , $i = 1, 2, 3, 4$ parametreleri lineer bağımlıdır. Bu durumda, biri diğerleri cinsinden yazılabilir. Modülasyon teorisine göre u_i 'ler, uzaysal η değişkeniyle zamanı ifade eden t 'nin yavaş değişen fonksiyonlarıdır; $u_i = u_i(\eta, t)$. Bunların değişimi ise sG denkleminin DSW

oluşumunu modelleyen Whitham modülasyon denklemleri aracılığıyla tasvir edilir.

(4.23) denkleminde θ_0 faz sabiti bulunmaktadır. Bunu belirlemek için (4.19) seri açılımından elde edilecek daha yüksek merteye problemlere bakılabilir. Ancak, bu çalışmada θ_0 parametresinin yaklaşık değeri doğrudan sayısal çözümlerle karşılaştırılarak belirlenecektir. cG denkleminin DSW çözümlerinde hesaplanan θ_0 değerleri sG denklemi için de elde edilecektir.

Bu bölümde, merteye problemleri yardımıyla üç modülasyon denkleminin elde edilmesi amaçlanmaktadır. Bunların birincisi dalgaların korunumunu gösteren (4.15) denklemdir. Diğer iki denklemin elde edilmesi için (4.21) denkleminde verilen $O(1)$ mertebeli problem incelenmelidir. Eğer (4.23) çözümü, (4.21) denkleminde yazılırsa, θ 'ya göre keyfi olarak büyüyen terimler, yani seküler terimler oluşur. Bu terimleri yok edebilmek için Bölüm 2'de olduğu gibi eşlenik (adjoint) probleme bakılmalıdır. Benzer inceleme yapılarak aşağıdaki sekülerlik koşulları elde edilir:

$$\int_0^1 U d\theta = 0, \quad (4.25)$$

$$\int_0^1 f_0 U d\theta = 0. \quad (4.26)$$

(4.22)'de verilen U fonksiyonu, (4.25) ve (4.26) denklemlerinde yazılırsa,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 f_0 d\theta + \frac{\partial}{\partial \eta} \int_0^1 (3f_0^2 - 2f_0^3) d\theta + \frac{1}{t+t_0} \int_0^1 f_0 d\theta = 0 \quad (4.27)$$

ve

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 f_0^2 d\theta + \frac{\partial}{\partial \eta} \int_0^1 (4f_0^3 - 3f_0^4 - 3k^2 f_{0,\theta}^2) d\theta + \frac{2}{t+t_0} \int_0^1 f_0^2 d\theta = 0 \quad (4.28)$$

elde edilir.

Bu sekülerlik koşullarındaki $f_0^2, f_0^3, f_0^4, f_{0,\theta}^2$ fonksiyonları hesaplanıp integralleri alınırsa, modülasyon denklemleri u_2, u_3, u_4 cinsinden elde edilir.

Modülasyon denklemleri yazılırken, birinci, ikinci ve üçüncü türden eliptik integraller ortaya çıkmaktadır. Bu nedenle, eliptik integrallerin türev formülleri (EK A) kullanılarak modülasyon denklemleri birinci merteye kuazilineer kısmi diferansiyel denklem sistemi yapısında aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\mathbf{u}_t + A(\mathbf{u})\mathbf{u}_\eta + B(\mathbf{u})\frac{1}{t+t_0} = 0, \quad (4.29)$$

burada $\mathbf{u}(\eta, t) = (u_2, u_3, u_4)$, $A(\mathbf{u})$ 3×3 matris ve $B(\mathbf{u})$ ise 3×1 vektör olarak tanımlanmaktadır ve açık halleri EK B'de görülebilir.

Modülasyon denklemlerindeki u_2, u_3, u_4 değişkenleri yerine Riemann değişkenleri olarak adlandırılan r_i 'ler, ($i = 1, 2, 3$) kullanılarak basit yapıdaki denklemler elde edilir. sG denkleminin Riemann değişkenlerinin kökler cinsinden ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1}{4}(u_1 + u_2)(u_3 + u_4), \\ r_2 &= \frac{1}{4}(u_1 + u_3)(u_2 + u_4), \\ r_3 &= \frac{1}{4}(u_2 + u_3)(u_1 + u_4). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Böylece, (4.29)'da verilen sG denkleminin Whitham modülasyon sistemi aşağıdaki biçime dönüştürülür:

$$\frac{\partial r_i}{\partial t} + v_i(r_1, r_2, r_3) \frac{\partial r_i}{\partial \eta} + \frac{h_i(r_1, r_2, r_3)}{t + t_0} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.31)$$

Burada,

$$\begin{aligned} v_1 &= 2(r_1 + r_2 + r_3) + \frac{4(r_2 - r_1)K(m)}{E(m) - K(m)}, \\ v_2 &= 2(r_1 + r_2 + r_3) - \frac{4(r_2 - r_1)(1 - m^2)K(m)}{E(m) - (1 - m^2)K(m)}, \\ v_3 &= 2(r_1 + r_2 + r_3) + \frac{4(r_3 - r_2)K(m)}{E(m)} \end{aligned} \quad (4.32)$$

ve küresel terimler, işlemlerde kolaylık açısından $S_i = 1 - 4r_i$, ($i = 1, 2, 3$) gösterimi kabul edilerek aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\begin{aligned} h_1 &= -\frac{S_1 E}{E - K} - \frac{\sqrt{S_1}(\sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\sqrt{S_3})\Pi}{(E - K)(S_1 - S_3)} \\ &\quad + \frac{K\sqrt{S_1}\left(S_1 - \sqrt{S_1}(-1 + \sqrt{S_3}) + \sqrt{S_2}(1 + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})\right)}{2(E - K)(\sqrt{S_1} - \sqrt{S_3})}, \\ h_2 &= \frac{E(S_3 - S_1)S_2 - \sqrt{S_2}(\sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})(\sqrt{S_2} + \sqrt{S_1}\sqrt{S_3})\Pi}{E(S_1 - S_3) + K(S_3 - S_2)} \\ &\quad + \frac{K}{2(E(S_1 - S_3) + K(S_3 - S_2))} \left(\sqrt{S_2} \left(\sqrt{S_2} + \sqrt{S_3} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left(S_1 + S_2 - \sqrt{S_2}(-1 + \sqrt{S_3}) + \sqrt{S_1}(1 + \sqrt{S_3}) \right) \right), \\ h_3 &= -S_3 + \frac{\sqrt{S_3}(\sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})(\sqrt{S_1}\sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})\Pi}{E(S_3 - S_1)} \\ &\quad + \frac{\sqrt{S_3}(\sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})(1 + \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} - \sqrt{S_3})K}{2(\sqrt{S_1} - \sqrt{S_3})E}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

(4.32) denklemlerinde, v_i 'ler Whitham karakteristik hızlarını göstermektedir. $K = K(m)$, $E = E(m)$ ve $\Pi = \Pi(n, m)$ ise sırasıyla, birinci, ikinci ve üçüncü türden tam eliptik integralleri göstermektedir. Eliptik integrallerin bu bölümde kullanılan özellikleri, EK A'da gösterilmiştir.

Küresel terimlerin olmaması durumunda, yani $t_0 \rightarrow \infty$ iken, (4.31) denklemini Gardner denkleminin Whitham sistemine indirgenmektedir. İndirgenen denklem sistemi dikkate alınarak Gardner denkleminin DSW çözümü [40]'da incelenmiştir.

Eliptik fonksiyonların modülü (m), üçüncü türden eliptik integralin n ile gösterilen parametresi, k dalga sayısı ve V faz hızının Riemann değişkenler cinsinden ifadeleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} m &= \frac{\sqrt{r_2 - r_1}}{\sqrt{r_3 - r_1}}, & n &= \frac{\sqrt{1 - 4r_1} - \sqrt{1 - 4r_2}}{\sqrt{1 - 4r_1} + \sqrt{1 - 4r_3}}, \\ k &= \frac{\sqrt{r_3 - r_1}}{2K(m)}, & V &= 2(r_1 + r_2 + r_3). \end{aligned} \quad (4.34)$$

4.4 Sayısal Çözümler

Bu bölümde, (3+1) boyutlu Gardner-KP denkleminin indirgenmesiyle elde edilen sG denkleminin ve bu denklemin önceki bölümde elde edilen modülasyon sisteminin sayısal çözümleri elde edilecektir. Bölüm 3'te Gardner ve cG denklemlerinin doğrudan sayısal çözümleri için mETDRK4 yöntemi (modified exponential time differencing method) kullanılarak sonuçlar elde edilmişti. sG denkleminin sayısal çözümü için de aynı yöntem kullanılacaktır. (4.33) denkleminde verilen h_i ($i = 1, 2, 3$) teriminin etkisinin gözlemlenmesi için Gardner denkleminin sayısal çözümünün sonuçlarıyla karşılaştırmalar yapılacaktır. Modülasyon denklemlerinin sayısal çözümleri için MATLAB üzerinde birinci mertebeden hiperbolik sistem çözücü kullanarak Lax-Wendroff yönteminin iki aşamalı biçimi seçilecektir. sG denkleminin doğrudan sayısal çözümü ile modülasyon sisteminin sayısal çözümlerinin karşılaştırılmasıyla elde edilen sonuçlar açıklanacaktır.

4.4.1 Küresel Gardner denkleminin sayısal çözümü

Bu bölümde, sG denkleminin doğrudan sayısal çözümü incelenerek Gardner denkleminin sayısal çözümü ile karşılaştırma yapılacaktır. Bölüm 3'te Gardner ve cG denklemlerinin sayısal çözümleri için kullanılan parametre değerleri alınarak inceleme

yapılacaktır. Buna göre,

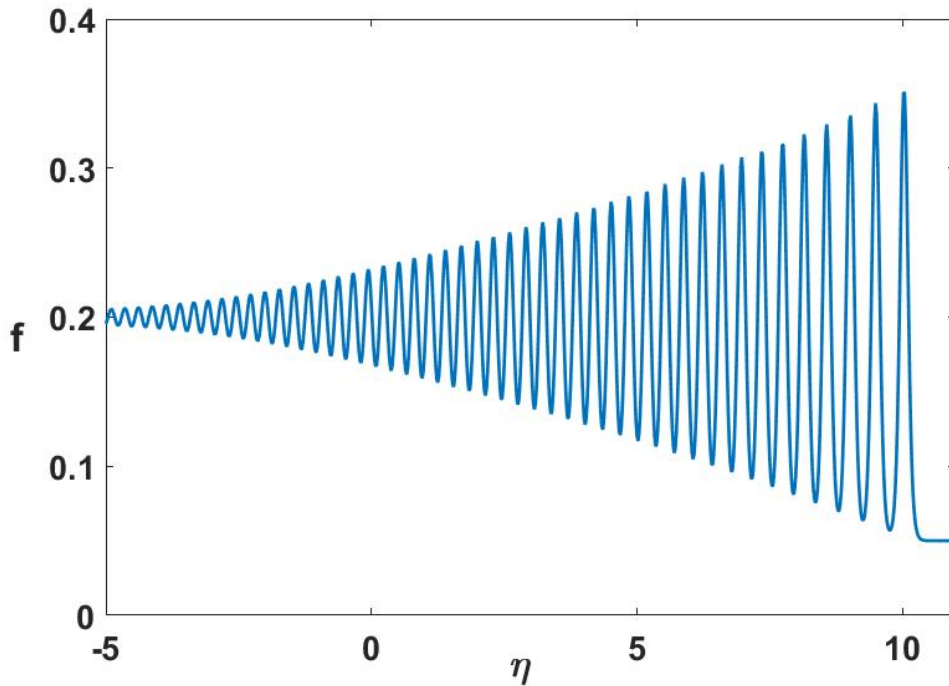
$$f_t + 6ff_\eta - 6f^2f_{\eta\eta} + \frac{1}{t+t_0}f + \varepsilon^2 f_{\eta\eta\eta} = 0 \quad (4.35)$$

ile ifade edilen sG denklemini için

$$f(\eta, 0) = \begin{cases} f^-, & \eta < 0, \\ f^+, & \eta > 0 \end{cases} \quad (4.36)$$

başlangıç koşulunda, dispersif şok dalgası oluşumunu sağlayan $f^+ < f^- \leq 1/2$ koşulu dikkate alınarak $f^- = 0.4$ ve $f^+ = 0.1$ kabul edilecektir. Daha önce açıklandığı gibi, f^- ve f^+ başlangıç adım parametrelerinin farklı seçimleri dalga yapılarının değişmesine yol açmaktadır.

