

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

DİSPERSİF ŞOK DALGALARININ WHITHAM TEORİSİ

DOKTORA TEZİ

Neşe ÖZDEMİR

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Programı

OCAK 2024

DİSPERSİF ŞOK DALGALARININ WHITHAM TEORİSİ

DOKTORA TEZİ

**Neşe ÖZDEMİR
(509152205)**

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Semra AHMETOLAN

Eş Danışman: Doç. Dr. Ali DEMİRCİ

OCAK 2024

ISTANBUL TECHNICAL UNIVERSITY ★ GRADUATE SCHOOL

WHITHAM THEORY FOR DISPERSIVE SHOCK WAVES

Ph.D. THESIS

**Neşe ÖZDEMİR
(509152205)**

Department of Mathematics Engineering

Mathematics Engineering Programme

**Advisor: Prof. Dr. Semra AHMETOLAN
Co Advisor: Assoc. Prof. Dr. Ali DEMİRÇİ**

JANUARY 2024

İTÜ, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü'nün 509152205 numaralı Doktora Öğrencisi Neşe ÖZDEMİR, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı "DİSPERSİF ŞOK DALGALARININ WHITHAM TEORİSİ" başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Semra AHMETOLAN**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Eş Danışman : **Doç. Dr. Ali DEMİRCİ**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Ali YAPAR**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Nalan ANTAR
İstanbul Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Nazmiye YAHNİOĞLU
Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Cüneyt UTKU
TÜBİTAK

Doç. Dr. Mehmet DÖRDÜNCÜ
Erciyes Üniversitesi

Teslim Tarihi : **13 Kasım 2023**

Savunma Tarihi : **12 Ocak 2024**





Anneme ve babama,



ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimim esnasında tanıştığım danışman hocam Prof. Dr. Semra AHMETOLAN'a en içten dileklerle teşekkürlerimi sunarım. Tanıştığım günden beri sadece akademik anlamda değil her konuda bana yol gösteren, destek olan ve ailemden birisi olarak gördüğüm danışman hocama çok teşekkür ederim.

Bu tez çalışmasını birlikte yürüttüğümüz ve karşılaştığım zorluklar karşısında desteğini eksik etmeyen, çalışmanın zenginleşmesine katkı sağlayan eş danışman hocam Doç. Dr. Ali DEMİRCİ'ye çok teşekkür ederim.

Tez izleme komitesi üyeleri Prof. Dr. Nalan ANTAR'a, Doç. Dr. Cihan BAYINDIR'a ve Doç. Dr. Cüneyt UTKU'ya çalışma raporlarında yaptıkları öneriler ve gösterdikleri destek için teşekkür ederim.

Doktora eğitimime birlikte başladığım ve karşılaştığımız tüm zorlukları birlikte aştığımız manevi desteğini hep hissettiğim arkadaşım Dr. Öğr. Üyesi Günay ASLAN'a teşekkür ederim.

Doktora eğitimim esnasında birlikte çalışma fırsatı bulduğum ve iyi ki tanışmışım dediğim arkadaşlarım Arş. Gör. Hanife Kübra KAYA ve Aybüke ŞANLİMEŞHUR'a çok teşekkür ederim. Ayrıca, burada çalışma ortamımızı bir iş gibi değil de evimiz gibi hissettiren ve ne zaman bir zorluğa düşsek bize yol gösteren değerli hocam, Işık Üniversitesi Matematik Bölüm Başkanı Prof. Dr. Banu UZUN'a teşekkür ederim.

Beni her konuda destekleyen ve arkamda duran aileme teşekkür ederim. Ne zaman bir umutsuzluğa düşsem beni yüreklendiren bana başarabileceğime inandıran sevgili annem Emine ÖZDEMİR'e, arkamda desteğini hep hissettiğim sevgili babam Mustafa ÖZDEMİR'e ve insanın hayatta bir kardeşi olmalı dediğim sevgili kardeşim Uğur ÖZDEMİR'e teşekkür ederim.

Bu tez çalışması, "TÜBİTAK-BİDEB-2211 Yurt İçi Genel Doktora Burs Programı" kapsamında TÜBİTAK ve "Lisansüstü Tezleri Destekleme Projesi" (Proje numarası: TGA-2018-41318) kapsamında İstanbul Teknik Üniversitesi tarafından desteklenmiştir. Desteklerinden dolayı TÜBİTAK'a ve İstanbul Teknik Üniversitesi'ne teşekkür ederim.

Ocak 2024

Neşe ÖZDEMİR
(Yüksek Matematikçi)

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖNSÖZ.....	ix
İÇİNDEKİLER.....	xi
KISALTMALAR.....	xiii
SEMBOLLER.....	xv
ÇİZELGE LİSTESİ.....	xvii
ŞEKİL LİSTESİ.....	xix
ÖZET.....	xxiii
SUMMARY.....	xxvii
1. GİRİŞ.....	1
2. (2+1) BOYUTLU FOCUSING MODİFİYE KADOMTSEV- PETVI- ASHVILI (mKP (f)) DENKLEMİNİN DİSPERSİF ŞOK DALGA ÇÖZÜMLERİ.....	15
2.1 Giriş.....	15
2.2 (2+1) Boyutlu mKP(f) Denklemının (1+1) Boyutlu cmKdV(f) Denklem- ine İndirgenmesi.....	15
2.3 cmKdV(f) Denklemının Whitham Modülasyon Denklemlerinin Türetilmesi.....	19
2.3.1 ε^{-1} mertebeli problemin çözümü.....	20
2.3.2 Dalgaların korunumu yasası.....	24
2.3.3 Sekülerlik koşulları.....	25
2.3.4 cmKdV(f)-Whitham sistemi.....	29
2.4 mKdV(f) ve cmKdV(f) Denklemlerinin Sayısal Çözümleri.....	30
2.4.1 mKdV(f) ve cmKdV(f) denklemlerinin asimptotik çözümü.....	31
2.4.2 mKdV(f) ve cmKdV(f) denklemlerinin doğrudan sayısal çözümü.....	35
2.4.3 mKdV(f) ve cmKdV(f) denklemlerinin doğrudan ve asimptotik çözümlerinin karşılaştırılması.....	38
2.4.3.1 ETDRK4 metodu için hata analizi.....	44
3. (3+1) BOYUTLU FOCUSING MODİFİYE KADOMTSEV- PETVI- ASHVILI (mKP(f)) DENKLEMİNİN DİSPERSİF ŞOK DALGA ÇÖZÜMLERİ.....	49
3.1 Giriş.....	49
3.2 (3+1) Boyutlu mKP(f) Denklemının (1+1) Boyutlu smKdV(f) Denklem- ine İndirgenmesi.....	49
3.3 smKdV(f) Denklemının Whitham Modülasyon Denklemlerinin Türetilmesi.....	51
3.4 mKdV(f) ve smKdV(f) Denklemlerinin Sayısal Çözümleri.....	55
3.4.1 mKdV(f) ve smKdV(f) denklemlerinin asimptotik çözümü.....	55
3.4.2 mKdV(f) ve smKdV(f) denklemlerinin doğrudan sayısal çözümü.....	60
3.4.3 mKdV(f) ve smKdV(f) denklemlerinin asimptotik çözümü ve doğrudan sayısal çözümünün karşılaştırılması.....	62
3.4.3.1 ETRK4 yöntemi için hata analizi.....	68
3.4.4 mKdV(f), cmKdV(f) ve smKdV(f) denklemlerine ait Whitham modülasyon teorisi ve doğrudan çözümlerinin karşılaştırılması.....	70
3.4.5 mKdV(f) tipindeki denklemler için Riemann problemi.....	72
4. (2+1) ve (3+1) BOYUTLU DEFOCUSING MODİFİYE KADOMTSEV- PETVIASHVILI DENKLEMİNİN (mKP(d)) DİSPERSİF ŞOK DALGA ÇÖZÜMLERİ.....	77
4.1 Giriş.....	77

4.2	(2+1) ve (3+1) Boyutlu mKP(d) Denklemlerinin İndirgenmesi ve Whitham Modülasyon Denklemlerinin Türetilmesi.....	77
4.2.1	(2+1) boyutlu mKP(d) denkleminin (1+1) boyutlu cmKdV(d) denklemine indirgenmesi ve cmKdV(d)-Whitham sisteminin türetilmesi	77
4.2.1.1	ε^{-1} mertebeli problemin çözümü.....	81
4.2.1.2	ε^0 mertebeli problemin çözümü	83
4.2.2	(3+1) boyutlu defocusing mKP denkleminin (1+1) boyutlu smKdV(d) denklemine indirgenmesi ve smKdV(d)-Whitham sisteminin türetilmesi	85
4.3	Sayısal Sonuçlar ve Tartışma	89
4.3.1	mKdV(d), cmKdV(d) ve smKdV(d) denklemlerinin doğrudan çözümü	89
4.3.2	mKdV(d), cmKdV(d) ve smKdV(d) denklemlerinin doğrudan çözümleri ile asimptotik çözümlerinin karşılaştırılması	91
4.3.3	ETRK4 yöntemi için hata analizi	103
4.3.4	mKdV(d) tipindeki denklemlerin Riemann tipi başlangıç koşulu için sınıflandırılması	106
5.	SONUÇLAR	109
	KAYNAKLAR	115
	EKLER	121
	EK A: Eliptik İntegraller ve Fonksiyonlar.....	123
	EK B : Modülasyon Denklemlerindeki Katsayı Matrisleri A ve B 'nin ve C Vektörünün Bileşenleri	129
	EK C: ETDRK4 Yöntemi.....	131
	ÖZGEÇMİŞ	133

KISALTMALAR

DSW	: Dispersif Şok Dalgası
VSW	: Viskoz Şok Dalgası
R	: Seyreltme Dalgası
CDSW-DSW	: Contact Dispersif Şok Dalgası-Dispersif Şok Dalgası
CDSW-R	: Contact Dispersif Şok Dalgası-Seyreltme Dalgası
MHV	: Seyreltme Dalgası
KdV	: Korteweg-de Vries Denklemi
mKdV(f)	: Focusing Modifiye Korteweg-de Vries Denklemi
cmKdV(f)	: Focusing Silindirik Modifiye Korteweg-de Vries Denklemi
smKdV(f)	: Focusing Küresel Modifiye Korteweg-de Vries Denklemi
mKdV(d)	: Defocusing Modifiye Korteweg-de Vries Denklemi
cmKdV(d)	: Defocusing Silindirik Modifiye Korteweg-de Vries Denklemi
smKdV(d)	: Defocusing Küresel Modifiye Korteweg-de Vries Denklemi
mKP(f)	: Focusing Modifiye Kadomtsev-Petviashvili Denklemi
mKP(d)	: Defocusing Modifiye Kadomtsev-Petviashvili Denklemi
KP	: Kadomtsev-Petviashvili Denklemi
BO	: Benjamin-Ono Denklemi
BOB	: Benjamin-Ono Burger Denklemi
mKdVB	: Modifiye Korteweg-de Vries Denklemi



SEMBOLLER

k	: Dalga sayısı
ω	: Açısal frekans
V	: Faz hızı
t	: Zaman
m	: Modül
$K(m)$: Birinci tip tam eliptik integral
$E(m)$: İkinci tip tam eliptik integral
$\Pi(n, m)$: Üçüncü tip tam eliptik integral





ÇİZELGE LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 2.1 : $t = 2.5, 5, 7.5$ ve $t = 10$ zaman değerlerinde mKdV(f) denklemi için A_{avg}, M_A ve V_{avg} değerleri.	46
Çizelge 2.2 : $t = 2.5, 5, 7.5$ ve $t = 10$ zaman değerlerinde cmKdV(f) denklemi için A_{avg}, M_A ve V_{avg} değerleri.	46
Çizelge 2.3 : mKdV(f) denklemi için elde edilen norm hata analizi.	47
Çizelge 2.4 : cmKdV(f) denklemi için elde edilen norm hata analizi.	47
Çizelge 3.1 : $t = 2.5, 5, 7.5$ ve $t = 10$ zaman değerlerinde mKdV(f) denklemi için A_{avg}, M_A ve V_{avg} değerleri.	65
Çizelge 3.2 : $t = 2.5, 5, 7.5$ ve $t = 10$ zaman değerlerinde smKdV(f) denklemi için A_{avg}, M_A ve V_{avg} değerleri.	65
Çizelge 3.3 : mKdV(f) denklemi için elde edilen hata analizi.	70
Çizelge 3.4 : smKdV(f) denklemi için elde edilen hata analizi.	70
Çizelge 3.5 : mKdV(f) denklemi için sınıflandırma.	75
Çizelge 4.1 : $t = 2.5, 5, 7.5$ ve $t = 10$ zaman değerlerinde mKdV(d) denklemi için A_{avg}, M_A ve V_{avg} değerleri.	103
Çizelge 4.2 : $t = 2.5, 5, 7.5$ ve $t = 10$ zaman değerlerinde cmKdV(d) denklemi için A_{avg}, M_A ve V_{avg} değerleri.	103
Çizelge 4.3 : $t = 2.5, 5, 7.5$ ve $t = 10$ zaman değerlerinde smKdV(d) denklemi için A_{avg}, M_A ve V_{avg} değerleri.	103
Çizelge 4.4 : mKdV(d) denklemi için elde edilen hata analizi.	104
Çizelge 4.5 : cmKdV(d) denklemi için elde edilen hata analizi.	104
Çizelge 4.6 : smKdV(d) denklemi için elde edilen hata analizi.	105



ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 1.1 : mKdV denkleminde $t = 50$ için görülen dispersif şok dalga yayılımı. .	2
Şekil 1.2 : Morning Glory dalgasının uydu görüntüsü (Morning Glory in the Gulf of Carpentaria (Australia).	2
Şekil 1.3 : Severn nehrinde görülen undular bore (İngiltere)	3
Şekil 1.4 : Princeton Üniversitesi'nde gerçekleştirilen tek boyutlu (sol panel) ve iki boyutlu (sağ panel) optik DSW'nin deneysel görüntüleri (Wan, Jia, Fleischer 2007).	3
Şekil 1.5 : JILA, Colorado Üniversitesi, Boulder'da gerçekleştirilen Bose-Einstein yoğuşması patlama dalgası probleminin deneysel absorpsiyon görüntüleri (Hoefler ve çalışma arkadaşları, 2006). Salınımlı halka yapıları DSW'lere karşılık gelmektedir.	4
Şekil 2.1 : (2.3) ile verilen parabolik cephenin doğadaki karşılığı (a) Quinque nehri (b) Alaska.	16
Şekil 2.2 : (2.34) ile verilen f_0 'ın farklı modül değerleri için grafikleri.	23
Şekil 2.3 : Riemann tipi değişkenler için $v_r = 0.5$ ve $v_l = 0.6$ seçimine karşı gelen (2.77) başlangıç koşulları ($t = 0$).	33
Şekil 2.4 : Sol panelde mKdV(f) denklemi, sağ panelde cmKdV(f) denklemi için $t = 2.5, 5, 7.5$ ve $t = 10$ 'daki Whitham sistemlerinin çözümleri. . .	34
Şekil 2.5 : (2.2) ile verilen basamak tipi başlangıç koşulunda $v_r = 0.5$ ve $v_l = 0.6$ seçilmesi ile doğrudan çözümle elde edilen mKdV(f) denkleminin $t = 10$ 'daki dispersif şok dalga yayılımı.	38
Şekil 2.6 : (2.2) ile verilen basamak tipi başlangıç koşulunda $v_r = 0.5$ ve $v_l = 0.6$ seçilmesi ile doğrudan çözümle elde edilen cmKdV(f) denkleminin $t = 10$ 'daki dispersif şok dalga yayılımı.	39
Şekil 2.7 : mKdV(f) denkleminin (2.2) ile verilen basamak tipi başlangıç koşulunda $v_r = 0.5$ ve $v_l = 0.6$ seçilmesi ile elde edilen farklı ε değerleri için doğrudan sayısal çözümleri.	39
Şekil 2.8 : cmKdV(f) denkleminin (2.2) ile verilen basamak tipi başlangıç koşulunda $v_r = 0.5$ ve $v_l = 0.6$ seçilmesi ile elde edilen farklı t_0 değerleri için doğrudan sayısal çözümleri. Çözümlerin t_0 büyüdükçe klasik mKdV(f) denkleminin çözümlerine yaklaştığı görülür.	40
Şekil 2.9 : (2.2) ile verilen basamak tipi başlangıç koşulunda $v_r = 0.5$ ve $v_l = 0.6$ seçilmesi ile doğrudan çözümle elde edilen mKdV(f) denkleminin farklı t değerleri için dispersif şok dalga yayılımı.	41
Şekil 2.10 : (2.2) ile verilen basamak tipi başlangıç koşulunda $v_r = 0.5$ ve $v_l = 0.6$ seçilmesi ile doğrudan çözümle elde edilen cmKdV(f) denkleminin farklı t değerleri için dispersif şok dalga yayılımı.	42

Şekil 2.11 :	(2.2) başlangıç koşulunda $v_r = 0.5$ ve $v_l = 0.6$ seçilmesiyle mKdV(f) denklemi için (a) $t = 2.5$, (b) $t = 5$, (c) $t = 7.5$ ve (d) $t = 10$ 'da doğrudan sayısal ve Whitham sistemleri üzerinden elde edilen asimptotik çözümlerin karşılaştırılması.	44
Şekil 2.12 :	(2.2) başlangıç koşulunda $v_r = 0.5$ ve $v_l = 0.6$ seçilmesiyle cmKdV(f) denklemi için (a) $t = 2.5$, (b) $t = 5$, (c) $t = 7.5$ ve (d) $t = 10$ 'da doğrudan sayısal ve Whitham sistemleri üzerinden elde edilen asimptotik çözümlerin karşılaştırılması.	45
Şekil 2.13 :	(a) mKdV(f), (b) cmKdV(f) denkleminin $t = 10$ 'da farklı Fourier modları (N) için L_∞ normuna göre hataların karşılaştırılması. Burada, başlangıç ön kenar ve arka kenar seviyesi (0.5,0.6) ve $\varepsilon^2 = 0.005$ olarak seçilmiştir.	47
Şekil 3.1 :	Seçilen başlangıç adım değerleri $v_l = 0.69$ ve $v_r = 0.6$ 'ya göre Riemann değişkenleri için (3.39)'de verilen başlangıç değerleri.	57
Şekil 3.2 :	mKdV(f) denklemi için (3.29) Whitham sisteminin asimptotik olarak çözülmesi sonucu elde edilen $t = 2.5, 5, 7.5, 10$ 'daki Riemann değişkenleri.	58
Şekil 3.3 :	smKdV(f) denklemi için (3.29) Whitham sisteminin asimptotik olarak çözülmesi sonucu elde edilen $t = 2.5, 5, 7.5, 10$ 'daki Riemann değişkenleri.	59
Şekil 3.4 :	Kırmızı kesikli olarak verilen çizgi, $v_l = 0.69$ ve $v_r = 0.6$ için (3.3)'de adım başlangıç değerlerini göstermektedir. Mavi eğri ise, farklı zaman değerlerinde $\varepsilon^2 = 5 \cdot 10^{-3}$ seçilmesi ile doğrudan sayısal çözümle elde edilen mKdV(f) denkleminin dispersif şok çözümünü temsil etmektedir.	62
Şekil 3.5 :	Kırmızı kesikli olarak verilen çizgi, $v_l = 0.69$ ve $v_r = 0.6$ için (3.3)'de adım başlangıç değerlerini göstermektedir. Mavi eğri ise, farklı zaman değerlerinde $\varepsilon^2 = 5 \cdot 10^{-3}$ ve $t_0 = 10$ seçilmesi ile doğrudan sayısal çözümle elde edilen smKdV(f) denkleminin dispersif şok çözümünü temsil etmektedir.	63
Şekil 3.6 :	(a) mKdV(f) (b) smKdV(f) denklemi için $t = 0$ ve $t = 10$ arasındaki doğrudan sayısal çözümlerin uzay-zaman grafikleri.	63
Şekil 3.7 :	Sol panelde mKdV(f) denklemi, sağ panelde smKdV(f) denklemi için $t = 2.5, 5, 7.5$ ve $t = 10$ 'da elde edilen doğrudan sayısal çözümlerin grafikleri.	64
Şekil 3.8 :	$\varepsilon^2 = 5 \cdot 10^{-3}$ seçilerek farklı zaman değerlerinde $v_l = 0.69$ ve $v_r = 0.6$ adım tipi başlangıç değerleri için mKdV(f) denkleminin doğrudan sayısal çözümünün ve asimptotik çözümünün (Whitham modülasyon teorisi çözümü) karşılaştırmaları.	66
Şekil 3.9 :	$\varepsilon^2 = 5 \cdot 10^{-3}$ ve $t_0 = 10$ seçilerek farklı zaman değerlerinde $v_l = 0.69$ ve $v_r = 0.6$ adım tipi başlangıç değerleri için smKdV(f) denkleminin doğrudan sayısal çözümünün ve asimptotik çözümünün (Whitham modülasyon teorisi çözümü) karşılaştırmaları.	67
Şekil 3.10 :	(a) mKdV(f), (b) smKdV(f) denkleminin $t = 10$ 'da farklı Fourier modları (N) için L_∞ normuna göre hataların karşılaştırılması. Burada, başlangıç ön kenar ve arka kenar seviyesi (0.6,0.69) ve $\varepsilon^2 = 0.005$ olarak seçilmiştir.	69

Şekil 3.11 mKdV(f), cmKdV(f) ve smKdV(f) denklemlerine ait $t = 10$ 'da ilk satırda ilgili denklemlere ait Whitham sistemleri çözümü, ikinci satırda doğrudan sayısal çözüm-asimptotik çözüm karşılaştırması ve son satırda doğrudan sayısal çözümlere ait uzay-zaman grafikleri verilmiştir.	72
Şekil 3.12 $v_l = 0.69$ ve $v_r = 0.6$ adım tipi başlangıç değerleri için $t = 10$ 'da (a) mKdV(f), (b) cmKdV(f) ve (c) smKdV(f) denkleminin doğrudan sayısal çözümleri ve uzay-zaman grafikleri.	73
Şekil 3.13 mKdV(f), cmKdV(f) ve smKdV(f) denklemlerine ait $t = 15$ için şok dalga çözümlerinin sınıflandırılması. Çözümler elde edilirken, $t_0 = 10$ ve $\varepsilon^2 = 0.005$ olarak alınmıştır. Ayrıca, oluşan şok dalga formları şekillerde etiketlenmiştir.	75
Şekil 4.1 : (4.27) ile verilen f_0 ın farklı modül değerleri için grafikleri.....	83
Şekil 4.2 : Kırmızı (kesikli) olarak verilen çizgi, $v_l = 0$ ve $v_r = 0.5$ için (4.2)'de adım başlangıç değerlerini göstermektedir. Mavi eğri ise, farklı zaman değerlerinde $\varepsilon^2 = 5.10^{-2}$ seçilmesi ile doğrudan çözümler elde edilen mKdV(d) denkleminin dispersif şok çözümünü temsil etmektedir.	91
Şekil 4.3 : Kırmızı (kesikli) olarak verilen çizgi, $v_l = 0$ ve $v_r = 0.5$ için (4.2)'de adım başlangıç değerlerini göstermektedir. Mavi eğri ise, farklı zaman değerlerinde $\varepsilon^2 = 5.10^{-2}$ seçilmesi ile doğrudan çözümler elde edilen cmKdV(d) denkleminin dispersif şok çözümünü temsil etmektedir.	92
Şekil 4.4 : Kırmızı (kesikli) olarak verilen çizgi, $v_l = 0$ ve $v_r = 0.5$ için (4.2)'de adım başlangıç değerlerini göstermektedir. Mavi eğri ise, farklı zaman değerlerinde $\varepsilon^2 = 5.10^{-2}$ seçilmesi ile doğrudan doğrudan çözümler elde edilen smKdV(d) denkleminin dispersif şok çözümünü temsil etmektedir.	93
Şekil 4.5 : (4.2) ile verilen basamak tipi başlangıç koşulunda $v_l = 0$ ve $v_r = 0.5$ için $t = 10$ zaman değerinde (a) mKdV(d) (b) cmKdV(d) (c) smKdV(d) denklemleri için doğrudan çözümlerin karşılaştırılması. ...	94
Şekil 4.6 : (4.2) basamak tipi başlangıç koşulunda $v_l = 0$ ve $v_r = 0.5$ değerleri için $t = 10$ 'da (a) mKdV(d), (b) cmKdV(d) ve (c) smKdV(d) denkleminin doğrudan sayısal çözümleri ve uzay-zaman grafikleri. ...	95
Şekil 4.7 : mKdV(d) denkleminin basamak tipi başlangıç koşulu için farklı ε değerleri için sayısal çözümleri. ε azaldıkça, salınımların dalga boyunun azaldığı görülmektedir.	96
Şekil 4.8 : cmKdV(d) denkleminin basamak tipi başlangıç koşulu için farklı t_0 değerleri için doğrudan sayısal çözümleri. Çözümlerin t_0 büyüdükçe klasik mKdV(d) denkleminin çözümlerine yaklaştığı görülür.	96
Şekil 4.9 : Riemann tipi değişkenler için $v_r = 0.5$ ve $v_l = 0$ seçimine karşı gelen (4.67) ile verilen başlangıç değerleri ($t = 0$).	98
Şekil 4.10 mKdV(d), cmKdV(d) ve smKdV(d) Whitham sistemlerinin asimptotik olarak çözülmesi sonucu elde edilen $t = 2.5, 5, 7.5, 10$ 'daki Riemann değişkenleri.	99

Şekil 4.11 $\varepsilon^2 = 5.10^{-2}$ ve $t_0 = 10$ seçilerek farklı zaman değerlerinde $v_l = 0$ ve $v_r = 0.5$ adım tipi başlangıç değerleri için mKdV(d) denkleminin (a) $t = 2.5$, (b) $t = 5$, (c) $t = 7.5$ ve (d) $t = 10$ 'da doğrudan sayısal çözümünün ve asimptotik çözümünün (Whitham modülasyon teorisi çözümü) karşılaştırmaları.	100
Şekil 4.12 $\varepsilon^2 = 5.10^{-2}$ ve $t_0 = 10$ seçilerek farklı zaman değerlerinde $v_l = 0$ ve $v_r = 0.5$ adım tipi başlangıç değerleri için cmKdV(d) denkleminin (a) $t = 2.5$, (b) $t = 5$, (c) $t = 7.5$ ve (d) $t = 10$ 'da doğrudan sayısal çözümünün ve asimptotik çözümünün (Whitham modülasyon teorisi çözümü) karşılaştırmaları.	101
Şekil 4.13 $\varepsilon^2 = 5.10^{-2}$ ve $t_0 = 10$ seçilerek farklı zaman değerlerinde $v_l = 0$ ve $v_r = 0.5$ adım tipi başlangıç değerleri için smKdV(d) denkleminin (a) $t = 2.5$, (b) $t = 5$, (c) $t = 7.5$ ve (d) $t = 10$ 'da doğrudan sayısal çözümünün ve asimptotik çözümünün (Whitham modülasyon teorisi çözümü) karşılaştırmaları.	102
Şekil 4.14 (a) mKdV(d), (b) cmKdV(d) ve (c) smKdV(d) denkleminin $t = 10$ 'da farklı Fourier modları (N) için L_∞ normuna göre hataların karşılaştırılması. Burada, başlangıç seviyesi $(0.5, 0)$ ve $\varepsilon^2 = 0.05$ olarak seçilmiştir.	105
Şekil 4.15 mKdV(d), cmKdV(d) ve smKdV(d) denklemleri için $\varepsilon^2 = 0.05$ ve farklı v_r ve v_l seçimlerine karşı gelen farklı şok dalga tipleri. Tüm grafiklerde $t = 15$ için sonuçlar verilmiştir.	108

DİSPERSİF ŞOK DALGALARININ WHITHAM TEORİSİ

ÖZET

Bu tez çalışmasında, (2+1) boyutlu focusing modifiye Kadomtsev-Petviashvili (mKP(f)) ve defocusing modifiye Kadomtsev-Petviashvili (mKP(d)) denklemleri için parabolik tipte, (3+1) boyutlu mKP(f) ve mKP(d) denklemleri için ise paraboloid tipte bir dalga cephesi boyunca uzanan basamak tipi bir başlangıç koşulu için dispersif şok dalga çözümleri (DSW) incelenmiştir. Çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

İlk bölümde, dispersif şok dalgaları ile ilgili literatür özetine yer verilmiş ve bu tez kapsamında ele alınan problemlerin kapsamından bahsedilmiştir.