(4.35) denkleminin sayısal çözümü için mETDRK4 yöntemindeki Fourier modlarının sayısı, $N = 2^{12}$, uzaysal bölge tanım aralığı, $L = 40$ ve zaman adımı, $h = 10^{-3}$ alınmaktadır. Ayrıca, $\tilde{c}^{-1} = t_0 = 10$, $\varepsilon^2 = 10^{-3}$ parametre kabulleri yapılmaktadır. EK C'de yöntemin uygulanması ile ilgili ayrıntılı bilgi verilmiştir.



Şekil 4.1 : sG denkleminin $t = 10$ için sayısal çözümü.

sG denkleminin sayısal çözümü Şekil 4.1'de verilmiştir. Klasik Gardner denkleminin sayısal çözümü Bölüm 3'te elde edilerek Şekil 3.2'de verilmişti. Elde edilen çözümlere göre, başlangıç adım parametresinin $f^- = 0.4$ alınmasıyla birlikte sG denkleminin

sayısal çözümü yapılırken $t = 10$ zaman değeri için arka kenar seviyesi 0.2 değerine kadar düşmüştür. Şekil 4.1’de gözlemlenen bu değer,

$$R(t)f^- = \frac{t_0}{t+t_0}f^- \quad (4.37)$$

formülü kullanılarak da doğrulanabilir. Benzer şekilde, ön kenar seviyesi için

$$R(t)f^+ = \frac{t_0}{t+t_0}f^+ \quad (4.38)$$

hesaplanırsa 0.05 elde edilir. cG denkleminin $t = 10$ ’daki sayısal çözümünde ön kenar seviyesi, 0.0577 ve arka kenar seviyesi ise 0.2308 olarak elde edilmişti. Buna göre, $f^- = 0.4$ ve $f^+ = 0.1$ başlangıç adım parametrelerine göre sG ve cG denklemlerindeki seviye azalmaları birbirine yakındır.

4.4.2 Whitham modülasyon denklemlerinin sayısal çözümleri

Bu bölümde, sG denkleminin Whitham modülasyon sisteminin sayısal çözümü yapılacaktır. Bu çözüm, sG denkleminin DSW çözümünü oluşturmamızı sağlar. Daha sonra, elde edilen DSW çözümü ile sG denkleminin Şekil 4.1’de verilen doğrudan sayısal çözümü karşılaştırılacaktır.

Bölüm 3’te Gardner ve cG denklemlerinin Whitham modülasyon sistemleri sayısal olarak çözümlenirken, Shampine tarafından geliştirilen MATLAB üzerinde tanımlanan birinci mertebeden hiperbolik sistem çözücü [56] kullanılarak, Lax-Wendroff yönteminin iki aşamalı biçimi [75] seçilmiştir. Bu bölümdeki sayısal çözümlerde de karşılaştırma yapabilmek amacıyla aynı yöntem kullanılacaktır.

sG denkleminin Whitham sistemi aşağıdaki gibi yazılır:

$$\frac{\partial r_i}{\partial t} + v_i(r_1, r_2, r_3) \frac{\partial r_i}{\partial \eta} + \frac{h_i(r_1, r_2, r_3)}{t+t_0} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.39)$$

Sayısal çözümün yapılabilmesi için, (4.39) denklemindeki Riemann değişkenlerinin başlangıç değerleri belirlenmelidir. Bu değerler, DSW oluşumunu sağlayan $f^- = 0.4$ ve $f^+ = 0.1$ parametre değerleri dikkate alınarak elde edilir. Buna göre, Riemann değişkenlerinin başlangıç değerleri Bölüm 3’te verilen Şekil 3.8(a)’dan da görüleceği gibi aşağıdaki biçimde alınacaktır:

$$r_1(\eta, 0) = 0.09, \quad r_2(\eta, 0) = \begin{cases} 0.09 & \eta \leq 0, \\ 0.24 & \eta > 0, \end{cases} \quad r_3(\eta, 0) = 0.24 \quad (4.40)$$

Çözümler yapılırken, MATLAB programı içerisinde, $t = 10$ ve $[-40, 40]$ bölgesi için $N = 2^{12}$ nokta kullanılarak sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca, sG denklemindeki parametre değeri olarak $\tilde{c}^{-1} = t_0 = 10$ alınmaktadır.

Gardner denklemi ve bu denklemin Whitham sistemi için sınır koşulları, zamana bağıllık içermediğinden sabittir. Ancak sG denklemi için sınır koşulları, zamana bağlı olarak değişir. Bu nedenle, denklemin sağladığı sınır koşullarının düzenlenmesi gerekir. sG denkleminin (4.39) ile verilen Whitham sistemi için sınır koşulları, η uzaysal değişkenine bağlı türev teriminin ihmal edilip,

$$\frac{dr_i}{dt} + \frac{h_i(r_1, r_2, r_3)}{t + t_0} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.41)$$

şeklinde indirgenen diferansiyel denklem sisteminin (4.40) başlangıç koşullarında çözülmesiyle elde edilir. Çözüm yapılırken (4.41) denklemindeki $h_i(r_1, r_2, r_3)$ terimlerinin yerine indirgenmiş formlarının yazılması gerekir. Bunun için h_i fonksiyonlarının $m \rightarrow 0$ ve $m \rightarrow 1$ iken limitleri hesaplanmalıdır. Yapılan işlemler sonucunda, Bölüm 3'te h_i terimlerinin limit değerleri aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow 0} h_1 &= \lim_{m \rightarrow 0} h_2 = \lim_{m \rightarrow 0} h_3 = \frac{1}{2}(\sqrt{1 - 4r_3} + 4r_3 - 1) \\ \lim_{m \rightarrow 1} h_1 &= \frac{1}{2}(\sqrt{1 - 4r_1} + 4r_1 - 1) \\ \lim_{m \rightarrow 1} h_2 &= \lim_{m \rightarrow 1} h_3 = -1 + 4r_3. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Bu limit değerleri kullanılarak (4.41) denklemi, (4.40) başlangıç koşuluyla birlikte çözümlerse sınır koşulları elde edilir. Buna göre,

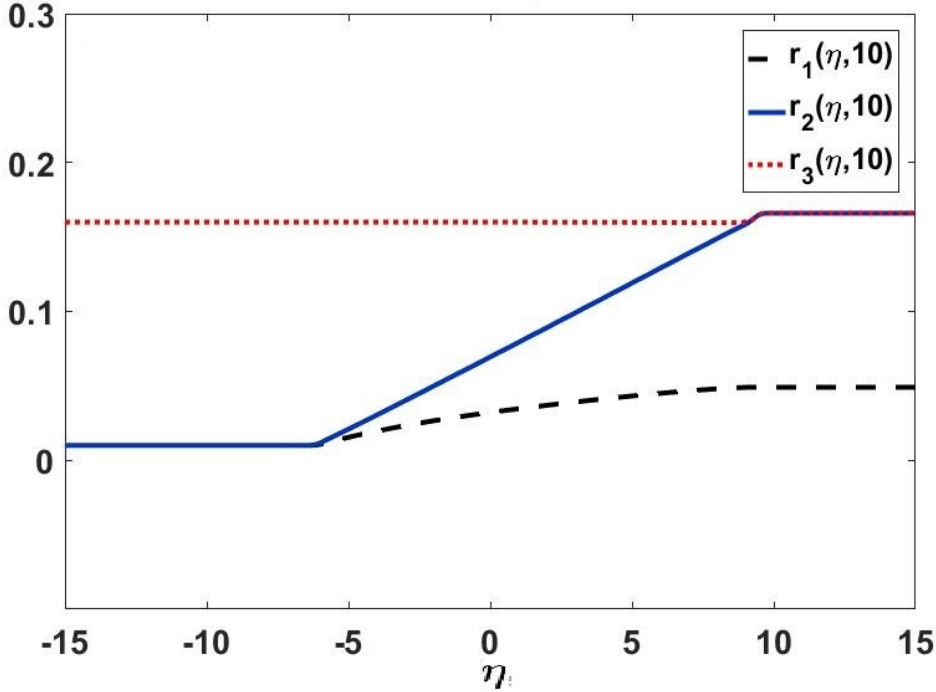
$m \rightarrow 0$ iken sınır koşulları:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{180 + (20 - 3t)t}{20(10 + t)^2} \\ r_2 &= -0.15 - \frac{16}{(10 + t)^2} + \frac{4}{10 + t} \\ r_3 &= \frac{4(6 + t)}{(10 + t)^2} \end{aligned} \quad (4.43)$$

$m \rightarrow 1$ iken sınır koşulları:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{9 + t}{(10 + t)^2} \\ r_2 &= 0.25 - \frac{100.1}{(10 + t)^4} \\ r_3 &= 0.25 - \frac{100}{(10 + t)^4} \end{aligned} \quad (4.44)$$

olarak yazılabilir. Bu sınır koşulları kullanılarak, silindirik Gardner denklemi için yapılan analize benzer olarak, sG denklemi için de birinci mertebeden hiperbolik sistem çözücü ile Lax-Wendroff metodu uygulanır. Uygulanan yöntemin sonuçlarına göre, sG denkleminin Riemann değişkenlerinin değişimi Şekil 4.2’de görüldüğü gibi çizdirilir. Karşılaştırma yapabilmek amacıyla klasik Gardner denkleminin Whitham



Şekil 4.2 : sG denkleminde $t = 10$ için (4.39) denkleminin sayısal çözümü ile elde edilen Riemann değişkenleri.

sisteminin sayısal çözümlerinde kullanılan Riemann değişkenlerinin $t = 10$ için değişimine bakılabilir (Şekil 3.8(b)). Bu çizimlerdeki Riemann değişkenlerinin davranışını karşılaştırırken elde edilen en önemli sonuç, r_1 ve r_2 'nin kesişim noktaları arasındaki farklılıktır. Hem ön kenarda hem de arka kenarda benzer bir farklılık gözlemlenmektedir. Bu sonuç, Gardner ve sG denklemlerindeki DSW'ların kenar dinamikleri hakkında bilgi verir. Buna göre, sG denkleminde DSW'nun ön kenarı ve arka kenarı daha yavaş hareket etmektedir. Bu sonuçlar oluşturduğumuz animasyon videosunda gözlemlenebilir [78].

sG denkleminin asimptotik (modülasyon teorisi) çözümünü Şekil 4.1’de gösterilen doğrudan sayısal çözümüyle karşılaştırabilmek amacıyla, asimptotik çözümün