İkinci bölümde, (2+1) boyutlu mKP(f) denkleminde görülen dispersif şok dalgaları üzerinde durulmuştur. İkinci bölüm beş kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda, bu bölüm kapsamında ele alınacak problem ve yapılacak olan analiz hakkında bilgi verilmiştir. İkinci kısımda, (2+1) boyutlu mKP(f) denklemi için basamak tipi başlangıç koşulu ele alınmış ve DSW'lerin parabolik bir cephe boyunca ilerlediği varsayılmıştır. Denklem benzerlik dönüşümü uygulanarak orijinal mKP denklemi (1+1) boyutlu focusing silindirik modifiye Korteweg-de Vries (cmKdV(f)) denklemine indirgenmiştir. Üçüncü kısımda, (1+1) boyutlu cmKdV(f) denkleminin Whitham modülasyon teorisi uygulanarak, dispersif şok dalga yayılımını ifade etmek için kullanılan Whitham modülasyon denklemleri elde edilmiştir. Whitham modülasyon teorisine göre, dispersif şok dalga yayılımı zamana ve konuma göre yavaş ve hızlı olmak üzere farklı ölçeklerde değişim gösteren fiziksel büyüklüklerle tanımlanmaktadır. Whitham modülasyon denklemleri adı verilen denklemler ise, bu fiziksel büyüklüklerin yavaş değişimini karakterize etmek için türetilmektedir. Öte yandan, önerilen çözüm formu sonucu elde edilen cmKdV(f) denkleminin, Whitham modülasyon denklemleri orijinal Whitham ortalama metodu yerine bir asimptotik analiz olan çoklu ölçekler metodu ile türetilmiştir. Whitham ortalama yöntemi yerine bu yöntemi kullanmamızın başlıca nedenlerinden birisi, orijinal teoride kullanılan korunum yasalarının ilgili denklem için bilinmemesidir. Ayrıca, cmKdV(f)-Whitham sisteminde silindirik terim özdeş olarak sıfır alındığında mKdV(f)- Whitham sistemine dönüştüğü gözlenmiştir. Dördüncü kısımda ise, (1+1) boyutlu cmKdV(f) denklemi ve klasik mKdV(f) denklemlerine ait Whitham modülasyon denklemlerinin sayısal çözümleri ile mKdV(f) ve cmKdV(f) denklemlerinin doğrudan sayısal çözümleri elde edilmiştir. Whitham modülasyon denklemlerinin çözümleri sayesinde DSW'lere ait yayılma zarfı, yayılma hızı ve belirli bir andaki maksimum minimum genlik büyüklükleri gibi bilgiler elde edilir. Bu nedenle, denklemlerin doğrudan çözümlerini elde etmek yeterli değildir. Daha sonra, ilgili denklemlere ait doğrudan ve Whitham sistemlerinin (asimptotik çözüm) çözümleri karşılaştırılarak yöntemin uygunluğu da gösterilmiştir. cmKdV(f)- Whitham sistemi köşegen değildir ve bu özellik

analitik çözümleri bulmayı oldukça zorlaştırmaktadır. Bu yüzden analitik çözüm yerine, Shampine tarafından geliştirilen MATLAB temelli sayısal çözümler programı kullanılmıştır. (1+1) boyutlu mKdV(f) ve cmKdV(f) denklemlerinin doğrudan sayısal çözümleri için mevcutlar içinde en etkin spektral tabanlı sayısal yöntem olarak adlandırılan ve birçok nonlinear evrim tipi diferansiyel denklemin çözümünde hızı ve doğruluğu test edilmiş, "Exponential Time Differencing Runge Kutta-4" ETDRK4 yönteminin modifiye hali kullanılmıştır. Bu kısımda, son olarak ETDRK4 yöntemi için hata analizine yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, (3+1) boyutlu mKP(f) denkleminde görülen DSW çözümleri ele alınmıştır. Üçüncü bölüm, beş kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda, bu bölüm kapsamından bahsedilmiştir. İkinci kısımda, paraboloid tipi bir dalga cephesi boyunca uzanan basamak tipi başlangıç koşulu için (3+1) boyutlu mKP(f) denklemi, uygulanan benzerlik dönüşümüyle (1+1) boyutlu focusing küresel mKdV (smKdV(f)) denkleme indirgenmiştir. Üçüncü kısımda, (1+1) boyutlu smKdV(f) denkleme ait Whitham modülasyon denklemlerini türetmek için ilk problemde kullanılan çoklu ölçekler metodu kullanılmıştır. Dördüncü kısımda ise, öncelikle mKdV(f) ve smKdV(f) denklemlerinin Whitham modülasyon denklemleri sayısal olarak çözülmüştür. Daha sonra, mKdV(f) ve smKdV(f) denklemleri ETDRK4 metodunun modifiye hali kullanılarak doğrudan çözülmüştür. Ardından, asimptotik ve doğrudan çözümler karşılaştırılarak kullanılan asimptotik yöntemin doğruluğu test edilmiştir. Bu karşılaştırma ile, Whitham teorisinin ne kadar başarılı olduğu gözlemlenmiştir. Öte yandan, daha önce de belirtildiği gibi smKdV(f)-Whitham sistemi, küresel terim özdeş olarak sıfır alındığında (yani $h_i = 0$) mKdV(f)-Whitham sistemine indirgenmektedir. Bu nedenle, bu bölümde mKdV(f) denkleminin sayısal ve asimptotik çözümlerine de yer verilerek, küresel terimin çözümleri ne ölçüde etkilediği gösterilmiştir. Ek olarak, bu kısımda orijinal denklemleri doğrudan çözmek için kullanılan ETDRK4 yöntemi için hata analizi yapılmıştır. Ayrıca, klasik mKdV(f), cmKdV(f) ve smKdV(f) denklemlerine ait sayısal çözümler için karşılaştırılma yapılmıştır. Beşinci kısımda, cmKdV(f) ve smKdV(f) denkleminin çözümlerinin sınıflandırılması için ilgili denklemlerin doğrudan sayısal çözümleri ile elde edilen sonuçlar verilmiştir. Literatür incelendiğinde klasik mKdV denklemi için farklı tipte şok dalga çözümleri için sınıflandırma yapıldığı görülmektedir. Klasik mKdV(f) denkleminde DSW çözümlerinin oluşabilmesi için gerekli olan kriterlerin yanı sıra, "Contact Dispersif Şok Dalgası" (CDSW), Seyreltme Dalgası (R) ve bu dalgaların kombinasyonu CDSW-DSW, CDSW-R şok dalga çözümleri türetildiği görülmüştür. DSW çözümünün oluşabilmesi için verilen kriterler, başlangıç koşulunda verilen parametrelere bağlıdır. mKdV(f) denkleminde oluşan şok dalga formları için verilen kriterler kullanılarak, cmKdV(f) ve smKdV(f) denklemleri için muhtemel sınıflandırma için sayısal sonuçlar elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde, (2+1) ve (3+1) mKP(d) denklemlerinde görülen DSW çözümleri için focusing denklemlere benzer bir analiz yapılmıştır. Dördüncü bölüm, üç kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda, bu bölüm kapsamında ele alınan denklemler hakkında ve yapılacak olan analiz hakkında bilgi verilmiştir. İkinci kısımda, parabolik bir dalga cephesi boyunca uzanan basamak tipi bir başlangıç koşulu için (2+1) boyutlu defocusing mKP (mKP(d)) denklemi uygun bir çözüm formuyla (1+1) boyutlu defocusing silindirik mKdV (cmKdV(d)) denkleme indirgenmiştir. Daha sonra,

(1+1) boyutlu $cmKdV(d)$ denklemine ait Whitham modülasyon denklemleri çoklu ölçekler metodu kullanılarak elde edilmiştir. (3+1) boyutlu $mKP(d)$ denklemi ise, paraboloid bir dalga cephesi boyunca uzanan basamak tipi başlangıç koşulu ve uygun çözüm formuyla (1+1) boyutlu defocusing küresel $mKdV$ ($smKdV(d)$) denklemine indirgenmiştir. Ardından, $smKdV(d)$ denklemine ait Whitham modülasyon denklemleri, $cmKdV(d)$ denklemine benzer bir analiz kullanılarak elde edilmiştir. Üçüncü kısımda, klasik $mKdV(d)$, $cmKdV(d)$ ve $smKdV(d)$ denklemlerine ait sayısal sonuçlara yer verilmiştir. Focusing denklemlerde olduğu gibi, denklemlerin doğrudan çözümleri ve Whitham sisteminin bulunarak karşılaştırma yapılmıştır. Böylece, uygulanan asimptotik yöntemin uygunluğu gösterilmiştir. Daha sonra, ETRK4 yöntemi için hata analizine yer verilmiştir. Ek olarak, $mKdV(d)$ denkleminde farklı tipte şok dalga formları için yapılan analiz göz önünde tutularak $cmKdV(d)$ ve $smKdV(d)$ denklemlerindeki muhtemel çözüm sınıflandırması için sayısal sonuçlar paylaşılmıştır.

Beşinci bölümde, tez çalışmasında elde edilen sonuçlar özetlenmiş ve tez konusu ile ilgili gelecekte incelenebilecek problemler hakkında kısa bilgi verilmiştir.



WHITHAM THEORY FOR DISPERSIVE SHOCK WAVES

SUMMARY

In this thesis, dispersive shock wave (DSW) solutions have been investigated for a step-like initial condition along a wavefront of parabolic type to (2+1) dimensional focusing modified Kadomtsev-Petviashvili (mKP(f)) and defocusing modified Kadomtsev-Petviashvili (mKP(d)) equations; and along a wavefront of paraboloid type to (3+1) dimensional mKP(f) and mKP(d) equations. This thesis consists of five chapters. In the first chapter, a literature review on dispersive shock waves is provided. Additionally, the problems to be examined in this thesis are discussed.

In the second chapter, the propagation of DSWs is investigated in the (2+1) dimensional focusing modified Kadomtsev-Petviashvili (mKP(f)) equation with a step like initial data. The mKP(f) equation is

$$(v_t + 6v^2v_x + \varepsilon^2v_{xxx})_x + \sigma v_{yy} = 0 \quad (2.1)$$

where $v = v(x, t)$, $0 < \varepsilon \ll 1$ (small dispersion parameter) and $\sigma = \mp 1$.

Here, we study one dimensional reduction of Eq. (2.1) and its DSWs behaviour. In accordance with this purpose, firstly, we consider the following arbitrary step initial data

$$v(\eta, 0) = \begin{cases} v_l, & \eta < 0; \\ v_r, & \eta \geq 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

where $\eta = x + \frac{1}{2}\psi(y, 0)$. Here v_l and v_r are real constants and the inequality $v_l > v_r$ must be held for the formation of DSWs. However, it is known that the Whitham modulation system for the modified KdV equation introduces different solution characteristics for other possible inequalities. However, this is out of the scope of this study. In addition, to obtain the cylindrical reduction of Eq. (2.1), we suppose that the solution of Eq. (2.1) satisfies the ansatz

$$v = f(x + \frac{1}{2}\psi(y, t), y, t). \quad (2.4)$$

We focus on an initial condition for $\psi(y, t)$ such as $\psi(y, 0) = \gamma y^2$. Here, γ is a real constant. Also, the following boundary condition (BC) at infinities for v are assumed

$$v \rightarrow v_l S(t) \text{ as } \eta \rightarrow -\infty \text{ and } v \rightarrow v_r S(t) \text{ as } \eta \rightarrow \infty. \quad (2.5)$$

The use of the ansatz (2.4) in Eq. (2.1) yields

$$\left(\frac{1}{2}\psi_t f_\eta + f_t + 6f^2 f_\eta + \varepsilon^2 f_{\eta\eta\eta} \right)_\eta + \sigma \left(\frac{1}{4}\psi_y^2 f_{\eta\eta} + \frac{1}{2}\psi_{yy} f_\eta + \psi_y f_{\eta y} + f_{yy} \right) = 0. \quad (2.6)$$

Employing the non-increasing BC, i.e. $v_l > v_r \geq 0$, and assuming that ψ_{yy} does not depend y , the coefficients of the term f_η in Eq. (2.6) disappear and thus the ansatz $v = f(x + \frac{1}{2}\psi(y,t), t)$ can be independent of y . Then, the following system is obtained:

$$\psi_t + \frac{\sigma}{2}(\psi_y)^2 = 0, \quad (2.7)$$

$$f_t + 6f^2 f_\eta + \varepsilon^2 f_{\eta\eta\eta} + \frac{\sigma}{2}\psi_{yy}f = 0. \quad (2.8)$$

Eq. (2.7) is called the ‘‘front shape equation’’, and it is transformed into the Hopf equation by using the substitution $h = \psi_y$;

$$h_t + \sigma h h_y = 0. \quad (2.9)$$

Eq.(2.9) is solved for the initial condition $h(y, 0) = 2\gamma y$, i.e. $\psi(y, 0) = \gamma y^2$, and it is given as

$$h(y, t) = \frac{2\gamma y}{1 + 2\gamma\sigma t} \quad (2.11)$$

and the parabolic front shape function is obtained as

$$\psi(y, t) = \frac{\gamma y^2}{1 + 2\gamma\sigma t}. \quad (2.12)$$

It is seen that ψ_{yy} is independent of y for all t which is consistent with our assumption on ψ_{yy} . Note that if $\gamma\sigma > 0$, then the curvature of the initial parabolic front, i.e. Eq. (2.12), decreases in the positive t direction. However, when $\gamma\sigma < 0$, the curvature becomes unbounded at a critical time ($t_c = \frac{-1}{2\sigma\gamma}$) in the negative t direction. Therefore, we will assume that $\gamma\sigma > 0$ and $t > 0$ to avoid blow up. Then, by substituting Eq. (2.12) into Eq. (2.8), we obtain a (1+1) dimensional focusing cylindrical modified KdV (cmKdV(f)) equation, as a reduction of the (2+1) dimensional mKP(f) equation (2.1), and it is expressed as follows:

$$f_t + 6f^2 f_\eta + \varepsilon^2 f_{\eta\eta\eta} + \frac{1}{2t + t_0} f = 0 \quad (2.13)$$

where $t_0 = \frac{1}{\sigma\gamma}$. Also, here we consider only the assumption of $\sigma = 1$. The result for the case $\sigma = -1$ can be obtained by replacing γ with $-\gamma$. It is noted that if we choose a planar initial front instead of the parabolic front as $\psi(y, 0) = \gamma y$, then it is clear that ψ_{yy} does not depend on y and the Eq. (2.8) becomes the standard the mKdV(f) equation. DSW solutions of the mKdV have been previously studied in the literature.

To obtain the function $S(t)$ at the BC (2.5), we drop η derivative terms in Eq.(2.13) and then we get an ordinary differential equation. The solution of the resulting ordinary differential equation, subject to the initial condition $S(0) = 1$, is obtained:

$$S(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\gamma t}}. \quad (2.16)$$

Then, by using the multiple scale method, the Whitham systems for slowly varying parameters of travelling wave solutions of mKdV(f) and cmKdV(f) equations are derived. While some details about the DSW solutions like the envelope, phase velocity, and amplitude of the leading edge and trailing edge of the DSWs cannot be directly obtained from numerical solutions of the relevant equations, they can be acquired through the solutions of the Whitham modulation equations associated with the equations modeling the propagation of dispersive shock waves. The Whitham system for the classical mKdV(f) equation in terms of appropriate Riemann variables is in a diagonal hydrodynamic form however Whitham system for cmKdV(f) equation is not in this form. For this reason, the corresponding Whitham system of cmKdV(f) equation is solved numerically under the appropriate initial and BCs.

With these numerical solutions, DSWs of both mKdV(f) and cmKdV(f) equations are formed by using the leading order solution of the corresponding equations. The leading order solutions obtained by the Whitham system are compared with direct numerical solutions of the related equations for at different time values. The significant matches between the leading order solution and the direct numerical solution verify the validity of the Whitham systems for the evolution of DSWs in both the mKdV(f) and cmKdV(f) equations. Moreover, some important physical information of these DSWs such as average velocities of leading and trailing edges and amplitude of leading hump are given.

In the third chapter, we investigate DSWs in the (3+1) dimensional focusing modified Kadomtsev-Petviashvili (mKP(f)) equation:

$$(v_t + 6v^2v_x + \varepsilon^2v_{xxx})_x + \sigma(v_{yy} + v_{zz}) = 0 \quad (3.1)$$

where $v = v(x, y, z, t)$, ε is a small dispersion parameter ($0 < \varepsilon \ll 1$) and $\sigma = \mp 1$. In particular, when we choose a paraboloid initial wave front, denoted as $\psi(y, 0) = \gamma(y^2 + z^2)$, Eq. (3.1) transforms into the (1+1) dimensional smKdV(f) equation. Furthermore, for the spherical reduction of Eq. (3.1), we assume that the solution of Eq. (3.1) follows the ansatz $v = f(x + \frac{1}{2}\psi(y, z, t), t)$. Next, the Whitham modulation equations of the smKdV(f) equation are found in terms of Riemann variables. In the absence of spherical terms, the smKdV(f)-Whitham system reduces to the Whitham system for the classical mKdV(f) equation. To present the effect of cylindrical terms, we initially derive numerical solutions for the Whitham modulation equations of the mKdV(f) and cmKdV(f) equations by employing a Lax-Wendroff scheme with a nonlinear filter. Furthermore, an error analysis is performed for direct numerical solutions of both mKdV(f) and smKdV(f). Additionally, the classification of solutions of Riemann-type problems in the mKdV(f) equation was investigated. The existence criteria of the different solution types such as DSWS, the combination of the contact dispersive shock wave (CDSW) and the dispersive shock waves (CDSW-DSW), the combination of the contact dispersive shock wave and the rarefaction wave (CDSW-R) and the rarefaction wave (R) were derived for the mKdV(f) equation. The criteria for the formation of DSW solutions depend on the parameters given in the initial condition. In this study, results obtained from the direct numerical solutions of the relevant equations are presented for the classification of solutions of cmKdV(f) and smKdV(f) equations.

In the fourth chapter, DSWs in the (2+1) dimensional mKP(d) equation

$$(v_t - 6v^2v_x + \varepsilon^2v_{xxx})_x + \sigma v_{yy} = 0 \quad (4.1)$$

and the (3+1) dimensional mKP equation

$$(v_t - 6v^2v_x + \varepsilon^2v_{xxx})_x + \sigma(v_{yy} + v_{zz}) = 0 \quad (4.40)$$

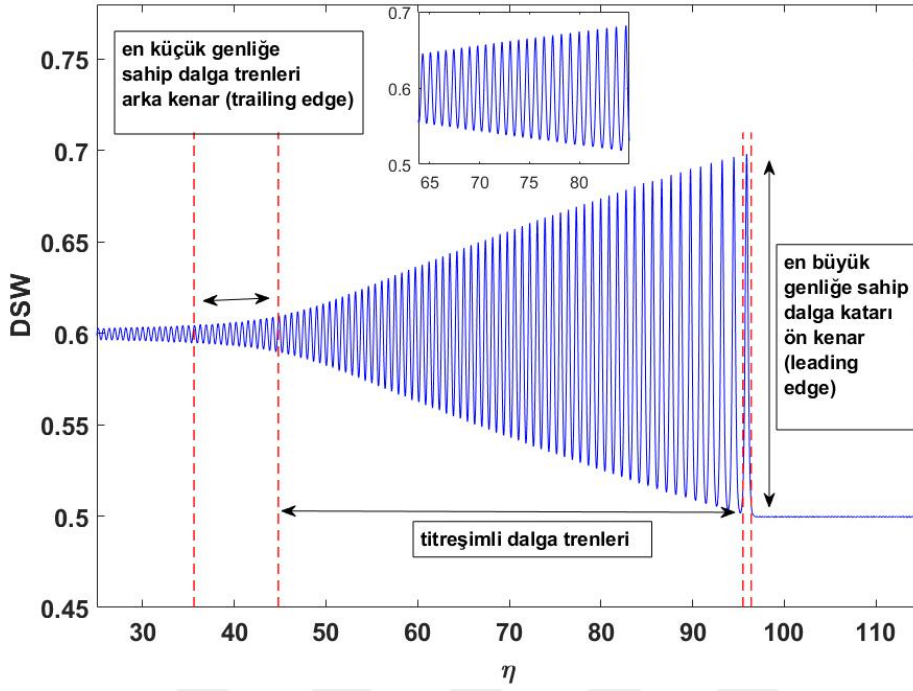
are investigated. With a step-like initial condition along a parabolic wavefront, the (2+1) dimensional mKP(d) equation is reduced to the (1+1)-dimensional defocusing cylindrical modified Korteweg-de Vries (cmKdV(d)) equation using an appropriate solution form. Similarly, the (3+1) dimensional mKP(d) equation is reduced to a defocusing spherical modified Korteweg-de Vries (smKdV(d)) equation by employing a paraboloid similarity variable transformation. Subsequently, Whitham systems are derived for both equations using the method of multiple scales. The obtained Whitham systems are solved numerically. Furthermore, to observe the effect of the time-dependent term, solutions of the classical mKdV(d) equation are included in this thesis work, as in the focusing case. Then, the direct numerical solutions of the equations are compared with their asymptotic solutions. In this analysis, a good agreement is obtained between these solutions. Ablowitz et al. [1] extended the Whitham theory to find DSW solutions for KP-type equations, considering a more general class of initial conditions. They also derived a (2+1) dimensional Whitham system by considering the slow modulations of the periodic solutions of the associated equations [1]. However, any quantitative results about the solutions of the related Whitham system have not been presented thus far. Our findings about the cmKdV(d) equation can be used to confirm the DSW solutions obtained from the general Whitham theory for the mKP equation. In the following part of the study, an error analysis is conducted for the ETRK4 method used in the direct numerical solutions of mKdV(d), cmKdV(d), and smKdV(d) equations. At the end of the chapter, a classification is presented for the defocusing equations including mKdV(d), cmKdV(d) and smKdV(d). Taking into account the classification for the classical mKdV(d) equation, the classification of waveforms for cmKdV(d) and smKdV(d) equations is provided. Here, instead of the CDSW waveform observed in focusing equations, a kink wave is obtained.

In the fifth chapter, the results obtained in this work are summarized. Also, a brief summary about the related future studies is given.

1. GİRİŞ

Şok dalgası, ortamda meydana gelen ani bir değişimi ifade eder ve genellikle yerel dalga hızından daha hızlı hareket eder. Eğer dispersiyon ve disipasyon etkisi ihmal edilirse, kritik bir zaman değerinde kırılma meydana gelir. Fakat fiziksel olarak bu etkiler ihmal edilemediğinden, çoğu model zayıf dispersiyon ve zayıf disipasyon etkisi içerir. Eğer disipasyon dispersiyona göre daha baskınsa viskoz şok dalgası (VSW) oluşur. VSW genellikle akışkanlarda ve sıkışabilir gazlarda görülür. Dispersiyon etkisi daha baskınsa dispersif şok dalgası (DSW) oluşur. DSW, zayıf dispersiyon ve zayıf nonlinearliğin hakim olduğu sistemlerde meydana gelen fiziksel olarak önemli bir olaydır. DSW'ler yüksek titreşimli dalga trenlerinden oluşur ve akışkanlar, süperakışkanlar (Bose-Einstein yoğuşması gibi), plazma ve optik gibi önemli araştırma alanlarında gözlemlenebilir [2]–[4]. DSW'ler uzay-zaman düzleminde karakteristik bir fan içinde genişler. Bu fanın sınırları, *arka kenar (trailing edge)* ve *ön kenar (leading edge)* olarak isimlendirilir. DSW'ye ait ön kenarda salınımların genliği en büyüktür ve arka kenarda ise en küçük genliğe sahip dalga trenleri mevcuttur. Ayrıntılar için Şekil 1.1'e bakılabilir. DSW'ye fizik ve uygulamalı matematik literatüründe farklı isimlerle rastlamak mümkündür. Örneğin, su dalgalarında undular bore; plazma fiziğinde çarpışmasız şok (collisionless shock) dalgası, olarak adlandırılmaktadırlar. Dispersif şok dalgaları birçok atmosfer ve okyanus olaylarında önemli rol oynamaktadır. İngiltere'de bulunan Severn nehrinde görülen undular bore, ya da atmosferde gözlemlenen “morning glory” olarak adlandırılan bulut oluşumu, gözlemlenen DSW oluşumlarına örnektirler. Ayrıca, farklı alanlarda gözlemlenen diğer DSW örnekleri Şekil 1.2, Şekil 1.3, Şekil 1.4 ve Şekil 1.5'te verilmiştir.

Günlük hayatta uygulama sahasının geniş olmasından, özellikle son 50 yıldır dispersif şok dalgalarıyla ilgili çalışmalara önem verildiği görülmektedir. Dispersif şok dalgalarının incelenmesi uzun bir tarihe dayanır. Öncü katkılar 1960 ve 1970'lerde başlamıştır. O yıllarda DSW daha çok collisionless şok olarak bilinmekteydi.



Şekil 1.1 : mKdV denkleminde $t = 50$ için görülen dispersif şok dalga yayılımı.

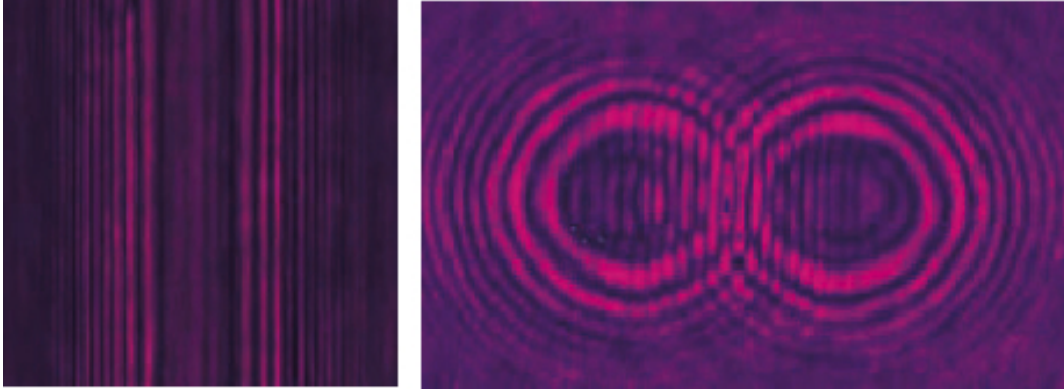


Şekil 1.2 : Morning Glory dalgasının uydu görüntüsü (Morning Glory in the Gulf of Carpentaria (Australia)).

Benjamin and Lighthill [5]'da, Sagdeev [6]'de ve Ostrovsky [7]'de çarpışmasız şokun titreşimli yapısı üzerine çalışmışlardır. Sonuç olarak, çarpışmasız şoku dissipatif-dispersif denklemlerin kararlı, ilerleyen çözümü olarak tasvir etmişlerdir.