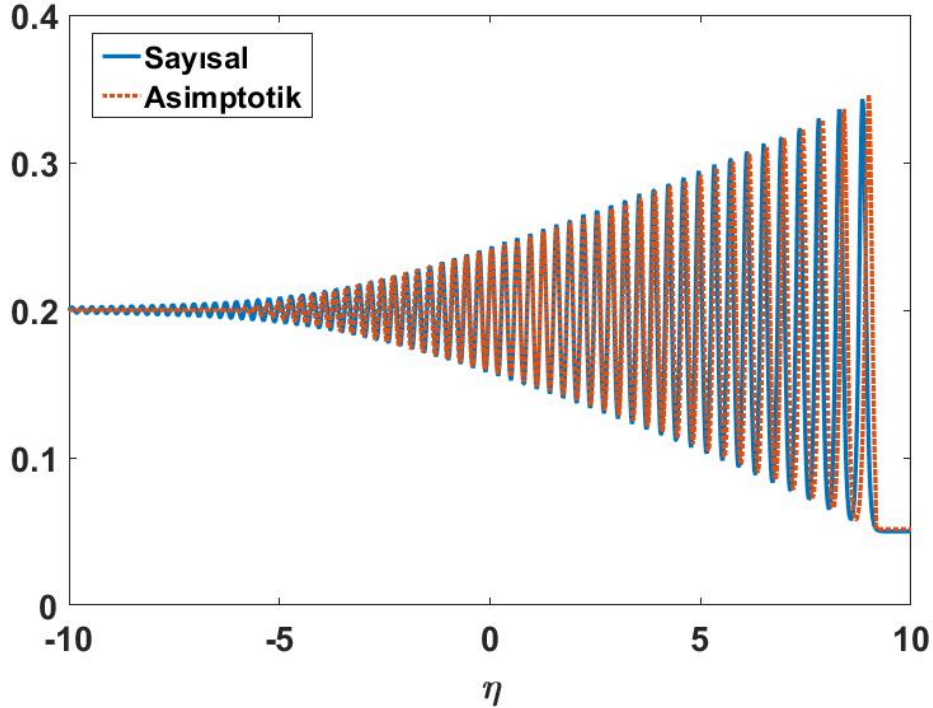
Riemann değişkenleri cinsinden aşağıdaki ifadesi incelenmektedir:

$$f_0(\theta, \eta, t) = \frac{1 - \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} - \sqrt{S_3}}{2} + \frac{(\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2})(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_3})cn^2(2(\theta - \theta_0)K, m)}{(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_3}) + (\sqrt{S_2} - \sqrt{S_1})sn^2(2(\theta - \theta_0)K, m)}. \quad (4.45)$$

Burada, daha önce bahsedildiği gibi $S_i = 1 - 4r_i$, $(i = 1, 2, 3)$ olarak alınmaktadır. Modülasyon teorisinde hızlı değişimi ifade eden θ , aşağıdaki formülle gösterilmiştir:

$$\theta(\eta, t) = \int_{-L}^{\eta} \frac{k(\eta', t)}{\varepsilon} d\eta' - \int_0^t \frac{k(\eta, t')V(\eta, t')}{\varepsilon} dt'. \quad (4.46)$$

Denklem (4.45) ve hızlı faz değişkeni için (4.46) formülü birlikte kullanılarak sG denkleminin asimptotik çözümü elde edilir. Böylece, bu denklemin DSW çözümleri herhangi bir t zaman değeri için oluşturulabilir. $t = 10$ zaman değeri için sG denkleminin doğrudan sayısal çözümüyle asimptotik çözümü çakışık olarak Şekil 4.3'te görüldüğü gibi elde edilir.



Şekil 4.3 : sG denkleminin $t = 10$ için elde edilen sayısal ve asimptotik çözümlerinin karşılaştırılması.

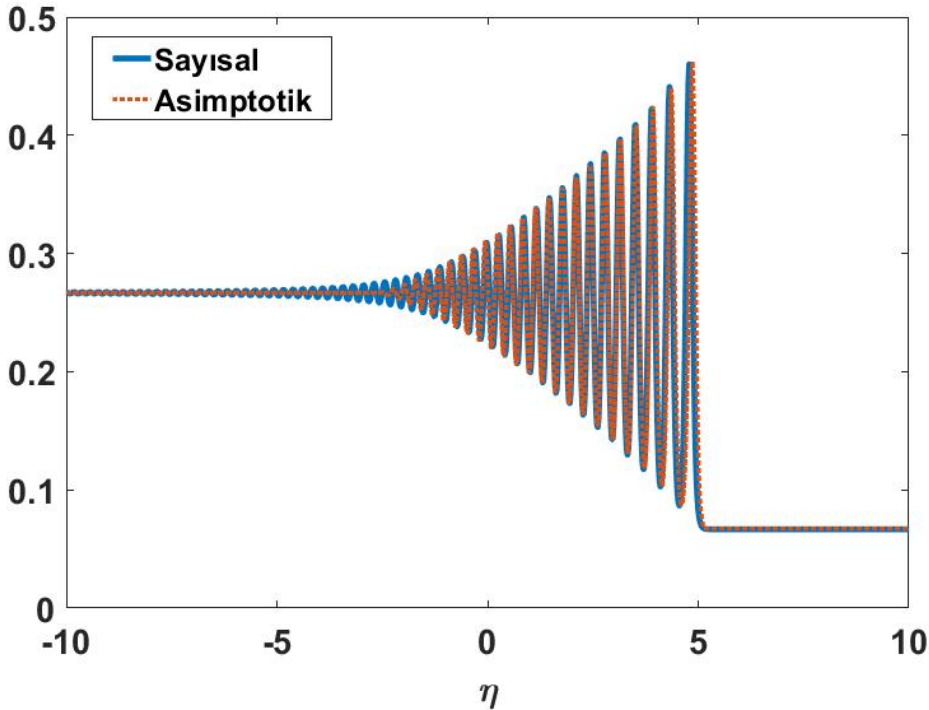
Elde edilen çizimlere göre, salınımların ön kenar genliği ile dalga boyunun asimptotik yaklaşımda ve sayısal çözümde uyumlu olduğu gözlemlenebilir. Böylece, Whitham modülasyon teorisi, $t = 10$ 'da sG denklemindeki dispersif şok dalgaları için doğru ve

uygun çözümler elde etmemizi sağlamıştır.

$t = 10$ 'da ön kenarın $\eta_+ = 9.192$ konumu kullanılarak ortalama hız hesaplanırsa $V_{avg} = 0.919$ elde edilir. Şekil 3.9'daki Gardner denkleminin DSW çözümü için ön kenarın $t = 10$ 'da ortalama hız değeri 1.133 ve Şekil 3.15'te cG denkleminin bu değeri 0.957 olarak hesaplanmıştı. Buna göre, sG denkleminin ön kenarının daha yavaş hareket ettiği görülmektedir.

Sayısal yaklaşımda, θ_0 faz değişimi doğrudan sayısal simülasyonlarla uyumlu olacak şekilde belirlenmiştir. Buna göre, sG denkleminin için DSW ortalaması yaklaşık olarak $(0.343 + 0.2)/2 = 0.2715$ 'dir ve asimptotik çözüm, orta bölgede genlik değeri 0.2579 olan bir tümseğe sahiptir.

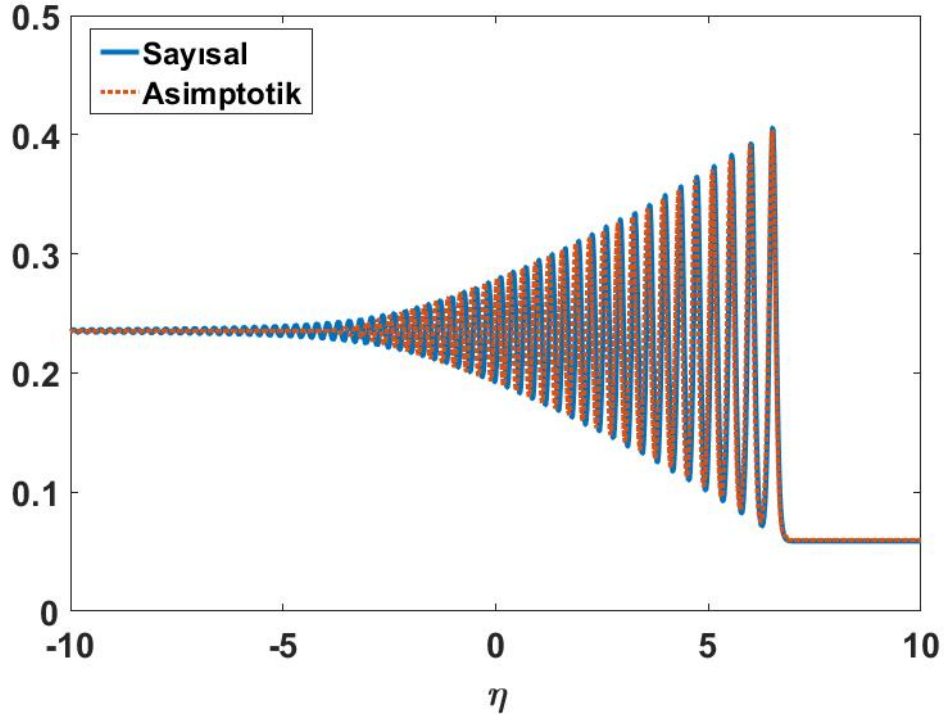
Farklı zaman değerlerinde sG denkleminin asimptotik ve doğrudan sayısal çözümleri çakışık olarak Şekil 4.4, Şekil 4.5 ve Şekil 4.6'da görülebilir. Bu grafiklerde de cG denkleminin için önceki bölümde elde edilen çizimlerde görüldüğü gibi ön ve arka kenardaki seviyelerin düşüşü gözlemlenmektedir. Buna bağlı olarak genlik de azalmaktadır.



Şekil 4.4 : sG denkleminin $t = 5$ için elde edilen sayısal ve asimptotik çözümlerinin karşılaştırılması.

$t = 5$ 'teki DSW'nun ön kenar ve arka kenar seviyeleri için sırasıyla, 0.067 ve 0.267 elde edilir. Ön kenardaki $\eta_+ = 5.117$ konumu kullanılarak ortalama hız $V_{avg} = 1.023$

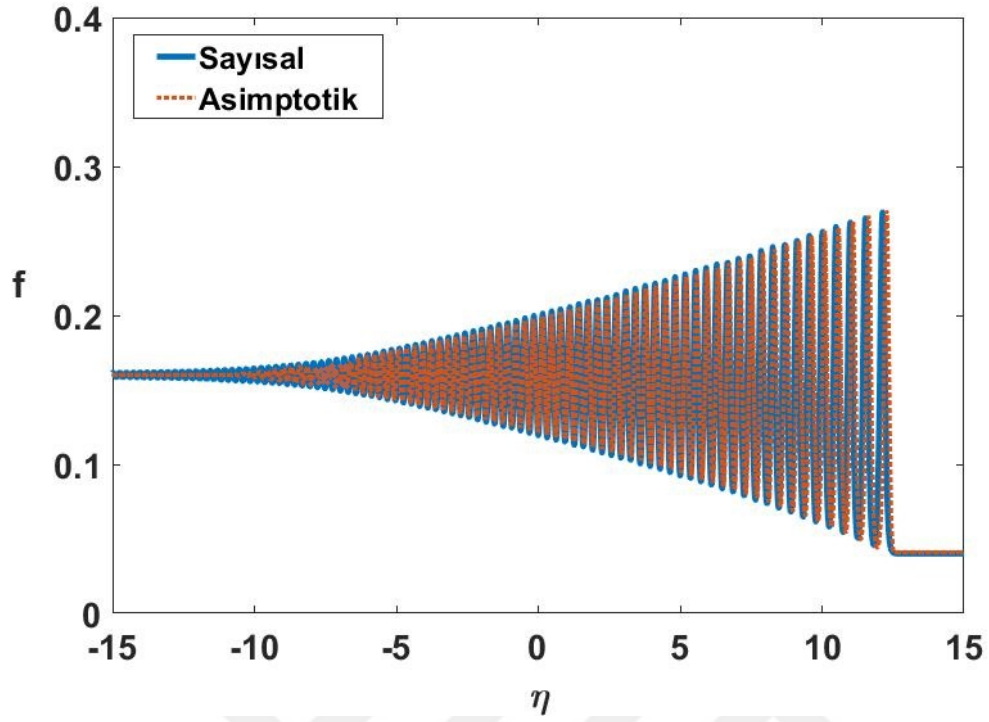
bulunur. Bu değer, cG ve Gardner denkleminin $t = 5$ 'teki ortalama hızlarından küçüktür. Şekil 4.5'te ön kenar ve arka kenar seviyeleri sırasıyla, 0.059 ve 0.235 olarak bulunmaktadır. Ön kenarın $t = 7.5$ 'teki $\eta_+ = 6.855$ konumu kullanılarak ortalama hız hesaplandığında, $V_{avg} = 0.914$ elde edilir. Bu hız değeri, Gardner ve cG denklemlerinin aynı zaman değerindeki ortalama hızlarından düşüktür.



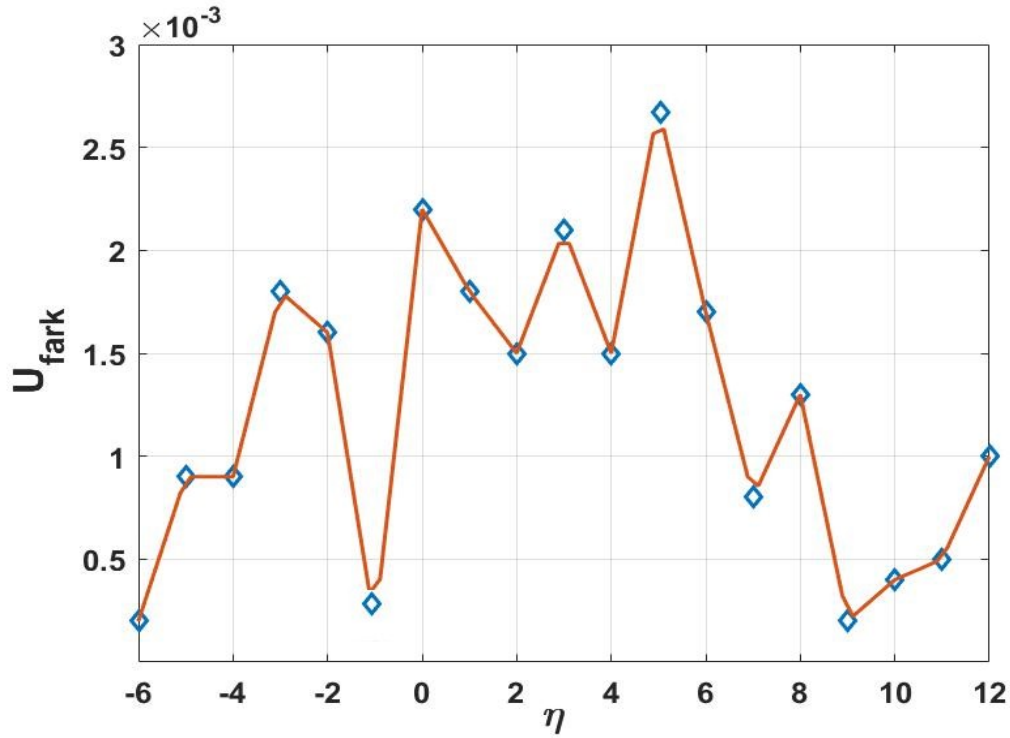
Şekil 4.5 : sG denkleminin $t = 7.5$ için elde edilen sayısal ve asimptotik çözümlerinin karşılaştırılması.

Şekil 4.6'da ise $t = 15$ için ön kenar ve arka kenar seviyeleri sırasıyla, 0.04 ve 0.16 olarak bulunmaktadır. Ön kenarın $t = 15$ 'teki $\eta_+ = 12.52$ konumu kullanılarak ortalama hız hesaplandığında, $V_{avg} = 0.835$ elde edilir. Gardner ve cG denklemlerinin aynı zaman değerindeki ortalama hızlarıyla karşılaştırma yapıldığında sG denkleminin ortalama hızı daha düşüktür.

Bölüm 3 ve Bölüm 4'te elde edilen grafikler incelendiğinde, WMT'nin hem klasik Gardner denkleminin, hem de cG ve sG denklemlerinin sayısal ve asimptotik çözümlerinde uygun sonuçlar verdiği görülebilir. sG denkleminin $t = 15$ değerindeki asimptotik çözüm ve sayısal çözümlerinin farkı η 'ya göre Şekil 4.7'de verilmiştir.



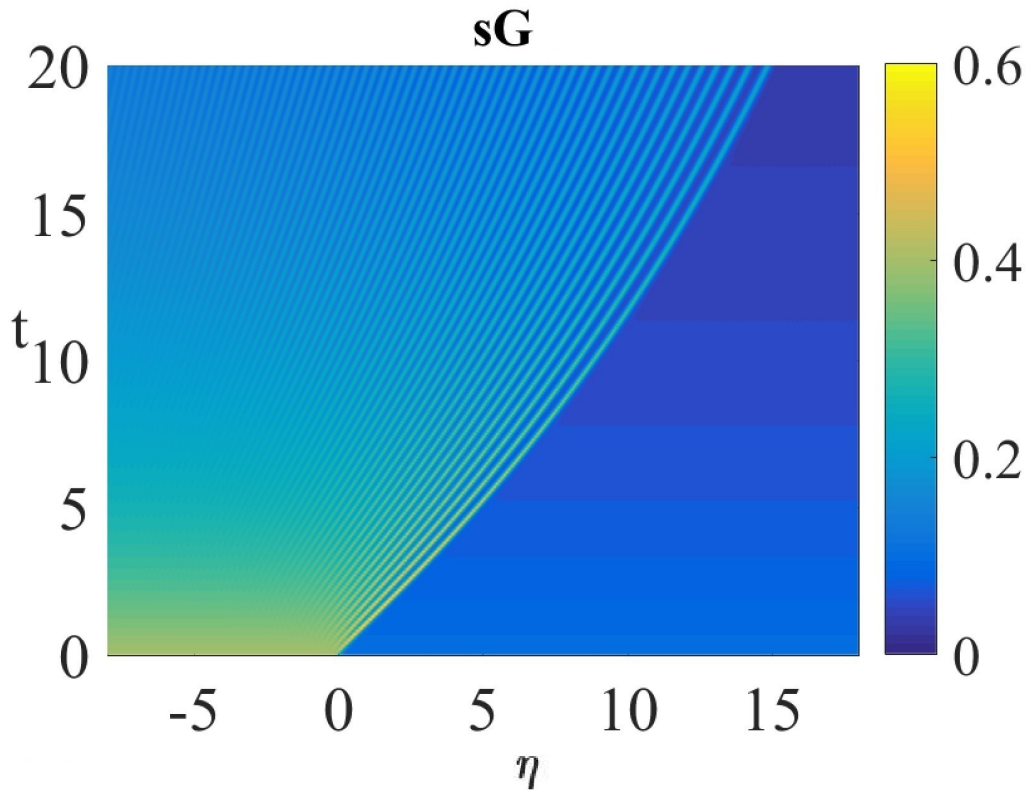
Şekil 4.6 : sG denkleminin $t = 15$ için elde edilen sayısal ve asimptotik çözümlerinin karşılaştırılması.



Şekil 4.7 : sG denkleminin $t = 15$ için elde edilen sayısal ve asimptotik çözümlerinin farkı.

Bu grafikte, her bir adımda hesaplanan asimptotik çözümlerin tepe noktası (f_a) ile sayısal çözümlerin tepe noktasının (f_s) farkının mutlak değerleri alınarak karşı gelen η değerlerinde gösterilmiştir. Şekil 4.7'ye göre, asimptotik çözüm ile sayısal çözümler arasındaki fark kabul edilebilir boyuttadır. Benzer inceleme, farklı t değerleri için de yapılabilir.

Şekil 4.8'de sG denkleminin $t = 20$ 'de doğrudan sayısal çözümünün (η, t) düzlemindeki uzay-zaman grafiği görülebilir. Bu grafik ile Şekil 3.20(a)-(b)'de verilen Gardner ve cG denklemlerinin çizimleri karşılaştırıldığında, sG denklemindeki DSW yayılımının daha yavaş olduğu görülmektedir. Ayrıca, sG denkleminin dalga cephesi geometrik yayılma etkisinden dolayı kavisli bir biçimdedir. Bu durum ve sG denkleminin için DSW'nun genel hatları [78]'de verilen animasyon ile ayrıntılı bir şekilde görülebilir.



Şekil 4.8 : sG denkleminin için, $t = 0$ ve $t = 20$ arasındaki doğrudan sayısal çözümlere ait uzay-zaman grafikleri.

sG denkleminin DSW çözümü, (3+1) boyutlu Gardner-KP denkleminin çözümünü sadece $y^2 + z^2 = 0$ 'da çakışmaktadır. (3+1) boyutlu denklemin $y^2 + z^2 = 0$ 'dan farklı herhangi bir dairesel kesitindeki çözümü, (4.8) cephe şekli denkleminin seçilen t

zaman değeri ve $y^2 + z^2 = r^2$ kesiti için elde edilen çözümünden bulunan değer kadar sG denkleminin çözümünün ötelenmesi ile bulunur. Burada r , seçilen daire kesitinin sabit yarıçapıdır. Bu öteleme, sabit bir t zaman değeri için $\eta = x + \frac{r^2}{t+t_0}$ öteleme değişkeniyle yapılır. Öteleme işleminde, başlangıç paraboloidi üzerinde seçilen herhangi bir dairesel kesit için (3+1) boyutlu Gardner-KP denkleminin DSW özümü herhangi bir t zaman değeri için bulunabilir.



5. SONUÇLAR

Bu çalışmada, önemli uygulama alanlarına sahip olan (2+1) ve (3+1) boyutlu Gardner-KP denklemlerinin özel bir başlangıç koşulu altında (1+1) boyutlu denklemlere indirgenmeleri problemleri incelenmiştir. Bu indirgemeler sonucunda elde edilen Gardner tipi denklemler için dispersif şok dalgası çözümleri Whitham modülasyon teorisi kullanılarak elde edilmiştir. Modülasyon teorisi ile genlik, dalga sayısı ve faz hızı gibi kavramların zamandaki yavaş değişimi analiz edilmektedir. Denklemlerin doğrudan sayısal çözümlerinden elde edilemeyen DSW'lara ait yayılma zarfı, yayılma hızı ve belirli bir andaki maksimum-minimum genlik büyüklükleri gibi bilgiler Whitham modülasyon denklemlerinin çözümlerinden elde edilebilmektedir. Bu teori, günümüze kadar su dalgaları, optik, atmosfer olayları ve soğuk plazmalarda yapılan birçok çalışmanın konusu olmuştur. Teorinin uygulanabilmesi için öncelikle denklemin ilerleyen dalga çözümünün var olması gerekmektedir. Bu periyodik çözüm, Jacobi eliptik fonksiyonlarını içerdiğinden hesaplar yapılırken eliptik fonksiyonların EK A'da verilen özellikleri kullanılmıştır.

Modülasyon teorisinin en önemli katkısı, zayıf dispersiyon ve zayıf nonlineerliğin hakim olduğu durumlarda meydana gelen dispersif şok dalgalarının tanımlanmasını sağlamasıdır. Bu çalışmada, önerdiğimiz çözüm formu sonucunda elde edilen silindirik ve küresel Gardner denklemleri için dispersif şok dalgası çözümlerinin elde edilmesinde kullanılan modülasyon denklemleri türetilmiştir. Orijinal WMT'de modülasyon denklemleri, korunum yasalarının ortalaması alınarak bulunur. Ancak tez çalışmasında elde ettiğimiz Gardner tipi denklemler için korunum yasaları henüz bilinmediğinden, asimptotik analiz yöntemi olan çoklu ölçekler metodu uygulanarak korunum yasaları yerine kullanılan sekülerlik koşulları elde edilmiştir. Whitham sisteminin tanımlanması için modülasyon denklemleri, Riemann değişkenleri ile uygun formda yazılmıştır. Sonrasında, bu denklemlerin belirlenen başlangıç koşulları altındaki sayısal çözümleri incelenmiştir. WMT ile elde edilen modülasyon denklemlerinin sayısal çözümleri ve denklemlerin doğrudan sayısal çözümlerinin

farklı zaman değerlerindeki karşılaştırması yapılmıştır. Bu karşılaştırma sonucunda, çözümlerin uyum içerisinde olduğu gözlemlenmiştir. Böylece kullanılan yöntemin doğruluğu kontrol edilmiş olup elde edilen sonuçlar gelecekte nonlinear dalga yayılımını modelleyen yüksek boyutlu birçok denklem için de kullanılabilir.