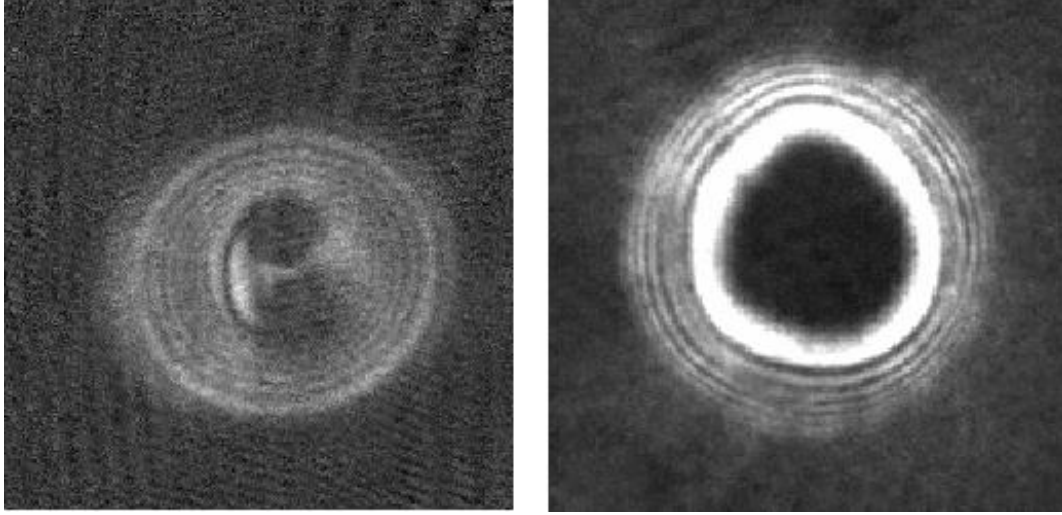


Şekil 1.3 : Severn nehrinde görülen undular bore (İngiltere)



Şekil 1.4 : Princeton Üniversitesi'nde gerçekleştirilen tek boyutlu (sol panel) ve iki boyutlu (sağ panel) optik DSW'nin deneysel görüntüleri (Wan, Jia, Fleischer 2007).

Whitham, 1965 yılında adi diferansiyel denklemler için olan ortalama alma metodunu (averaging method) genişleterek, kısmi türevli denklemler için bir ortalama prensibi geliştirmiştir [8]. Whitham teorisinde, ele aldığı problemdeki dalga yayılımında hızlı ve yavaş olmak üzere iki ölçek olduğunu varsaymıştır. Genlik, dalga boyu ve hızlı salınımların frekansını uzay ve zamanın yavaş değişen fonksiyonları olarak kabul etmiştir. Bu yavaş değişen fonksiyonların belirlendiği ve modülasyon denklemleri olarak adlandırılan denklemleri, ele alınan kısmi türevli denklem için olan



Şekil 1.5 : JILA, Colorado Üniversitesi, Boulder'da gerçekleştirilen Bose-Einstein yoğunlaşması patlama dalgası probleminin deneysel absorpsiyon görüntüleri (Hofer ve çalışma arkadaşları, 2006). Salınımlı halka yapıları DSW'lere karşılık gelmektedir.

korunum yasaları üzerinden ilgili denklemlerin periyodik ilerleyen dalga çözümlerinin ortalamasını alarak bulmuştur. Nonlineer dalga teorisinde, zamana ve uzaya göre yavaş değişim ile ölçeklenen denklemler *modülasyon denklemleri* olarak adlandırılmaktadır. Daha sonra bu denklemleri, *Whitham modülasyon denklemleri* olarak adlandıracağız. Whitham modülasyon denklemlerinin çözümleri yardımıyla DSW'lere ait yayılma zarfı, yayılma hızı ve belirli bir andaki maksimum ve minimum genlik büyüklükleri gibi önemli bilgilere ulaşılabilmektedir.

Akışkanlar fiziğinde, çoğu fiziksel durum dispersiyon ve non-lineer etkiyle açıklanmaktadır. KdV denklemi, bu durumların açıklanmasını sağlayan evrensel bir model ve dispersif şok dalgalarını modelleyen esas denklemlerden biridir. [9]'de Gurevich ve Pitaevskii KdV denkleminde DSW'yi incelemek için Whitham ortalama alma prensibini uygulamıştır. Whitham ortalama alma prensibi [8], DSW'nin matematiksel olarak açıklanmasına olanak sağlar. Temel varsayım, DSW'nin asimptotik olarak orijinal nonlineer dispersif denklemin yavaş değişimle karakterize edilen ilerleyen dalga çözümü olarak gösterilebileceğidir. Whitham ortalama alma metodu, lineer denklemler için uzun zamandaki (long-time) çözümü bulmak için kullanılan asimptotik metodun nonlineer denklemler için kullanılan bir genelleştirmesidir. Modülasyon denklemleri, orijinalinde korunum yasaları üzerinden çözümlerin ortalamasının alınmasıyla bulunur [8]. Bunun dışında Lagrangian yöntemi

[10], ya da bir asimptotik analiz metodu olan çoklu ölçekler metodu da modülasyon denklemlerini belirlemek için kullanılabilir [11].

Tez çalışmasına konu olacak denklemlerle ilişkili olan temel denklem, modifiye Korteweg-de Vries denklemi (mKdV) şu şekilde

$$u_t + 6\tau u^2 u_x + u_{xxx} = 0 \quad (1.1)$$

tanımlanmaktadır. Burada, $u = u(x,t)$ şeklinde bir fonksiyondur ve $\tau = \pm 1$ değerlerini alan bir sabittir. mKdV denklemi, ince elastik çubuklardaki dalga hareketi, kıvrımlı okyanus akıntıları, trafiğin tıkanıklığı, hiperbolik yüzeyler, iyon akustiği modellerindeki soliton yayılımı, çarpışmayan plazmalardaki Alfvén dalgaları gibi önemli uygulamalarda ortaya çıkmaktadır [12]–[17]. 1976 yılında, Driscoll ve O’Neil mKdV denkleminin DSW çözümlerini ele almıştır [18]. Bu denklem için Whitham sistemi, orijinal Whitham yöntemi kullanılarak türetilmiştir. mKdV denklemi için uygun *Riemann tipi değişkenler* bulunmuş ve buradan bu Riemann tipi değişkenlere karşı gelen karakteristik hızlar hesaplanmıştır [18]. Riemann tipi değişkenler, denklemlere karşı gelen Whitham sistemini köşegen formda yazılmasına olanak sağlamaktadırlar. Ayrıca, defocusing mKdV denklemi ($\tau=-1$) için modülasyon denklemlerinin her zaman hiperbolik olduğu ve dolayısıyla periyodik çözümlerin her zaman kararlı olduğu bulunmuştur. Fakat, focusing durum için ($\tau = 1$) modülasyon denklemlerinin hem hiperbolik hem de eliptik olabileceği ve bu nedenle eliptik olması durumunda periyodik çözümlerin kararsız olduğu gösterilmiştir.

1980 yılında Flaschka, Forest ve McLaughlin tarafından KdV denklemi için Whitham teorisinin çok faz genişlemesi (multiphase extension) geliştirilmiştir [19]. Modülasyon teorisi ve KdV denkleminin integrallenebilir yapısıyla ilgili bağlantı ortaya koyulmuştur. Daha sonra, Lax, Levermore ve Verakides [20,21]’de KdV denkleminin dispersiyon etkisinin çok küçük olduğu durumu, ters saçılım metodu (Inverse Scattering Method) kullanarak ele almıştır. Bu yöntemle de KdV denklemi için daha önce bulunan Whitham modülasyon denklemlerinin aynısı bulunmuştur. KdV denkleminin modülasyon denklemleri tam (strictly) hiperbolik ve nonlinear olarak bilinmektedir [22]. Bu çalışmada, korunum yasaları ve dispersif nonlinear denklemlerin bağlantısının altı çizilmiştir.

[23]'de ayrıntılı nonlinear Schrödinger denklemi küçük genlikli dalgalar için incelenmiştir. Bu denklem, özel olarak seçilen belirli parametre seçenekleri için KdV, defocusing mKdV ve KdV(2) denklemlerine dönüşebileceği gösterilmiştir. Ayrıca, defocusing mKdV denklemi için modülasyon teorisi kullanılarak undular boru çözümü elde edilmiştir. [24] çalışmasında, El hem integrallenebilir hem de integrallenemeyen denklemler için basamak tipi başlangıç koşulu ele alarak bore genişliği ve en büyük genliğe sahip dalga katarının genliği arasındaki ilişkiyi ortaya koymuştur. İncelenen örnekler arasında KdV denklemi, defocusing mKdV denklemi ve integrallenemeyen iyon-akustik dalgaları tanımlayan bir sistem bulunmaktadır. [25]'de Marchant mKdV denklemi için DSW teorisini inşa etmiştir. Yapılan analizde, DSW çözümlerinin oluşabilmesi için gerekli olan kriterlerin yanı sıra, "Cnoidal wave bore", "Mean height variation" (MHV) ve bu dalgaların kombinasyonu olan "cnoidal/sinusoidal bore", "sinusoidal wave bore/MHV" olarak adlandırılan farklı şok dalga çözümleri türetilmiş ve basamak tipi başlangıç koşulunun muhtemel farklı formlarına göre bu çözümler sınıflandırılmıştır. Daha sonra, [26]'de modifiye Korteweg-de Vries-Burger (mKdVB) denklemi için Whitham modülasyon teorisi ortaya konmuştur ve mKdVB denkleminin özel hali olan mKdV denklemi için basamak tipi başlangıç koşulu altında oluşan dalga formları için Merchant'ın yaptığına benzer bir sınıflandırmaya yer verilmiştir. Basamak tipi başlangıç koşuluna bağlı olarak "Contact Dispersif Şok Dalgası" (CDSW) , Seyreltme Dalgası (R) ve bu dalgaların kombinasyonu CDSW-DSW, CDSW-R şok dalga çözümleri türetilmiştir. Bu çalışmada mKdV denklemi için elde edilen farklı tipteki şok dalga formları Marchant tarafından elde edilen sonuçlarla tutarlıdır. Bu çalışmalara ek olarak, [27]'de mKdVB denklemi için basamak tipi başlangıç koşulu altında oluşan şok dalga formları için denklemin sayısal ve analitik çözümleri için karşılaştırma yapılmıştır.

[28]'de Matsuno tek boyutlu Benjamin-Ono (BO) denklemini ele almıştır. Yaptığı çalışmada, modülasyon denklemlerini öncelikle Lagrangian yöntemini kullanarak türetmiştir. Sonrasında Whitham'ın orijinal teorisini kullanmış ve bu denklemlere uyguladığı bir dönüşümle, BO denklemine ait Lagrangian kullanarak bulunduğu denklem sistemine indirgenebileceğini göstermiştir. BO denklemi için modülasyon denklemlerinin matematiksel yapısının KdV denklemi ile karşılaştırıldığında son

derece basit olduğu görülmüştür. Makalenin devamında, Benjamin-Ono denkleminin asimptotik çözümünü, dispersiyon etkisinin çok küçük olduğu durumlarda değerlendirmiştir. Modülasyon denklemlerinin çözümlerini bir basamak tipi başlangıç koşulu olarak incelemiştir. Sonuçta yapılan nümerik ve analitik çalışmanın uyumluluğu gösterilmiştir. Ayrıca, bu çalışmada Matsuno özel bir başlangıç koşulu olarak analiz yaptığını ve bunun daha geniş sınıflara genişletebileceğinin altını çizmiştir. Nitekim, çok kısa bir süre sonra Matsuno [29]'da bir önceki çalışmasında ([28]) bahsettiği farklı başlangıç koşulları altındaki çözümleri incelemiştir. Whitham modülasyon teorisi yardımıyla elde ettiği Benjamin-Ono denkleminin modülasyon denklemlerinin iki ayrı başlangıç koşulu altında çözümleri irdelemiştir. Bunlar, lokalize edilmiş başlangıç koşulu ve basamak tipi başlangıç koşuludur. Bu çalışmada, her iki başlangıç koşulu için de dispersiyon etkisinin çok küçük olduğu durumda dalga profiliyle ilgilenilmiştir. Lokalize edilmiş başlangıç koşulu için, çözümlerin soliter dalga dizilerinden oluştuğu gözlemlenmiştir.

Benjamin-Ono denklemi için Whitham teorisi [28] ve [29]'da görüldüğü gibi inşaa edilmiştir. Ancak bu denklem için küçük sürtünme etkisi 2007 yılında [30]'de ele alınmıştır. Bu çalışmada, Benjamin-Ono-Burger (BOB) denklemi için $(u_t + uu_x + Hu_{xx} = \epsilon u_{xx}$, burada H Hilbert dönüşümüdür) modülasyon denklemleri Whitham ortalama prensibiyle türetilmiştir. Ayrıca, BOB denklemine ait Whitham modülasyon denklemlerinin disipasyon etkisi olmadan (epsilonun sıfır olması hali) [29]'da bulunan Whitham sistemiyle örtüştüğü görülmüştür. Bulunan Whitham sisteminin köşegen formda yazılması için Riemann invaryantları tanımlanmış ve modülasyon denklemleri bu Riemann invaryantları cinsinden elde edilmiştir. Whitham modülasyon denklemlerinin çözümleri tek basamaklı başlangıç koşulu altında bulunmuştur. Sürtünme etkisine farklı değerler verilip nümerik olarak hesaplar yapılmış ve yapılan analitik incelemeyle nümerik çözümün uyumu karşılaştırılmıştır.

Kamchatnov ve çalışma arkadaşları [31]'de Gardner denkleminde görülen DSW için analiz yapmıştır. Gardner ya da extended KdV olarak bilinen denklem dispersif şok dalgaları için esas modellerden birini oluşturur. Bilinen en önemli uygulamalarından birisi de iç dalgalarda (internal waves) büyük genlikli dalgaları açıklamasıdır. Bu denklemde kübik nonlinear terim önemlidir. Kübik terimin önündeki katsayı, içinde

bulunulan fiziksel problemlere göre pozitif ya da negatif olabilir. Örneğin pozitif olması durumu bu denklemin iki tabakalı akışkanların incelenmesinde karşılaşılar. Yine bu terimin sıfır olması halinde KdV denkleminde indirgenmiş görür. Ayrıca, yapılan bir değişken dönüşümüyle mKdV denkleminde dönüşebileceği de gösterilmiştir. Bu çalışmada öncelikli olarak denklemin ilerleyen dalga çözümü ayrıntılı biçimde inşaa edilmiştir. Aslında bu denklem için ilerleyen dalga çözümleri literatürde mevcuttur [32,33]. Ancak bu çalışmada, DSW çözümlerini ifade etmek için ilerleyen çözümleri daha kapsamlı şekilde ortaya koyulmuştur. Sonrasında denkleme karşı gelen Whitham sistemi “finite gap integration method” ile Riemann invariantları cinsinden ifade edilmiştir. Buradan Gardner-Whitham sisteminin, yapılan bir dönüşümle KdV denkleminin Whitham sistemine dönüşebileceği gözlemlenmiştir. Ek olarak, bu çalışmada, DSW'nin yanı sıra basamak tipi başlangıç koşuluna bağlı olarak oluşan farklı tipte çok dalga formları için de analiz yapılmıştır.

El ve Hofer, DSW teorisiyle ilgili derleme bir makale hazırlamışlardır [4]. Bu makalede, integrallenebilir ve nonlinear dalga denklemleri Whitham modülasyon teorisi açısından kapsamlı bir şekilde açıklanmıştır. KdV ve defocusing nonlinear Schrödinger denklemi için DSW'nin detaylı incelemesi, Gurevich ve Pitaevskii'nin uygulamış olduğu yöntem (matching regularization procedure) yardımıyla yapılmıştır. Makalenin devamında integrallenemeyen sistemlerdeki DSW, birden fazla DSW'nin etkileşimi, klasik olmayan DSW gibi daha yeni gelişmelere değinilmiştir. DSW teorisi sığ su dalgaları (shallow water), nonlinear optik, Bose Einstein alanlarda fiziksel açıdan önemli alanlara uygulanmış ve önemi vurgulanmıştır. Miller'in [34]'deki derleme makalesi ise DSW'nin integrallenebilir sistemlerdeki uygulamasıyla ilgilidir. Ters saçılım yönteminin (Inverse Scattering Methodunun) kullanımı esas alınmıştır. İlk olarak, lineer Schrödinger denklemi ve çözümü Fourier dönüşümü ve Green fonksiyonları yardımıyla bir çok açıdan incelenmiştir. Defocusing NLS denklemi için ilk olarak, DSW'nin zayıf (weak) asimptotik analizi Lax-Levermore teorisi vasıtasıyla yapılmıştır ve sonrasında güçlü (strong) asimptotik analizi için Deift-Zhou metodu kullanılmıştır. Bu analitik teknikler modülasyon denklemlerini kapalı olarak ortaya koymuştur.

[35]'de Kamchatnov, Pertürbe KdV denklem sınıfı için modülasyon denklemlerini türetmiştir. Bu denklemleri türetirken [8]'de uygulanan Whitham'ın orijinal metodunu kullanmıştır. [36]'de Ostrovsky denkleminin $((u_t + uu_x + u_{xxx})_x = \varepsilon^2 u)$ Whitham modülasyon denklemleri [37]'te kullanılan yöntemle elde edilmiştir. Ostrovsky denklemi de bir tür pertürbe KdV denklemdir. Ancak denklemin sağ yanında bulunan yerel olmayan (non-local) pertürbasyon teriminden dolayı Kamchatnov'un pertürbe KdV denklemler için yaptığı genelleme [35] burada kullanılamamaktadır. Asimptotik analiz yardımıyla Ostrovsky-Whitham sistemi türetilmiştir.

Buraya kadar özetlenen çalışmalar (1+1) boyutlu modellerdeki DSW çözümleriyle ilgilidir. Yüksek boyutlu sistemler için DSW inşası ise, son 10 yıldaki çalışmalara konu olmuşlardır. Bu çalışmaların ilk örneği olarak, (2+1) boyutlu genel Kadomtsev-Petviashvili (KP) denkleminin

$$(u_t + 6u^n u_x + \varepsilon^2 u_{xxx})_x + \sigma u_{yy} = 0, \quad (1.2)$$

DSW çözümlerinin inşası verilebilir. Burada, $u = u(x, y, t)$, $0 < \varepsilon \ll 1$ ve $\sigma = \mp 1$. $n = 1$ için $\sigma = -1$ ve $\sigma = 1$ olma durumları sırasıyla KPI ve KPII denklemleri olarak adlandırılır. (1.2) denklemi $n = 2$ için modifiye Kadomtsev-Petviashvili (mKP) denklemi olarak isimlendirilir. KP ve mKP denklemleri, lineer olmayan dalga teorisinde, zayıf dispersif dalgaları çözüm kabul eden ikinci mertebeden lineer olmayan bir sistemin indirgenmesi olarak ortaya çıkan iki denklem modelidir [38]. Bu denklemler, özellikle iyon akustik dalgaları (ion acoustic waves) [39], ses dalgaları [40], sığ su dalgaları (shallow water waves) [41], ve ince filmlerde görülen manyetik uyarımlar (magnetic excitations) [42] gibi önemli fiziksel uygulamalarda ortaya çıkmaktadırlar.

Literatür dikkatli incelendiğinde gerekli matematiksel araçların yetersizliği nedeniyle dispersif şok dalgalarıyla ilgili çalışmaların genellikle (1+1) boyutlu denklemler için yapıldığı görülmektedir. Bu denklemlere karşı gelen Whitham modülasyon denklemleri çoğunlukla Whitham ortalama metoduyla bulunmuştur. Özellikle son yıllarda, Ablowitz öncülüğünde çok boyutlu denklemler için çalışmalar yapılmaya başlanmıştır. Bu çalışmaların öncüsü olan [43]'de Ablowitz, Demirci ve Ma (2+1) boyutlu modellerde DSW'nin inşası problemine yönelmişlerdir. Bu çalışmada, KP

ve (2+1) boyutlu Benjamin-Ono denklemlerinde görülen dispersif şok dalga çözümü üzerinde durulmuştur. Özel olarak, DSW'ın parabolik bir cephe boyunca ilerlediği varsayılmıştır. Denklemlere benzerlik dönüşümü uygulanmış ve orijinal KP denkleminin silindirik KdV (cKdV), (2+1) boyutlu Benjamin-Ono denkleminin ise silindirik BO (cBO) denklemine indirildiği gösterilmiştir. İndirilen bu denklemlere çoklu ölçekler metodu uygulanarak [11] Whitham modülasyon denklemleri elde edilmiştir. Sonuçlar nümerik olarak incelenmiş ve orijinal denklemlerle uyumluluğu gösterilmiştir. [44]'da Ablowitz, Biondini ve Wang (2+1) boyutlu Kadomtsev-Petviashvili (KP) denkleminin Whitham sistemini çoklu ölçekler metodu kullanılarak elde etmişlerdir. Daha önce KP denklemi için modülasyon denklemleri özel varsayımlar altında [43]'de bulunmuştur. Ancak bu çalışmada daha genel bir yaklaşım izlenmiştir. Tek boyutlu denklemler için korunum yasaları, dalgaların korunumu ve sekülerlik koşulundan elde edilmektedir. Ancak sistemlerde bu koşulların yanı sıra Fredholm Çözülebilirlik (solvability) koşulu da kullanılmaktadır. [44]'de bütün bu koşullar kullanılarak 5 tane kısmi türevli denklemden oluşan sistem türetilmiştir. İndirilen bu denklem sistemi uygun biçimde Riemann invaryantları cinsinden yazılmıştır. Elde edilen KP-Whitham sistemine indirgemeler yapılarak bazı durumlarda KdV denklem sisteminin Whitham denklemlerine dönüştüğü gösterilmiştir. Yine yapılan başka bir dönüşümle KP-Whitham sisteminin cKdV denkleminin modülasyon denklemlerine indirildiği gözlemlenmiştir. Çalışmanın devamında, KP-Whitham sistemi için başlangıç-değer ve sınır-değer problemi incelenmiştir. Son olarak da KP denkleminin periyodik çözümlerinin stabilitesi üzerinde çalışılmıştır. Bu makalede kullanılan yöntemde denklemlerin integrallenebilirliği gerekmez. Nitekim kısa bir süre sonra integrallenemeyen bir denklem olan (2+1) boyutlu Benjamin Ono için de benzer bir analiz yapılmıştır [45]. Böylelikle uygulanan bu yöntemin diğer (2+1) boyutlu kısmi türevli denklemlere de uygulanabileceği gösterilmiştir. [45]'de ise (2+1) boyutlu KP denklemine uygulanan yöntem, iki boyutlu Benjamin-Ono (2DBO) denklemi için kullanılmıştır. Burada da 2DBO denkleminin Whitham sistemi çoklu ölçekler metodu kullanılarak elde edilmiştir. Kullanılan yöntem sonunda 5 tane kısmi türevli denklemden oluşan sistem türetilmiştir. İndirilen bu denklem sistemi uygun biçimde Riemann invaryantları cinsinden yazılmıştır. Bu makalenin devamında, 2DBO-

Whitham sistemi için indirgemeler uygulanmış ve bazı özel hallerde bu indirgemenin BO denkleme indirgendiği gösterilmiştir. Bazı kabuller altında ise [24]'de çalışılan cBO (cylindrical Benjamin Ono) denkleme dönüştüğü gözlemlenmiştir. Son kısımda ise, 2DBO denkleminin periyodik çözümünün stabilitesi incelenmiştir.

Ablowitz, Biondini ve Rumanov [1]'de (2+1) boyutlu KP, (2+1) boyutlu BO ve modifiye KP denklemi üzerinde çalışmışlardır. Burada, daha önce de [26]'da çalışılan 2DKP ve 2DBO denklemlerinin daha basit halde Whitham sistemlerini elde etmişlerdir. Ancak [44]'da bulunan Whitham sistemi bir takım singülerlik içermektedir. Yeni yapılan analiz, singülerlik durumlarını ortadan kaldırmaktadır. Ayrıca aynı çalışmada, mKP denklemi de ele alınmış ve karşı gelen Whitham sistemi türetilmiştir. Devamında ise, mKP denkleminin periyodik çözümlerinin stabilite analizi yapılmıştır.

DSW ile ilgili çalışmalar daha yüksek boyuttan denklemler için de yapılmıştır. [46]'de (3+1) boyutlu Benjamin Ono denklemi için [11]'de uygulanan asimptotik analiz yardımıyla Whitham modülasyon denklemleri türetilmiştir. Daha sonra, benzer analiz (3+1) boyutlu Gardner-KP denklemi için yapılmıştır [47]. Bu çalışmalara ek olarak, defocusing nonlinear Schrödinger (NLS) denklemi için Whitham modülasyon denklemleri iki, üç ve daha yüksek boyutlu modeller için türetilmiştir [48].

Bu tez çalışmasında ise dört ayrı denklemin DSW çözümleri incelenmiştir. İlk bölümü oluşturan bu bölümde DSW'ler ile ilgili tanımlamalar verilmiş ve DSW ile ilgili yapılan çalışmaların kısa bir tarihi özetlenmiştir. Bölüm 2'de, (2+1) boyutlu focusing modifiye Kadomtsev-Petviashvili (mKP(f)) denkleminde görülen dispersif şok dalgaları üzerinde durulmuştur. Burada, (2+1) boyutlu mKP(f) denklemi için basamak tipi başlangıç koşulu ele alınmış ve DSW'lerin parabolik bir cephe boyunca ilerlediği varsayılmıştır. Daha önce, [49] 'de verilen KP denklemini silindirik KdV denkleme indirgemek için kullanılan benzerlik dönüşümü yardımıyla orijinal mKP(f) denklemi (1+1) boyutlu focusing silindirik modifiye Korteweg-de Vries (cmKdV(f)) denkleme indirgenmiştir. Önerilen çözüm formu sonucu elde edilen cmKdV(f) denkleminin, Whitham modülasyon denklemleri bir asimptotik analiz olan çoklu ölçekler yöntemi kullanılarak türetilmiştir. Ayrıca, cmKdV(f)-Whitham sisteminin özel durumda, yani

silindirik terim özdeş olarak sıfır iken $mKdV(f)$ -Whitham sistemine indirgendiği gözlemlenmiştir. Bu nedenle, bu bölümde $mKdV(f)$ denkleminin sayısal çözümlerine de yer verilmiştir. Daha sonra (1+1) boyutlu $cmKdV(f)$ denklemi ve klasik $mKdV(f)$ denklemlerine ait Whitham modülasyon denklemlerinin sayısal çözümleri ile $mKdV(f)$ ve $cmKdV(f)$ denklemlerinin doğrudan sayısal çözümlerinin bulunmuş ve sonuçlar karşılaştırılarak yöntemin uygunluğu da gösterilmiştir. $cmKdV(f)$ denklemi için olan Whitham modülasyon denklem sistemi köşegen değildir ve bu özellik analitik çözümü bulmayı oldukça zorlaştırmaktadır. Bu yüzden analitik çözüm yerine, Shampine [53] tarafından MATLAB platformu üzerinde hiperbolik denklem sistemlerinin çözümleri için geliştirilen, sonlu farklar temelli birçok yöntemin kullanılabilceği, sayısal çözücü programı kullanılmıştır. (1+1) boyutlu $mKdV(f)$ ve $cmKdV(f)$ denklemlerinin sayısal çözümü için mevcutlar içinde en etkin spektral tabanlı sayısal yöntem olarak bilinen ve birçok nonlinear evrim tipi diferansiyel denklemin çözümünde hızı ve doğruluğu test edilmiş, “Exponential Time Differencing Runge Kutta-4” ETDRK4 yönteminin modifiye hali kullanılmıştır. Ek olarak, denklemleri doğrudan çözmek için kullanılan ETDRK4 yöntemi için hata analizi yapılmıştır.