Gardner tipi denklemlerin modellediği dalgaların yapısı, başlangıç adım parametreleri olarak adlandırılan, f^- , f^+ değerlerine bağlı olarak değişmektedir. Bu denklemlerin çözümlerinin incelenmesi sonucunda, KdV tipi undular bore olarak bilinen çözüm dışında çok geniş bir sınıflandırma ile karşılaşmıştır. Daha önce, Gardner denklemi için yapılan sınıflandırmanın benzeri bu çalışmada elde edilen silindirik Gardner (cG) ve küresel Gardner (sG) denklemleri için de gözlemlenmiştir. Ancak dispersif şok dalgaları ile ilgilendiğimiz için $f^+ < f^- \leq 1/2$ koşulu dikkate alınmaktadır. Farklı zaman değerleri için inceleme yapıldığında, cG ve sG denklemlerinin t 'ye bağlılığından dolayı genlik seviyelerinde düşüş olduğu görülmüştür. DSW çözümlerinde ön ve arka kenar seviyeleri için hesaplar yapılarak bu düşüşün zaman içindeki değişimi gözlemlenmiştir. Gardner denklemi için inceleme yapıldığında ise zamana bağlı katsayı fazladan terim olmadığından genliğin sabit bir durumda kaldığı belirlenmiştir. Denklemlerin sayısal çözümleriyle WMT uygulanarak elde edilen asimptotik çözümlerinin çakışık olarak verilen grafiklerinde salınımların ön kenar genliği ile dalga boyunun asimptotik yaklaşımda ve sayısal çözümde uyumlu olduğu görülmektedir. Böylece, cG ve sG denklemleri için sınır koşulları zamana bağlı olarak değişmekle birlikte Whitham modülasyon teorisi yine de dispersif şok dalga çözümleri için doğru ve uygun yaklaşımlar elde etmemizi sağlamıştır.

Sayısal yaklaşımda, θ_0 faz değişimi doğrudan sayısal simülasyonlarla uyumlu olacak şekilde seçilmiştir. Bu seçim için dispersif şok dalgasının ortalama değeri bulunur, yani, en büyük soliton genliği ve arka kenarın ortalaması hesaplanır. Asimptotik çözümde bu ortalama değerine en yakın genliğe sahip ortadaki dalga katarına göre θ_0 değeri belirlenir. Alınan Gardner tipi denklemlerin farklı zamanlardaki DSW çözümleri için θ_0 değerleri hesaplanarak analizler yapılmıştır.

Silindirik ve küresel Gardner denklemlerinin doğrudan sayısal çözümlerinin (η, t) düzlemindeki uzay-zaman grafikleri incelendiğinde bu denklemler için DSW yayılımının Gardner denklemine göre daha yavaş olduğu görülmüştür. Ayrıca, cG ve sG denklemleri için dalga cephelerinin geometrik yayılma etkisinden dolayı

kavisli olduğu sonucuna varılmıştır. Bu denklemlerdeki DSW yayılımı davranışlarını gözlemek için elde edilen animasyon videoları [77, 78] incelenebilir. Buna göre, DSW'nun ön kenarı daha yavaş hareket ederken, arka kenar Gardner denklemine göre daha hızlı hareket eder.

Yüksek boyutlu dispersif nonlinear denklemlerin DSW çözümlerinin incelenmesi ancak sayısal olarak yapılabildiğinden çok kısa zaman aralığı için ortaya konan simülasyonlarda bile en az bir hafta mertebesinde uzun bilgisayar hesaplama zamanları gerekmektedir. Bu süre indirgenmiş (1+1) boyutlu sistemlerin sayısal çözümleri için saat mertebesinde iken, WMT'nin sayısal çözümleri için dakikalar mertebesinde. Bu nedenle orijinal denklemler yerine indirgenmiş silindirik denklemlere ait WMT'nin sayısal çözümlerinin elde edilmesi, (2+1) ve (3+1) boyutlu denklemlerin sayısal çözümlerinin incelenmesi için önemli bir aşamadır. Yapılan analizler neticesinde, (1+1) boyutlu indirgenmiş denklemlerin doğrudan sayısal çözümleri ile WMT uygulanması sonucu elde edilen modülasyon denklemlerinin sayısal çözümleri karşılaştırılarak kullanılan yöntemin doğruluğu ve geçerliliği kontrol edilmiştir.



KAYNAKLAR

- [1] **Stokes, G.** (1847). On the Theory of Oscillatory Waves, *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, VIII, 197-229.
- [2] **Whitham, G. B.** (1965). Non-Linear Dispersive Waves, *Proc. R. Soc. Lond. A*, 283, 238-261.
- [3] **Whitham, G. B.** (1965). A General Approach to Linear and Non-linear Dispersive Waves Using a Lagrangian, *J. Fluid Mech.*, 22, 273–283.
- [4] **Ablowitz, M. J. ve Segur H.** (1981). *Solitons and the Inverse Scattering Transform*. SIAM Publications, Philadelphia.
- [5] **Ablowitz, M. J. ve Clarkson, P. A.** (1991). *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*. Cambridge: Cambridge Univ. Press.
- [6] **Novikov, S., Manakov, S., Pitaevskii, L. ve Zakharov, V.** (1984). *Theory of Solitons: The Inverse Scattering Method*. Plenum, NY.
- [7] **El, G. A., Gammal, A., Khamis, E. G., Kraenkel, R. A. ve Kamchatnov, A. M.** (2007). Theory of optical dispersive shock waves in photorefractive media, *Physical Review A*, 76, 053813.
- [8] **Wan, W., Jia, S. ve Fleischer, J. W.** (2007). Dispersive superfluid-like shock waves in nonlinear optics, *Nature Phys.*, 3, 46–51.
- [9] **Conforti, M. ve Trillo, S.** (2014). Radiative effects driven by shock waves in cavity-less four-wave mixing combs, *Opt. Lett.*, 39, 5760–5763.
- [10] **Conforti, M., Baronio, F. ve Trillo, S.** (2014). Resonant radiation shed by dispersive shock waves, *Phys. Rev. A*, 89, 013807.
- [11] **An, X., Marchant, T. R. ve Smyth, N. F.** (2017). Optical dispersive shock waves in defocusing colloidal media, *Physica D*, 342, 45-56.
- [12] **Marchant, T. R. ve Smyth, N. F.** (2012). Semi-analytical solutions for dispersive shock waves in colloidal media, *J. Phys. B: Atomic, Molec. Opt. Phys.*, 45, 145401.
- [13] **Christie, D.** (1989). Long nonlinear waves in the lower atmosphere, *J. Atmos. Sci.*, 46, 1462–1491.
- [14] **Clarke, R., Smith, R. ve Reid, D.** (1981). The morning glory of the Gulf of Carpentaria: an atmospheric undular bore, *Monthly Weather Rev.*, 109, 1725–1750.

- [15] **Porter, A. ve Smyth, N. F.** (2002). Modelling the Morning Glory of the Gulf of Carpentaria, *J. Fluid Mech.*, 454, 1-20.
- [16] **Smyth, N. F. ve Holloway, P.** (1988). Hydraulic jump and undular bore formation on a shelf break, *J. Phys. Ocean.*, 18, 947-962.
- [17] **Whitham, G. B.** (1974). *Linear and Nonlinear Waves*. New York: John Wiley & Sons.
- [18] **Kivshar, Y. S. ve Agrawal, G. P.** (2003). *Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals*. Academic Press, San Diego.
- [19] **Marchant, T. R. ve Smyth, N. F.** (2012). Approximate techniques for dispersive shock waves in nonlinear media, *Journal of Nonlinear Optical Physics and Materials*, 21 (3), 1250035-1-1250035-18.
- [20] **El, G. A., Gurevich, A. V., Khodorovskii, V. V. ve Krylov, A. L.** (1993). Modulational instability and formation of a nonlinear oscillatory structure in a "focusing" medium, *Phys. Lett. A*, 177, 357-361.
- [21] **Moiseev, S. ve Sagdeev, R.** (1963). Collisionless shock waves in a plasma in a weak magnetic field, *J. Nucl. Energy, Part C Plasma Phys.*, 5 (1), 43.
- [22] **Gurevich, A. ve Pitaevskii, L.** (1974). Nonstationary structure of a collisionless shock wave. *Sov. Phys. JETP*, 38, 291.
- [23] **Driscoll, C. F. ve O'Neil, T. M.** (1976). Modulational Instability of Cnoidal Wave Solutions of the Modified Korteweg-de Vries Equation, *Journal of Mathematical Phys.*, 17, 1196–1200.
- [24] **Lax, P. D. ve Levermore, C. D.** (1983). The small dispersion limit of the Korteweg-de Vries equation. I, *Commun. Pure Appl. Math.* 36 (3), 253–290.
- [25] **Lax, P. D. ve Levermore, C. D.** (1983). The small dispersion limit of the Korteweg-de Vries equation. II, *Commun. Pure Appl. Math.* 36 (5), 571–593.
- [26] **Lax, P. D. ve Levermore, C. D.** (1983). The small dispersion limit of the Korteweg-de Vries equation. III, *Commun. Pure Appl. Math.* 36 (6), 809–829.
- [27] **Flaschka, H., Forest, M. ve McLaughlin, D.** (1980). Multiphase averaging and the inverse spectral solution of the Korteweg-de Vries equation, *Commun. Pure Appl. Math.* 33 (6), 739–784.
- [28] **Gurevich, A. ve Krylov, A.L.** (1987). Dissipationless shock waves in media with positive dispersion, *Sov. Phys. JETP*, 65, 944–953.
- [29] **El, G. A., Geogjaev, V. V., Gurevich, A. V. ve Krylov, A. L.** (1995). Decay of an initial discontinuity in the defocusing NLS hydrodynamics, *Physica D*, 87, 186–192.

- [30] **Matsuno, Y.** (1998). The small dispersion limit of the Benjamin-Ono equation and the evolution of a step initial condition, *J. Phys. Soc. Jpn.*, 67, 1814.
- [31] **Matsuno, Y.** (1998). Nonlinear Modulation of Periodic Waves in the Small Dispersion Limit of the Benjamin–Ono Equation, *Phys. Rev. E*, 58 (6), 7934–7939.
- [32] **Gurevich, A. V. ve Pitaevskii, L. P.** (1987). Averaged Description of Waves in the Korteweg de Vries-Burgers Equation, *Sov. Phys. JETP*, 66, 490.
- [33] **Kamchatnov, A. M.** (2004). On Whitham Theory for Perturbed Integrable Equations, *Physica D*, 188, 247-261.
- [34] **El, G. A., Grimshaw, R. H. J. ve Kamchatnov, A. M.** (2005). Analytic Model for a Weakly Dissipative Shallow-Water Undular Bore, *Chaos*, 15, 037102.
- [35] **Miura, R. M., Gardner, C. S. ve Kruskal, M. D.** (1968). Korteweg–de Vries and Generalizations II. Existence of Conservation Laws and Constants of Motion, *J. Math. Phys.*, 9, 1204-1209.
- [36] **Watanabe, S.** (1984). Ion Acoustic Soliton in Plasma with Negative Ion, *J. Phys. Soc. Japan*, 53, 950-956.
- [37] **Ruderman, M. S., Talipova, T. ve Pelinovsky, E.** (2008). Dynamics of Modulationally Unstable ion-acoustic Wavepackets in Plasmas with Negative ions, *J. Plasma Phys.*, 74, 639-656.
- [38] **Grimshaw, R.** (2002). *Environmental Stratified Flows*, Kluwer Academic Publishers, USA.
- [39] **Demler, E. ve Maltsev, A.** (2011). Semiclassical Solitons in Strongly Correlated Systems of Ultracold Bosonic Atoms in Optical Lattices, *Annals of Physics*, 326, 1775-1805.
- [40] **Kamchatnov, A. M., Kuo, Y.-H., Lin, T.-C., Horng, T.-L., Gou, S.-C., Clift, R., El, G. A. ve Grimshaw, R. H. J.** (2012). Undular Bore Theory for the Gardner Equation, *Phys. Rev. E*, 86, 036605.
- [41] **Hofer, M. A., Ablowitz, M. J., Coddington, I., Cornell, E. A., Engels, P. ve Schweikhard V.** (2006). Dispersive and classical shock waves in Bose-Einstein condensates and gas dynamics. *Phys. Rev. A*, 74, 023623.
- [42] **Forest, M. G. ve Lee, J. E.** (1986). *Geometry and Modulation Theory for the Periodic Nonlinear Schrodinger Equation in Oscillation Theory, Computation and Methods of Compensated Compactness*, Springer, New York.
- [43] **Abenda, S. ve Grava, T.** (2005). Modulation of Camassa–Holm Equation and Reciprocal Transformations, *Annales de L' Institut Fourier*, 55.
- [44] **Ablowitz, M. J., Demirci, A. ve Ma, Y. P.** (2016). Dispersive Shock Waves in Kadomtsev-Petviashvili and Two-dimensional Benjamin-Ono Equations, *Phys. D.*, 333, 84-98.