Bölüm 3’te, Bölüm 2’de ortaya konan yöntem kullanılarak, (3+1) boyutlu nonlinear kısmi türevli bir denklem olan focusing modifiye Kadomtsev-Petviashvili ($mKP(f)$) denkleminde dispersif şok dalga yayılımı problemi ele alınmıştır. (3+1) boyutlu $mKP(f)$ denklemi, özel olarak seçilen paraboloid tipte bir başlangıç koşulu için, (1+1) boyutlu küresel $smKdV(f)$ denklemine indirgenmiştir. İndirgeme işleminin ardından, $mKdV(f)$ ve $smKdV(f)$ denklemlerinin Whitham modülasyon denklemleri asimptotik olarak elde edilmiştir. Daha sonra, $mKdV(f)$ ve $smKdV(f)$ denklemleri Exponential Time-differencing Fourth-Order Runge Kutta (ETDRK4) metodunun modifiye hali kullanılarak doğrudan sayısal çözümler elde edilmiştir. Ardından, asimptotik ve doğrudan çözümler karşılaştırılarak kullanılan asimptotik yöntemin doğruluğu test edilmiştir. Bu karşılaştırma ile, Whitham teorisinin ne kadar başarılı olduğu gözlemlenmiştir. Öte yandan, daha önce de belirtildiği gibi $smKdV(f)$ -Whitham sistemi, küresel terim özdeş olarak sıfır alındığında (yani $h_i = 0$) $mKdV(f)$ -Whitham sistemine indirgenmektedir. Bu nedenle, bu bölümde $mKdV(f)$ denkleminin sayısal ve asimptotik çözümlerine de yer verilerek, küresel terimin çözümleri ne ölçüde

etkilediği gösterilmiştir. Ayrıca, zamana bağlı terimin denklemler üzerindeki etkisini ortaya koymak için Bölüm 2’de çalışılan $cmKdV(f)$ denklemi ve $smKdV(f)$ denklemi için karşılaştırma yapılmıştır. Bu tez çalışmasının temel amacı DSW çözümlerini incelemektir. Ancak, literatür incelendiğinde klasik $mKdV$ denklemi için farklı tipte şok dalga çözümleri için sınıflandırma yapıldığı görülmektedir [24]–[26]. [25,26]’da focusing $mKdV$ denkleminde DSW çözümlerinin oluşabilmesi için gerekli olan kriterlerin yanı sıra, "Contact Dispersif Şok Dalgası" (CDSW) , Seyreltme Dalgası (R) ve bu dalgaların kombinasyonu CDSW-DSW, CDSW-R şok dalga çözümleri türetilmiştir. DSW çözümünün oluşabilmesi için verilen kriterler, basamak tipi başlangıç koşulunu tanımlarken kullanılan seviyelere bağlıdır. Ancak $cmKdV(f)$ ve $smKdV(f)$ denklemleri gibi herhangi değişken katsayılı kısmi türevli denklem (PDE) modeli için benzer bir problem sınıflandırması henüz yapılmamıştır. Bu çalışmada $cmKdV(f)$ ve $smKdV(f)$ denkleminin çözümlerinin sınıflandırılmasına yardımcı olabilmek için ilgili denklemlerin doğrudan sayısal çözümleri ile elde edilen sonuçlar verilmiştir.

Bölüm 4’te, (2+1) ve (3+1) boyutlu defocusing modifiye Kadomtsev-Petviashvili ($mKP(d)$) denklemleri için DSW çözümleri üzerinde durulmuştur. İlk olarak, Bölüm 2 ve Bölüm 3’e benzer bir analiz yapılarak, (2+1) boyutlu $mKP(d)$ denklemi defocusing silindirik modifiye Korteweg-de Vries ($cmKdV(d)$) denkleminde; (3+1) boyutlu $mKP(d)$ denklemi ise küresel modifiye Korteweg-de Vries ($smKdV(d)$) denkleminde indirgenmiştir. Çalışmanın devamında ise, $mKdV(d)$, $cmKdV(d)$ ve $smKdV(d)$ denklemleri için sayısal çözümler verilmiştir. Daha önceki problemlerde olduğu gibi silindirik ve küresel terimin etkisini gözlemlemek amacıyla klasik denklemin yani $mKdV(d)$ denkleminin doğrudan ve asimptotik çözümlerine yer verilmiştir. Her üç denklem için de focusing denklemlerde ($mKdV(f)$, $cmKdV(f)$ ve $smKdV(f)$) olduğu gibi doğrudan ve asimptotik çözümler bulunarak karşılaştırma yapılarak asimptotik çözüm için uygulanan yöntemin uygunluğu gösterilmiştir. Daha sonra, denklemleri sayısal olarak doğrudan çözmek için kullanılan ETDRK4 yöntemi için hata analizi yapılmıştır. Ayrıca, bu bölümde, klasik $mKdV(d)$ denklemi için yapılan sınıflandırma [24] göz önüne alınarak $cmKdV(d)$ ve $smKdV(d)$ denklemleri için de sayısal çözümler kullanılarak bir sınıflandırmaya yer verilmiştir.

Sonuçlar kısmında ise, tez çalışmasında elde edilen sonuçlar özetlenmiştir. Ayrıca, tez konusu ile ilgili olan açık problemlere ve gelecekte ele alınabilecek diğer problemlere de bu kısımda yer verilmiştir.



2. (2+1) BOYUTLU FOCUSING MODİFİYE KADOMTSEV- PETVIASHVILI (mKP (f)) DENKLEMİNİN DİSPERSİF ŞOK DALGA ÇÖZÜMLERİ

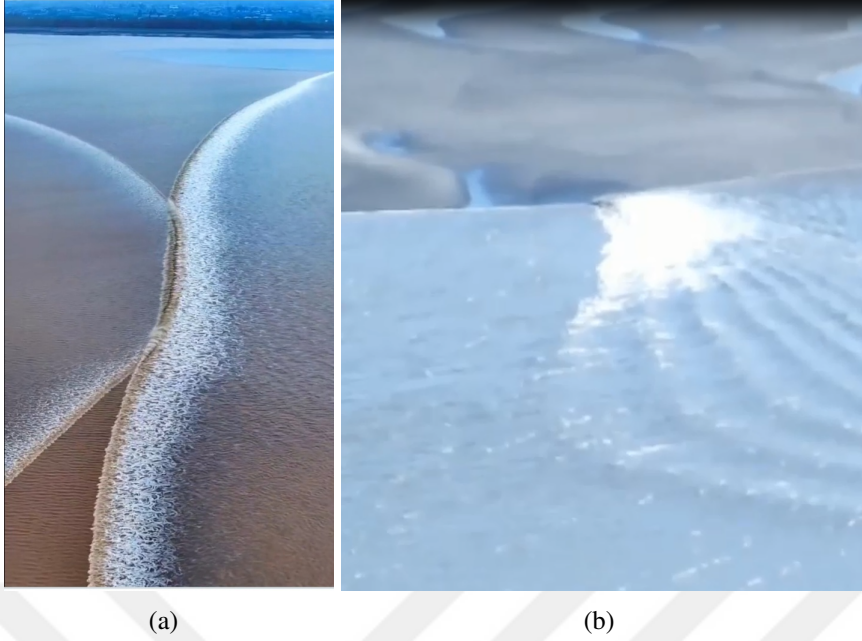
2.1 Giriş

Bu bölümde, parabolik bir dalga cephe boyunca uzanan basamak tipi başlangıç koşulu için (2+1) boyutlu focusing modifiye Kadomtsev-Petviashvili denkleminin dispersif şok dalga (DSW) çözümleri incelenmiştir. Tez çalışmasında bu denklem için mKP(f) kısaltması kullanılacaktır. Denkleme benzerlik dönüşümü uygulanarak orijinal mKP(f) denklemi (1+1) boyutlu focusing silindirik modifiye Korteweg-de Vries (cmKdV(f)) denklemine indirgenmiştir. Önerilen çözüm formu sonucu elde edilen cmKdV(f) denkleminin, Whitham modülasyon denklemleri bir asimptotik analiz olan çoklu ölçekler yöntemi kullanılarak türetilmiştir. Whitham modülasyon denklemleri türetilirken dalgaların korunumu yasası ve sekülerlik koşulları kullanılmıştır. Daha sonra, cmKdV(f) denkleminin Whitham modülasyon denklemleri sayısal olarak çözülmüştür. Ayrıca, cmKdV(f)-Whitham sisteminde silindirik terimin özdeş olarak sıfır olması durumunda klasik focusing modifiye Kadomtsev-Petviashvili (mKdV(f)) denkleminin Whitham sistemine indirgendiği gözlemlenmiştir. Bu nedenle, sayısal çözümlerde silindirik terimin etkisini de gözlemlemek için mKdV(f)-Whitham sisteminin çözümlerine de yer verilmiştir. Ardından, elde edilen bu sonuçlar mKdV(f) ve cmKdV(f) denklemlerinin doğrudan sayısal çözümleri ile karşılaştırılarak kullanılan yöntemin uygunluğu da kontrol edilmiştir.

2.2 (2+1) Boyutlu mKP(f) Denkleminin (1+1) Boyutlu cmKdV(f) Denklemine İndirgenmesi

(2+1) boyutlu focusing modifiye Kadomtsev-Petviashvili (mKP(f)) denklemi,

$$(v_t + 6v^2v_x + \varepsilon^2v_{xxx})_x + \sigma v_{yy} = 0 \quad (2.1)$$



Şekil 2.1 : (2.3) ile verilen parabolik cephenin doğadaki karşılığı (a) Quinque nehri (b) Alaska.

formundadır. Burada, $v = v(x, y, t)$ ve $\sigma = \mp 1$ dir. ε ise zayıf dispersiyon bağıntısıdır ($0 < \varepsilon \ll 1$). Bu denklem, antiferromanyetik malzemelerdeki ses dalgalarının yayılımı ile ilgili olarak türetilmiştir [40].

(2.1) denklemi için aşağıda belirtilen basamak tipindeki başlangıç koşulu ele alınacaktır ($t = 0$):

$$v(\eta, 0) = \begin{cases} v_l, & \eta < 0; \\ v_r, & \eta \geq 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

Burada, $\eta = x + \frac{1}{2}\psi(y, t)$ 'dir. Yukarıdaki başlangıç koşulunda yer alan v_r ve v_l reel sabitleri göstermektedir. mKdV(f) denkleminde DSW dalga yayılımının oluşabilmesi için $v_l > v_r \geq 0$ eşitsizliğinin sağlanması gerekir [25,26]. Bu eşitsizliğin sağlanmadığı diğer durumlar için de mKdV(f)-Whitham modülasyon sistemi farklı tipte şok dalga çözümleri üretilebilir [25,26]. Bölüm 3.4.5'te (2.2) başlangıç koşulunda kullanılan sabitlere bağlı olarak oluşan bu farklı şok dalga çözümlerine yer verilecektir. Fakat, bu tez çalışmasında DSW çözümleri üzerinde durulacaktır.

Diğer taraftan, (2.1) denkleminin silindirik denkleme indirgenebilmesi için (2.1) denkleminin γ bir reel sabit olmak üzere özel olarak seçilen Şekil 2.1'den de görülebileceği gibi parabolik başlangıç cephesi

$$\psi(y, 0) = \gamma y^2 \quad (2.3)$$

boyunca aşağıdaki çözüm formunu sağladığı kabul edilmektedir:

$$v = f\left(x + \frac{1}{2}\psi(y,t), y, t\right). \quad (2.4)$$

Ayrıca, v fonksiyonunun sonsuzda aşağıdaki sınır koşulunu sağladığı varsayılmaktadır:

$$\eta \rightarrow -\infty \text{ iken } v \rightarrow v_l S(t) \text{ ve } \eta \rightarrow \infty \text{ iken } v \rightarrow v_r S(t). \quad (2.5)$$

Burada yer alan $S(t)$ fonksiyonu çalışmanın devamında belirlenecektir. Daha sonra, (2.4) çözüm formunun (2.1) denkleminde kullanılmasıyla

$$\left(\frac{1}{2}\psi_t f_\eta + f_t + 6f^2 f_\eta + \varepsilon^2 f_{\eta\eta\eta}\right)_\eta + \sigma\left(\frac{1}{4}\psi_y^2 f_{\eta\eta} + \frac{1}{2}\psi_{yy} f_\eta + \psi_y f_{\eta y} + f_{yy}\right) = 0 \quad (2.6)$$

elde edilir. Artmayan tipteki (2.5) ile verilen sınır koşulu uygulanır ve istenilen indirgemenin yapılabilmesi için ψ_{yy} 'nin y den bağımsız olduğu varsayıldığında, f_η terimi ile ilgili katsayıların toplamı yalnızca t 'ye bağlı olur ve böylece çözüm formu $v = f\left(x + \frac{1}{2}\psi(y,t), t\right)$ şeklinde alınabilir. Böylece, (2.6) denkleminde aşağıdaki denklem sistemi elde edilir:

$$\psi_t + \frac{\sigma}{2}(\psi_y)^2 = 0, \quad (2.7)$$

$$f_t + 6f^2 f_\eta + \varepsilon^2 f_{\eta\eta\eta} + \frac{\sigma}{2}\psi_{yy} f = 0. \quad (2.8)$$