- [45] **Ablowitz, M. J., Biondini, G. ve Wang, Q.** (2017). Whitham Modulation Theory for the Two dimensional Benjamin-Ono equation, *Physical Review E*, 96, 032225.
- [46] **Whitfield, A. J. ve Johnson, E. R.** (2017). Whitham Modulation Theory for the Ostrovsky Equation, *Proc. R. Soc. A*, 473, 20160709.
- [47] **El, G. A., Grimshaw, R. H. J. ve Pavlov, M. V.** (2001). Integrable Shallow-Water Equations and Undular Bores, *Stud. Appl. Math.*, 106, 157.
- [48] **El, G. A., Grimshaw, R. H. J. ve Kamchatnov, A. M.** (2005). Wave Breaking and the Generation of Undular Bores in an Integrable Shallow Water System, *Stud. Appl. Math.*, 114, 395-411.
- [49] **Kamchatnov, A. M.** (2015). Whitham Theory for Perturbed Korteweg-de Vries Equation, *Physica D*, 333, 99-106.
- [50] **Ablowitz, M. J., Cole, J. T. ve Rumanov, I.** (2019). On The Whitham System For The Radial Schrödinger Equation, *Studied in Applied Mathematics*, 142 (3), 269-313.
- [51] **Ablowitz, M. J., Biondini, G. ve Wang, Q.** (2017). Whitham Modulation Theory for the Kadomtsev-Petviashvili equation, *Proc. Roy. Soc. A*, 473.
- [52] **Luke, J. C.** (1966). A Perturbation Method for Nonlinear Dispersive Wave Problems, *Proc. R. Soc.*, 292, 403-412.
- [53] **Ablowitz, M. J., Biondini, G. ve Rumanov, I.** (2017). Whitham Modulation Theory for the (2+1) dimensional equations of Kadomtsev-Petviashvili type, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 51 (21).
- [54] **Aslanova, G., Ahmetolan, S. ve Demirci, A.** (2020). Nonlinear modulation of periodic waves in the cylindrical Gardner equation, *Physical Review E*, 102, 052215.
- [55] **Demirci, A.** (2020). Dispersive shock waves in three dimensional Benjamin-Ono equation, *Wave Motion*, 94, 102502.
- [56] **Shampine, L. F.** (2005). Solving hyperbolic PDEs in Matlab, *Appl. Numer. Anal. Comput. Math.*, 2 (3), 346-358.
- [57] **Byrd, P. F. ve Friedman, M. D.** (1971). *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists*, Springer-Verlag, Berlin.
- [58] **El, G. A., Hofer, M. A. ve Shearer, M.** (2016). Expansion shock waves in regularized shallow-water theory, *Proc. Math. Phys. Eng. Sci.*, 472 (2189).
- [59] **Segur, H. ve Finkel, A.** (1985). An analytical model of periodic waves in shallow water, *Stud. Appl. Math.*, 73, 183-220.
- [60] **Hammack, J., Scheffner, N. ve Segur H.** (1989). Two-dimensional periodic waves in shallow water, *J. Fluid Mech.*, 209, 567-589.

- [61] **Hammack, J., McCallister, D., Scheffner, N. ve Segur, H.** (1995). Two-dimensional periodic waves in shallow water. II Asymmetric waves, *J. Fluid Mech.*, 285, 95-122.
- [62] **Infeld, E. ve Rowlands, G.** (2001). *Nonlinear waves, solitons and chaos*. Cambridge University Press.
- [63] **Zakharov, V. E. ve Shabat, A. B.** (1974). A scheme for integrating the nonlinear equations of mathematical physics by the method of the inverse scattering problem, *Func. Anal. Appl.*, 8, 226-235.
- [64] **Stepanyants, Y. A., Ten, I. K. ve Tomita, H.** (2006). Lump Solutions of 2D Generalized Gardner Equation, In Luo, A. C. J., Dai, L. ve Hamidzadeh, H. R. (eds.), *Nonlinear Science and Complexity* (World Scientific, Singapore, 2006), pp. 264–271.
- [65] **Ablowitz, M. J., Baldwin, D. E.** (2013). Dispersive shock wave interactions and asymptotics, *Phys. Rev. E*, 87, 022906.
- [66] **Kassam, A. K. ve Trefethen, L. N.** (2005). Fourth-order time stepping for stiff PDEs, *J. Sci. Comput.* 26, (4), 1214-1233.
- [67] **Klein, C.** (2008). Fourth Order Time-Stepping for Low Dispersion Korteweg-de Vries and Nonlinear Schrödinger Equations, *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, 29, 116–135.
- [68] **Klein, C. ve Roidot, K.** (2011). Fourth Order Time-Stepping for Kadomtsev–Petviashvili and Davey–Stewartson Equations, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 33 (6), 3333–3356.
- [69] **Klein, C. ve Peter, R.** (2014). Numerical study of blow-up in solutions to generalized Kadomtsev–Petviashvili equations, *Discrete and Continuous Dynamical Systems — B*, 19, 1689.
- [70] **Klein, C. ve Saut, J.-C.** (2012). Numerical Study of Blow up and Stability of Solutions of Generalized Kadomtsev–Petviashvili Equations, *Journal of Nonlinear Science*, 22 (5), 763–811.
- [71] **Klein, C. ve Roidot, K.** (2013). Numerical study of shock formation in the dispersionless Kadomtsev–Petviashvili equation and dispersive regularizations, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 265, 1–25.
- [72] **Klein, C., Sparber, C. ve Markowich, P.** (2007). Numerical Study of Oscillatory Regimes in the Kadomtsev–Petviashvili Equation, *Journal of Nonlinear Science*, 17 (5), 429–470.
- [73] **Chehab, J.-P., Garnier, P. ve Mammeri, Y.** (2016). Numerical solution of the generalized Kadomtsev–Petviashvili equations with compact finite difference schemes, *ArXiv e-prints*: 1605.03213.
- [74] **Frauenhofer, J. ve Klein, C.** (2006). Hyperelliptic Theta-Functions and Spectral Methods: KdV and KP Solutions, *Letters in Mathematical Physics*, 76 (2), 249–267.

- [75] **Engquist, B., Lötstedt, P. ve Sjögreen, B.** (1989). Nonlinear filters for efficient shock computation, *Math. Comp.*, 52, 509-537.
- [76] **Cox, S. M. ve Matthews, P. C.** (2002). Exponential time differencing for stiff systems, *Journal of Computational Physics*, 176 (2), 430-455.
- [77] **Dispersive Shock Waves in the Gardner and Cylindrical Gardner Equations.** (2020). Erişim tarihi 07.06.2021, <http://www.youtube.com/watch?v=NO3DH8Sb41U>
- [78] **Dispersive shock waves in the Gardner and spherical Gardner equations.** (2021). Erişim tarihi 05.06.2021, <https://youtu.be/nD2m0135ClS>



EKLER

EK A: Eliptik İntegraller ve Eliptik Fonksiyonlar

EK B: Modülasyon Denklemlerinde Tanımlanan Katsayılar

EK C: Modifiye ETDRK4 Metodu





EK A: Eliptik İntegraller ve Eliptik Fonksiyonlar

Bu bölüm, tez içerisinde kullanılan Legendre eliptik integralleri ve Jacobi eliptik fonksiyonları ile ilgilidir. Burada incelenecek olan Legendre eliptik integrallerinin birinci, ikinci ve üçüncü türden olmak üzere üç temel formu vardır. En genel haliyle, eliptik integraller, integral sınırlarının $0 \leq \sin\phi \leq 1$ veya $0 \leq \phi \leq \pi/2$ arasında değiştiği, tam olmayan (incomplete) integraller olarak adlandırılan aşağıdaki (A.1), (A.2), (A.4) ve (A.6) formülleriyle gösterilir.

a) Birinci türden eliptik integral

$$F(\sin\phi, m) = \int_0^{\sin\phi} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-m^2t^2)}}, \quad 0 \leq m^2 \leq 1, \quad 0 \leq \sin\phi \leq 1. \quad (\text{A.1})$$

Burada, m eliptik integralin modülünü ve ϕ ise genlik açısını göstermektedir. (A.1)'de $t = \sin\theta$ alınırsa,

$$F(\phi, m) = \int_0^{\phi} \frac{d\theta}{\sqrt{(1-m^2\sin^2\theta)}}, \quad 0 \leq m^2 < 1, \quad 0 \leq \phi < \pi/2 \quad (\text{A.2})$$

elde edilir.

Tam eliptik integral $\phi = \pi/2$ alınmasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$F(\phi = \frac{\pi}{2}, m) = F(\sin\phi = 1, m) = K(m) = K. \quad (\text{A.3})$$

b) İkinci türden eliptik integral

$$E(\phi, m) = \int_0^{\phi} \sqrt{1-m^2\sin^2\theta} d\theta, \quad 0 \leq m^2 \leq 1, \quad 0 \leq \phi \leq \pi/2. \quad (\text{A.4})$$

İkinci türden tam eliptik integral $\phi = \pi/2$ alınmasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$E(\phi = \frac{\pi}{2}, m) = E(\sin\phi = 1, m) = E(m) = E. \quad (\text{A.5})$$

c) Üçüncü türden eliptik integral

$$\begin{aligned} \Pi(\phi, \alpha^2, m) &= \int_0^{\phi} \frac{d\theta}{(1-\alpha^2\sin^2\theta)\sqrt{(1-m^2\sin^2\theta)}} \\ &= \int_0^{v_1} \frac{du}{1-\alpha^2\text{sn}^2u} = \Pi(v_1, \alpha^2), \\ &0 \leq m^2 \leq 1, \quad 0 \leq \phi \leq \pi/2, \quad \sin\phi = \text{sn } v_1, \quad \alpha^2 \neq 1 \text{ veya } m^2 \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$\phi = \pi/2$ alınmasıyla üçüncü türden tam eliptik integral aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\Pi(\pi/2, \alpha^2, m) = \Pi(\alpha^2, m) = \int_0^{K(m)} \frac{du}{(1-\alpha^2\text{sn}^2u)}, \quad \alpha^2 \neq 1. \quad (\text{A.7})$$

Eliptik İntegrallerin Özel Değerleri

$$E(0, m) = 0, \quad (\text{A.8})$$

$$E(\pi/2, 1) = E(1) = 1, \quad (\text{A.9})$$

$$F(0, m) = 0, \quad (\text{A.10})$$

$$F(\pi/2, 1) = K(1) = \infty, \quad (\text{A.11})$$

$$\Pi(0, \alpha^2, m) = 0, \quad (\text{A.12})$$

$$\Pi(\alpha^2 = n, m) = \frac{\pi}{2}, \quad n = 0, \quad m = 0 \quad \text{iken.} \quad (\text{A.13})$$

$$\Pi(\pi/2, \alpha^2, 1) = \Pi(\alpha^2, 1) = \infty, \quad (\text{A.14})$$

$$\Pi(\pi/2, \alpha^2, 0) = \frac{\pi}{2\sqrt{1-\alpha^2}}, \quad (\text{A.15})$$

$$\Pi(\phi, 0, m) = F(\phi, m), \quad (\text{A.16})$$

$$F(\pi/2, 0) = K(0) = \pi/2, \quad (\text{A.17})$$

$$E(\pi/2, 0) = E(0) = \pi/2, \quad (\text{A.18})$$

$$E(\phi, 1) = \sin\phi, \quad (\text{A.19})$$

$$F(\phi, 1) = \ln(\tan\phi + \sec\phi). \quad (\text{A.20})$$

Eliptik İntegrallerin Türev Formülleri

$$\frac{dK(m)}{dm} = \frac{E(m) - (1-m^2)K(m)}{m(1-m^2)}, \quad (\text{A.21})$$

$$\frac{dE(m)}{dm} = \frac{E(m) - K(m)}{m}, \quad (\text{A.22})$$

$$\frac{d\Pi(\phi, \alpha^2 = n, m)}{dm} = \frac{m}{(1-m^2)(m^2-n)} \left[E(\phi, m) - (1-m^2)\Pi(\phi, n, m) - \frac{m^2 \sin\phi \cos\phi}{\sqrt{1-m^2 \sin^2\phi}} \right], \quad (\text{A.23})$$

$$\frac{d\Pi(u, n, m)}{dn} = \frac{1}{2n(1-n)(n-m^2)} \left[nE(m) + (m^2-n)u + (n^2-m^2)\Pi(u, n, m) - \frac{\alpha^4 sn u cn u dn u}{(1-\alpha^2 sn^2 u)} \right]. \quad (\text{A.24})$$

Eliptik İntegrallerin Limit Değerleri

$$\lim_{m \rightarrow 1} \frac{K(m)}{E(m) - K(m)} = -1 \quad (\text{A.25})$$

$$\lim_{m \rightarrow 1} \frac{E(m)}{E(m) - K(m)} = 0 \quad (\text{A.26})$$

$$\lim_{m \rightarrow 1} \frac{\Pi(\alpha^2, m)}{E(m) - K(m)} = \frac{1}{\alpha^2 - 1} \quad (\text{A.27})$$

$$\lim_{m \rightarrow 1} \frac{K(m)}{E(m)} = \infty \quad (\text{A.28})$$

$$\lim_{m \rightarrow 1} \frac{\Pi(\alpha^2, m)}{E(m)} = \infty \quad (\text{A.29})$$

$$\lim_{m \rightarrow 0} \frac{\Pi(\alpha^2, m)}{K(m)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \quad (\text{A.30})$$

$$\lim_{m \rightarrow 0} \frac{E(m)}{\Pi(\alpha^2, m)} = \sqrt{1 - \alpha^2}. \quad (\text{A.31})$$

Jacobi Eliptik Fonksiyonları

Jacobi eliptik fonksiyonlarının üç standart formu $sn(u, m)$, $cn(u, m)$ ve $dn(u, m)$ olarak gösterilir ve sırasıyla sinüs, kosinüs ve delta genlik eliptik fonksiyonları olarak adlandırılır. Bu fonksiyonlar, birinci türdeki eliptik integralin tersiyle elde edilir. Yani,

$$u = F(\phi, m) = \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{(1 - m^2 \sin^2 \theta)}}, \quad 0 \leq m^2 < 1, \quad 0 \leq \phi < \pi/2$$

olmak üzere

$$\phi = F^{-1}(u, m) = am(u, m) \quad (\text{A.32})$$

tersinin tanımlanmasıyla

$$\sin \phi = \sin(am(u, m)) = sn(u, m), \quad (\text{A.33})$$

$$\cos \phi = \cos(am(u, m)) = cn(u, m), \quad (\text{A.34})$$

$$\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \phi} = \sqrt{1 - m^2 \sin^2(am(u, m))} = dn(u, m) \quad (\text{A.35})$$

elde edilir. Modülün vurgulanması gerekmediği durumlarda kısaca $sn u$, $cn u$ ve $dn u$ gösterimi kullanılır.

Eliptik Fonksiyonların Özel Değerleri

$$\begin{aligned} sn(u, 0) &= \sin u, \\ cn(u, 0) &= \cos u, \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

$$dn(u, 0) = 1,$$

$$sn^2 u + cn^2 u = 1, \quad (\text{A.37})$$

$$\begin{aligned} am(-u) &= -am u, \\ sn(-u) &= -sn u, \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

$$cn(-u) = cn u,$$

$$\begin{aligned} am 0 &= 0, \\ sn 0 &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

$$cn 0 = 1,$$

$$\begin{aligned} am K &= \pi/2, \\ sn K &= 1, \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

$$cn K = 0.$$

Cebirsel İntegrandların Jacobi Eliptik Fonksiyonlarına İndirgenmesi

Bu kısımda, Bölüm 2.2 ve Bölüm 2.3’de yapılan hesaplamalarda kullanılan formüller verilmiştir [57].

(2.10) *çözümünün yazılmasında kullanılan formüller:*

$\sqrt{\alpha - u'}$, $\sqrt{u' - \beta}$, $\sqrt{u' - \gamma}$, ifadelerini içeren (2.9) denkleminde $\gamma < \beta < \alpha$ olmak üzere

$$sn^2 t = \frac{\alpha - u'}{\alpha - \beta}, \quad m^2 = \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \gamma}, \quad g = \frac{2}{\sqrt{\alpha - \gamma}}$$

$$\phi = am v_1 = \sin^{-1} \sqrt{\frac{\alpha - u}{\alpha - \beta}}, \quad sn v_1 = \sin \phi$$

kabul edilerek

$$\int_u^\alpha \frac{du'}{\sqrt{(\alpha - u')(u' - \beta)(u' - \gamma)}} = g \int_0^{v_1} du = g v_1 \quad (A.41)$$

$$= g sn^{-1}(\sin \phi, m) = g F(\phi, m)$$

elde edilir.

(2.32) *çözümünün yazılmasında kullanılan formüller:*

$\sqrt{u' - u_1}$, $\sqrt{u' - u_2}$, $\sqrt{u_3 - u'}$, $\sqrt{u_4 - u'}$ ifadelerini içeren (2.31) denkleminde $u_1 < u_2 < u_3 < u_4$ olmak üzere

$$sn^2 t = \frac{(u_3 - u_1)(u' - u_2)}{(u_3 - u_2)(u' - u_1)}, \quad m^2 = \frac{(u_3 - u_2)(u_4 - u_1)}{(u_4 - u_2)(u_3 - u_1)}, \quad g = \frac{2}{\sqrt{(u_4 - u_2)(u_3 - u_1)}}$$

$$\phi = am v_1 = \sin^{-1} \sqrt{\frac{(u_3 - u_1)(u' - u_2)}{(u_3 - u_2)(u' - u_1)}}, \quad sn v_1 = \sin \phi$$

kabul edilerek

$$\int_{u_2}^u \frac{du'}{\sqrt{(u' - u_1)(u' - u_2)(u_3 - u')(u_4 - u')}} = g \int_0^{v_1} du = g v_1 \quad (A.42)$$

$$= g sn^{-1}(\sin \phi, m) = g F(\phi, m)$$

elde edilir.

Yineleme Bağlıları

$$V_0 = \int du = u = F(\phi, m), \quad (A.43)$$

$$V_1 = \int \frac{du}{1 - \alpha^2 sn^2 u} = \Pi(\phi, \alpha^2, m), \quad (A.44)$$

$$V_2 = \int \frac{du}{(1 - \alpha^2 sn^2 u)^2} = \frac{1}{2(\alpha^2 - 1)(m^2 - \alpha^2)} \left[\alpha^2 E(u) + (m^2 - \alpha^2)u - \frac{\alpha^4 sn u cn u dn u}{1 - \alpha^2 sn^2 u} \right. \\ \left. + (2\alpha^2 m^2 + 2\alpha^2 - \alpha^4 - 3m^2)\Pi(\phi, \alpha^2, m) \right], \quad (A.45)$$

$$V_{i+3} = \frac{1}{2(i+2)(1-\alpha^2)(m^2-\alpha^2)} \left[(2i+1)m^2V_i + 2(i+1)(\alpha^2m^2 + \alpha^2 - 3m^2)V_{i+1} \right. \\ \left. + (2i+3)(\alpha^4 - 2\alpha^2m^2 - 2\alpha^2 + 3m^2)V_{i+2} \right. \\ \left. + \frac{\alpha^4 sn u cn u dn u}{(1-\alpha^2 sn^2 u)^{i+2}} \right]. \quad (\text{A.46})$$

$$X_0 = \int du = u = F(\phi, m), \quad (\text{A.47})$$

$$X_1 = \int \frac{cn^2 u du}{1-\alpha^2 sn^2 u} = \frac{1}{\alpha^2} \left[u + (\alpha^2 - 1)\Pi(\phi, \alpha^2, m) \right], \quad (\text{A.48})$$

$$X_2 = \int \frac{cn^4 u du}{(1-\alpha^2 sn^2 u)^2} = \frac{1}{\alpha^4} \left[u + 2(\alpha^2 - 1)V_1 + (\alpha^2 - 1)^2 V_2 \right], \quad (\text{A.49})$$

$$X_3 = \int \frac{cn^6 u du}{(1-\alpha^2 sn^2 u)^3} = \frac{1}{\alpha^6} \left[(\alpha^2 - 1)^3 V_3 + 3(\alpha^2 - 1)^2 V_2 + 3(\alpha^2 - 1)V_1 + u \right], \quad (\text{A.50})$$

$$X_m = \int \frac{cn^{2m} u du}{(1-\alpha^2 sn^2 u)^m} = \frac{1}{\alpha^{2m}} \sum_{j=0}^m (\alpha^2 - 1)^j \frac{m!}{j!(m-j)!} V_j. \quad (\text{A.51})$$

Ayrıca,

$$\int \frac{sn^2 u cn^2 u dn^2 u}{(1-\alpha^2 sn^2 u)^4} du = \frac{1}{\alpha^6} \left[-m^2 \Pi(u, \alpha^2) + (3m^2 - \alpha^2 m^2 - \alpha^2) V_2 \right. \\ \left. + (2\alpha^2 m^2 + 2\alpha^2 - 3m^2 - \alpha^4) V_3 + (\alpha^2 - 1)(\alpha^2 - m^2) V_4 \right] \quad (\text{A.52})$$

$$\frac{\partial}{\partial u}(sn u) = cn u dn u \quad (\text{A.53})$$

formülleri bilinmektedir.



EK B: Modülasyon Denklemlerinde Tanımlanan Katsayılar

Bu bölümde, (2.75) denklemindeki A, B matrisleri ile C vektörünün açık ifadeleri verilecektir. Buna göre,

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix} \quad \text{ve}$$

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

olmak üzere işlemlerde kolaylık ve sadelik açısından

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 - 4r_1, \\ S_2 &= 1 - 4r_2, \\ S_3 &= 1 - 4r_3 \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

tanımlamaları yapılmıştır. Ayrıca, katsayılardaki E ve K , eliptik integralleri ifade eden $E(m)$ ve $K(m)$ 'yi göstermektedir.

$$Ar_t + Br_\eta + C = 0$$

denklemindeki katsayılar aşağıda verilmektedir:

$$A_{11} = \frac{\sqrt{S_1 - S_3}(E - K)}{2(S_1 - S_2)K^2}, \quad (\text{B.2})$$

$$A_{12} = \frac{\sqrt{S_1 - S_3}((S_3 - S_1)E + (S_2 - S_3)K)}{2(S_1 - S_2)(S_2 - S_3)K^2}, \quad (\text{B.3})$$

$$A_{13} = \frac{\sqrt{S_1 - S_3}E}{2(S_2 - S_3)K^2}, \quad (\text{B.4})$$

$$A_{21} = \frac{\left(-2\sqrt{S_1}(\sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})\Pi(\alpha^2, m) + (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_3})K\right)(E - K)}{\sqrt{S_1}(S_1 - S_2)K^2}, \quad (\text{B.5})$$

$$A_{22} = \frac{\left(-2\sqrt{S_2}\Pi(\alpha^2, m) + (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})K\right)\left((S_3 - S_1)E + (S_2 - S_3)K\right)}{(S_1 - S_2)\sqrt{S_2}(\sqrt{S_2} - \sqrt{S_3})K^2}, \quad (\text{B.6})$$

$$A_{23} = \frac{\left(-2\sqrt{S_3}\Pi(\alpha^2, m) + (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_3})K\right)E}{\sqrt{S_3}(\sqrt{S_2} - \sqrt{S_3})K^2}, \quad (\text{B.7})$$

$$A_{31} = \frac{(E-K)}{\sqrt{S_1}(S_2-S_1)K^2} \left[\sqrt{S_1} \left((S_1-S_3)E + 2(\sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})\Pi(\alpha^2, m) \right) - \left(S_1 + \sqrt{S_2} - \sqrt{S_1}(-1 + \sqrt{S_3}) \right) (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_3})K \right], \quad (\text{B.8})$$

$$A_{32} = \frac{((S_3-S_1)E + (S_2-S_3)K)}{\sqrt{S_2}(S_1-S_2)(S_2-S_3)K^2} \left(\sqrt{S_2}(S_3-S_1)E + (\sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}) \right. \\ \left. \times \left[-2\sqrt{S_2} \Pi(\alpha^2, m) + \left(\sqrt{S_1} + S_2 - \sqrt{S_2}(-1 + \sqrt{S_3}) \right) K \right] \right), \quad (\text{B.9})$$

$$A_{33} = \frac{E \left(\sqrt{S_3}(S_3-S_1)E - (\sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}) \left[2\sqrt{S_3} \Pi(\alpha^2, m) - (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_3})K \right] \right)}{\sqrt{S_3}(S_2-S_3)K^2}, \quad (\text{B.10})$$

$$B_{11} = -\frac{\sqrt{S_1-S_3} \left((-3+S_1+S_2+S_3)E + (3-3S_1+S_2-S_3)K \right)}{4(S_1-S_2)K^2}, \quad (\text{B.11})$$

$$B_{12} = \frac{\sqrt{S_1-S_3} \left((S_1-S_3)(-3+S_1+S_2+S_3)E + (S_3-S_2)(-3-S_1+3S_2+S_3)K \right)}{4(S_1-S_2)(S_2-S_3)K^2}, \quad (\text{B.12})$$

$$B_{13} = \frac{\sqrt{S_1-S_3} \left((-3+S_1+S_2+S_3)E + 2(-S_2+S_3)K \right)}{4(-S_2+S_3)K^2}, \quad (\text{B.13})$$

$$B_{21} = \frac{\left(-2\sqrt{S_1}(\sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}) \Pi(\alpha^2, m) + (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_3})K \right)}{2\sqrt{S_1}(S_2-S_1)K^2} \\ \times \left((-3+S_1+S_2+S_3)E + (3-3S_1+S_2-S_3)K \right), \quad (\text{B.14})$$

$$B_{22} = \frac{\left((S_1-S_3)(-3+S_1+S_2+S_3)E + (S_3-S_2)(-3-S_1+3S_2+S_3)K \right)}{2\sqrt{S_2}(S_1-S_2)(\sqrt{S_2} - \sqrt{S_3})K^2} \\ \times \left(-2\sqrt{S_2} \Pi(\alpha^2, m) + (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})K \right), \quad (\text{B.15})$$

$$B_{23} = \frac{\left(2\sqrt{S_3} \Pi(\alpha^2, m) - (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_3})K \right) \left((-3+S_1+S_2+S_3)E + 2(S_3-S_2)K \right)}{2\sqrt{S_3}(\sqrt{S_2} - \sqrt{S_3})K^2}, \quad (\text{B.16})$$

$$B_{31} = \frac{\left(\sqrt{S_1} \left[(S_3-S_1)E - 2(\sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}) \Pi(\alpha^2, m) \right] + (S_1 + \sqrt{S_2} - \sqrt{S_1}(\sqrt{S_3} - 1)) \right)}{2\sqrt{S_1}(S_1-S_2)K^2} \\ \times \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_3} \right) K \left((3-S_1-S_2-S_3)E + (-3+3S_1-S_2+S_3)K \right), \quad (\text{B.17})$$

$$\begin{aligned}
B_{32} = & - \frac{\left((S_3 - S_1)(-3 + S_1 + S_2 + S_3)E + (S_2 - S_3)(-3 - S_1 + 3S_2 + S_3)K \right)}{2\sqrt{S_2}(S_1 - S_2)(S_2 - S_3)K^2} \\
& \times \left((\sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}) \left[-2\sqrt{S_2} \Pi(\alpha^2, m) + (\sqrt{S_1} + S_2 - \sqrt{S_2}(\sqrt{S_3} - 1))K \right] \right. \\
& \left. + \sqrt{S_2}(S_3 - S_1)E \right), \tag{B.18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{33} = & \frac{\left((S_1 - S_3)\sqrt{S_3}E + (\sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}) \left[2\sqrt{S_3} \Pi(\alpha^2, m) - (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_3})K \right] \right)}{2\sqrt{S_3}(S_2 - S_3)K^2} \\
& \times \left((-3 + S_1 + S_2 + S_3)E + 2(S_3 - S_2)K \right), \tag{B.19}
\end{aligned}$$

$$C_1 = 0, \tag{B.20}$$

$$C_2 = \frac{-2(\sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}) \Pi(\alpha^2, m) + (1 + \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})K}{2(2t + t_0)K}, \tag{B.21}$$

$$\begin{aligned}
C_3 = & \frac{2(S_3 - S_1)E - 4(\sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}) \Pi(\alpha^2, m)}{2(2t + t_0)K} \\
& + \frac{(1 + 2\sqrt{S_1} + S_1 + 2\sqrt{S_2} + S_2 + 2\sqrt{S_3} - S_3)K}{2(2t + t_0)K}. \tag{B.22}
\end{aligned}$$



EK C: Modifiye ETDRK4 Metodu

Bu bölümde, tez çalışmasında kullanılan ETD şemasının genel yapısının incelenmesi için birinci mertebeden bir denklem modeli üzerinde yöntemin uygulanmasına bakılacaktır. Bunun için,

$$\frac{du}{dt} = cu + F(u, t) \quad (\text{C.1})$$

diferansiyel denklemi göz önüne alınsın. Burada, c sabit ve F nonlineer terimi göstermektedir. (C.1) denklemi e^{-ct} integrasyon çarpanı ile çarpılırsa,

$$\frac{d}{dt}(e^{-ct}u) = e^{-ct}F(u, t) \quad (\text{C.2})$$

elde edilir. Bu denklem sayısal olarak $t = t_n$ zaman adımından $t = t_n + h = t_{n+1}$ zaman adımına kadar aşağıdaki gibi integre edilir:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[\frac{d}{dt}(e^{-ct}u) \right] dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-ct}F(u, t) dt. \quad (\text{C.3})$$

Bu durumda, $u(t_n + h) = u_{n+1}$ ve $u(t_n) = u_n$ olarak tanımlanır. Buna göre, (C.3)'deki integral alınarak

$$e^{-c(t_{n+1})}u_{n+1} - e^{-c(t_n)}u_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-ct}F dt \quad (\text{C.4})$$

ifadesi yazılır.

$\tau = t - t_n$ kabulüyle (C.4) denklemi düzenlenirse,

$$u_{n+1} = e^{ch}u_n + e^{c(t_n+h)} \int_0^h e^{-c\tau} F(u(t_n + \tau), \tau + t_n) d\tau \quad (\text{C.5})$$

elde edilir. (C.5)'deki integrale yaklaşım biçimi, farklı mertebeden ETD şemalarının oluşumuna yol açar. En basit yaklaşım, F 'nin sabit alınarak $F = F_n + O(h)$ için elde edilen ETD şemasıdır. Bu şemada kullanılan formül,

$$u_{n+1} = u_n e^{ch} + F_n (e^{ch} - 1)/c \quad (\text{C.6})$$

şeklindedir. Cox ve Matthews tarafından zaman adımı için Runge Kutta metodu kullanılarak ETDRK olarak gösterilen yöntem geliştirilmiştir [76]. Bizim çalışmamızda kullandığımız yöntem mETDRK4, yani 4. mertebeden modifiye Runge-Kutta ETD şemasıdır [66].

ETD yönteminde kullanılan katsayı formülleri aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} Q &= L^{-1}(e^{Lh/2} - 1) \\ f_1 &= h^{-2}L^{-3}[-4 - Lh + e^{Lh}(4 - 3Lh + (Lh)^2)] \\ f_2 &= h^{-2}L^{-3}[4 + 2Lh + e^{Lh}(-4 + 2Lh)] \\ f_3 &= h^{-2}L^{-3}[-4 - 3Lh - (Lh)^2 + e^{Lh}(4 - Lh)]. \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Burada, L herhangi bir köşegen matrisi göstermektedir. Bu tez çalışmasındaki Gardner tipi denklemlerin sayısal çözümlerinde kullanılan dördüncü merteye Runge-Kutta (RK4) formülleri, $u' = f(t, u)$, $u(t_0) = u_0$ olarak alınan bir problem için,

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= u_n + \frac{h}{6}(a + 2b + 2c + d), \\t_{n+1} &= t_n + h\end{aligned}\tag{C.8}$$

biçimindedir. Burada, $h = \Delta t$ ve diğer katsayılar aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned}a &= f(t_n, u_n), \\b &= f(t_n + h/2, u_n + ha/2), \\c &= f(t_n + h/2, u_n + hb/2), \\d &= f(t_n + h, u_n + hc).\end{aligned}\tag{C.9}$$

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Günay ASLANOVA

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2011, Yıldız Teknik Üni., Fen-Ed. Fak., Matematik Bölümü
- **Yükseklisans** : 2014, Yıldız Teknik Üni., Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı

DOKTORA TEZİNDEN TÜRETİLEN YAYINLAR VE SUNUMLAR:

- **Aslanova, G.**, Ahmetolan, S., Demirci, A. (2020). Nonlinear modulation of periodic waves in the cylindrical Gardner equation. *Physical Review E*, 102, 052215.
- **Aslanova, G.**, Demirci, A., Ahmetolan, S. (2021). Modulated periodic wavetrains of the spherical Gardner equation. *Wave Motion* (Submitted).
- **Aslanova, G.**, Ahmetolan, S., Demirci A. (2018). Whitham Modulation Theory for the cylindrical Gardner equation, *International Conference on Applied Mathematics, Modeling and Life Sciences (ICAMLS 2018)*, İstanbul, 3-5 Ekim 2018.
- Demirci, A., **Aslanova, G.**, Ahmetolan, S. (2018). Silindirik Gardner Denklemi için Whitham Modülasyon Denklemleri ve Sayısal Çözümleri, *Ulusal Matematik Sempozyumu (UMS 2018)*, 31. Ulusal Matematik Sempozyumu, Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi, 12-15 Eylül 2018.

PROJE BİLGİSİ

- İTÜ Bilimsel Araştırma Projesi
Proje Başlığı: Bazı Silindirik Nonlineer Dispersif Denklemlerin Dispersif Şok Dalga Çözümleri
Proje Türü: Genel Araştırma Projesi
Proje Tarihi: 19.06.2018-19.12.2019