(2.7) denklemi "dalgaya şekli veren denklem" (front shape equation) olarak adlandırılmaktadır ve $h = \psi_y$ dönüşümü yardımıyla Hopf denklemine indirgenebilir (Hopf denklemi $u_t + uu_{x=0}$ formundadır);

$$h_t + \sigma h h_y = 0. \quad (2.9)$$

(2.9) denklemi için başlangıç koşulu, $\psi(y,0) = \gamma y^2$ olduğu kullanılarak

$$h(y,0) = 2\gamma y \quad (2.10)$$

olarak bulunur ve böylece (2.9) denkleminin çözümü

$$h(y,t) = \frac{2\gamma y}{1 + 2\gamma\sigma t} \quad (2.11)$$

şeklinde elde edilir. Buradan, dalgaya şekli veren fonksiyon

$$\psi(y,t) = \frac{\gamma y^2}{1 + 2\gamma\sigma t} \quad (2.12)$$

olur. Ayrıca, (2.12) çözümünden, ψ_{yy} 'nin tüm t değerleri için y 'den bağımsız olduğu yani başta alınan ψ_{yy} üzerindeki varsayımla çelişmediği görülmektedir. Buradan, şu yorumlar yapılabilir: Pozitif t eksenini doğrultusunda $\gamma\sigma > 0$ iken, başlangıçtaki parabolik cephenin eğriliği azalır. Fakat, $\gamma\sigma < 0$ iken negatif t eksenini doğrultusunda kritik bir t değerinde $\left(t_c = \frac{-1}{2\sigma\gamma}\right)$ patlama (blow-up) meydana gelir. Bunu önlemek adına, $\gamma\sigma > 0$ ve $t > 0$ kabul edilecektir. Sonuç olarak, (2.12) denkleminin (2.8) denkleminde kullanılmasıyla (2+1) boyutlu mKP(f) denklemi, yapılan değişken dönüşümü ve kullanılan parabolik cephe başlangıç koşuluyla birlikte (1+1) boyutlu focusing silindirik modifiye KdV (cmKdV(f)) denklemine indirgenir:

$$f_t + 6f^2 f_\eta + \varepsilon^2 f_{\eta\eta\eta} + \frac{1}{2t + t_0} f = 0. \quad (2.13)$$

Burada, $t_0 = \frac{1}{\sigma\gamma}$ 'dir. Ek olarak, bu çalışmada $\sigma = 1$ durumu incelenecektir. Diğer durumda, yani $\sigma = -1$ olması durumunda sonuçlar γ yerine $-\gamma$ kullanılarak elde edilebilir. Dalga cephesinin farklı seçilmesi durumunda (2.13) denkleminin yapısının değişeceği açıktır. Örneğin, bu çalışmada parabolik cephe yerine düzlemsel bir cephe, yani $\psi(y,0) = \gamma y$, seçilseydi, ψ_{yy} teriminin y 'den bağımsız olma koşulu yine sağlanırdı. Fakat bu durumda (2.8) denklemi klasik mKdV(f) denklemine dönüşürdü. Literatürde mKdV(f) denklemiyle ilgili DSW çalışmaları mevcuttur [25,26]. Bu nedenle bu durum tez çalışmasına dahil edilmemiştir.

Burada, diğer bir duruma dikkat çekmek gerekir. Eğer $\psi(y,0) = \gamma y^2$ parabolik cephe başlangıç koşulu sağlanmazsa, (2.8) denkleminde yer alan ψ_{yy} terimi y 'den bağımsız olmayacaktır ve (2.7) denklemi, yani dalgaya şeklini veren denklem aynı kalacaktır; fakat (2.8) değişecektir. Bu durumda, (2.8) denklemi

$$\left(f_t + \frac{1}{2}\psi_{yy}f + 6f^2 f_\eta + \varepsilon^2 f_{\eta\eta\eta}\right)_\eta + \sigma(\psi_y f_{\eta y} + f_{yy}) = 0 \quad (2.14)$$

şeklinde olur. (2.14) denklemi, (2+1) boyutlu kısmi türevli bir denklemdir ve orijinal (2.1) denkleminde daha karmaşıktır. Bu koşullar altında, kullandığımız dönüşüm (2.1) orijinal denklemi cmKdV(f) denklemine indirgemez. Çünkü (2.14) denkleminde f 'nin türevlerine bağlı ek terimler yer almaktadır. Eğer,

$$L(f; \psi) = \psi_y f_{\eta y} + f_{yy} \quad (2.15)$$

olmak üzere, $|L(f; \psi)| \ll 1$ koşulu sağlanırsa, (2.14) denklemi (2.8) denklemine dönüşebilir. Fakat, bu çalışmada ψ_{yy} 'nin y 'den bağımsız olduğu durum incelenecektir. Öte yandan, (2.13) denkleminin sonsuzdaki sınır koşullarını belirlemek için, (2.13) denkleminde yer alan η 'ya bağlı türevler ihmal edilirse, (2.13) denklemi t bağımsız değişkeni için adi diferansiyel denkleme dönüşür. Elde edilen bu denklemin $S(0) = 1$ başlangıç koşuluyla birlikte çözümü (2.5)'de yer alan $S(t)$ 'yi belirler:

$$S(t) = \frac{1}{\sqrt{1+2\gamma t}}. \quad (2.16)$$

2.3 cmKdV(f) Denkleminin Whitham Modülasyon Denklemlerinin Türetilmesi

Bu bölümde, (2+1) boyutlu (2.1) denkleminde değişken dönüşümü yardımıyla elde edilen (1+1) boyutlu cmKdV(f) denkleminin Whitham modülasyon denklemleri türetilecektir. Bunun için, Whitham'ın orijinal teorisi [8] ile bağlantılı bir asimptotik analiz olan çoklu ölçekler metodu [11] kullanılarak korunum yasalarının elde edilmesi amaçlanmaktadır. Whitham'ın orijinal teorisinin yerine bu yöntemi kullanmamızın başlıca nedenlerinden biri, orijinal teori ile cmKdV(f) denkleminin korunum yasalarının doğrudan elde edilmesinin mümkün olmamasıdır. Bu yöntemde, f fonksiyonu η ve t yavaş değişkenlerinin ve θ hızlı değişkeninin fonksiyonu olduğu yani $f = f(\theta, \eta, t)$ olduğu kabul edilecektir. θ hızlı değişkeni için de $\theta = \theta(\eta, t)$ formunda olduğu kabulü altında aşağıdaki tanımlamalar yapılmaktadır:

$$\theta_\eta = \frac{k(\eta, t)}{\varepsilon}, \quad \theta_t = -\frac{\omega(\eta, t)}{\varepsilon} = -\frac{kV}{\varepsilon}. \quad (2.17)$$

Burada, yavaş değişkenler η ve t 'nin fonksiyonları olan k dalga sayısını, ω açısal hızı ve V faz hızını göstermektedir.

(2.17)'de yer alan tanımlamalar aracılığıyla $(\theta_\eta)_t = (\theta_t)_\eta$ uyumluluk koşulu kullanılırsa,

$$k_t + (kV)_\eta = 0 \quad (2.18)$$

olur. Ayrıca (2.18) "dalgalarda korunumu" (conservation of waves) olarak da adlandırılmaktadır. Böylelikle ilk korunum yasası elde edilmiş olur.

Diğer korunum yasalarını elde etmek için ise asimptotik analiz uygulanacaktır. Hızlı ve yavaş değişkenler arasında aşağıdaki bağıntılar geçerlidir:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\omega}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \eta}. \quad (2.19)$$

Bu bağıntılar, (2.13)'te kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon} \left(-\omega \frac{\partial f}{\partial \theta} + k^3 \frac{\partial^3 f}{\partial \theta^3} + 6f^2 k \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \\ & + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + 3k^2 \frac{\partial^3 f}{\partial \eta \partial \theta^2} + 3kk_\eta \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + 6f^2 \frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{f}{2t+t_0} \right) \\ & + \varepsilon \left(3k \frac{\partial^3 f}{\partial \theta \partial \eta^2} + 3k_\eta \frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial \eta} + k_{\eta\eta} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} = 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

bulunur. f fonksiyonu ε 'nin kuvvetlerine göre seriye açılır,

$$f(\theta, \eta, t) = f_0(\theta, \eta, t) + \varepsilon f_1(\theta, \eta, t) + \varepsilon^2 f_2(\theta, \eta, t) + \dots \quad (2.21)$$

ve bu açılım (2.20)'de kullanılırsa; ε 'nin aynı kuvvetlerinin katsayıları eşitlenerek ε mertebesinde problemler hiyerarjisi elde edilir. Bu çalışma kapsamında sırasıyla ilk iki pertürbasyon problemi olan, $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ ve $\mathcal{O}(1)$ mertebelerindeki problemlerin incelenmesi yeterli olacaktır:

$$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right): \quad -\omega \frac{\partial f_0}{\partial \theta} + 6kf_0^2 \frac{\partial f_0}{\partial \theta} + k^3 \frac{\partial^3 f_0}{\partial \theta^3} = 0, \quad (2.22)$$

$$\mathcal{O}(1): \quad \mathcal{L}_h f_1 \equiv -\omega \frac{\partial f_1}{\partial \theta} + 6k \frac{\partial (f_0^2 f_1)}{\partial \theta} + k^3 \frac{\partial^3 f_1}{\partial \theta^3} = \mathcal{M}. \quad (2.23)$$

Burada,

$$\mathcal{M} = -\left(\frac{\partial f_0}{\partial t} + 6f_0^2 \frac{\partial f_0}{\partial \eta} + 3k^2 \frac{\partial^3 f_0}{\partial \eta \partial \theta^2} + 3kk_\eta \frac{\partial^2 f_0}{\partial \theta^2} + \frac{f_0}{2t+t_0} \right) \quad (2.24)$$

dir.

2.3.1 ε^{-1} mertebeli problemin çözümü

(2.22) ile verilen ε^{-1} mertebeli problemdeki denklem, [25]'deki mKdV denkleminin ilerleyen dalga çözümünü bulurken indirgenen denklem ile aynı yapıdadır. ε^{-1} mertebeli problemi çözmek için (2.22) denklemini bir kez θ değişkenine göre integre edilirse,

$$-\omega f_0 + 6k \frac{f_0^3}{3} + k^3 \frac{\partial^2 f_0}{\partial \theta^2} = D_1 \quad (2.25)$$

elde edilir. Burada, D_1 keyfi bir sabittir. (2.25) denklemi $\frac{\partial f_0}{\partial \theta}$ ile çarpılır ve sonrasında integre edilirse, D_2 keyfi bir sabiti göstermek üzere

$$-\omega \frac{f_0^2}{2} + k \frac{f_0^4}{2} + \frac{k^3}{2} \left(\frac{\partial f_0}{\partial \theta} \right)^2 = D_1 f_0 + D_2 \quad (2.26)$$

elde edilir. Gerekli düzenlemelerin ardından ($\omega = kV$ olduğu da göz önünde bulundurulursa), (2.26) denklemi,

$$k^2 \left(\frac{\partial f_0}{\partial \theta} \right)^2 = -f_0^4 + V f_0^2 + 2D_1 f_0 + D_2 \quad (2.27)$$

ya da

$$k^2 \left(\frac{\partial f_0}{\partial \theta} \right)^2 = (\alpha_1 - f_0)(f_0 - \alpha_2)(f_0 - \alpha_3)(f_0 - \alpha_4) \quad (2.28)$$

halini alır. (2.28) denkleminin sağ yanında yer alan α_1 , α_2 , α_3 ve α_4 dördüncü dereceden polinomun reel kökleridir. Ayrıca, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$ 'dır ve bu denklem kullanılarak α_4 diğer kökler cinsinden elde edilebilir. Bu çalışma modülasyon teorisi üzerine inşaa edildiğinden, α_i 'ler ($i = 1, 2, 3$) η ve t 'nin fonksiyonları olarak kabul edilmektedirler. Diğer yandan, kararlı (stabil) ilerleyen dalga çözümü için $\alpha_1 > f_0 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4$ eşitsizliği sağlanmalıdır [50]. (2.28) denklemi integre edilirse ;

$$\int_{f_0}^a \frac{df_0}{\sqrt{(\alpha_1 - f_0)(f_0 - \alpha_2)(f_0 - \alpha_3)(f_0 - \alpha_4)}} = \frac{1}{k}(\theta - \theta_0) \quad (2.29)$$

olur. (2.29)'de yer alan eliptik integral [50] yardımıyla

$$\frac{2F(\varphi, m)}{\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}} = \frac{1}{k}(\theta - \theta_0) \quad (2.30)$$

olarak yazılır. $F(\varphi, m)$ birinci tip tam olmayan eliptik integrali göstermektedir ve

$$\varphi = \arcsin \sqrt{\frac{(\alpha_2 - \alpha_4)(\alpha_1 - f_0)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(f_0 - \alpha_4)}}, \quad m = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_4)}{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)} \quad (2.31)$$

dir. m modülü ifade ederken, (2.29) denkleminde yer alan faz farkı terimi θ_0 ise, bir integrasyon sabitidir. θ_0 teriminin daha yüksek mertebeden asimptotik açılım kullanılarak belirlenebileceği bilinmektedir. [63] çalışmasında, KdV denkleminin ilerleyen dalga çözümündeki faz farkı terimi için daha yüksek mertebeden Whitham denklemleri türetilmiştir. İlk mertebe denklemin çözümündeki yavaş faz farkı belirlenmiş ve bu faz farkının, basamak tipi başlangıç koşulları için bir sabit

olduğu sonucuna varılmıştır. Bu inceleme tez konusunun kapsamı dışındadır. Tez çalışmasında, ilk iki pertürbasyon problemi ile ilgilenildiğinden, θ_0 doğrudan sayısal çözümlerle karşılaştırma yapılarak belirlenecektir.

Gerekli ara işlemler sonucunda f_0 'ın çözümü aşağıdaki gibi elde edilir:

$$f_0(\theta, \eta, t) = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + \frac{(2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3)}{(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3) + (\alpha_1 - \alpha_2)\text{sn}^2[U_1(\theta - \theta_0), m]}. \quad (2.32)$$

(2.32)'da yer alan sn Jacobi eliptik sinüs fonksiyonudur ve $U_1 = \sqrt{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3)}/2k$ 'dir.

Bu çalışmada amacımız $\text{cmKdV}(f)$ - Whitham modülasyon sistemini köşegen forma en yakın halde yazmaktır. Bu amaçla, Whitham sistemini daha sade formda elde edebilmek için aşağıdaki tanımlamalar yapılır [18];

$$\begin{aligned} r_1 &\equiv r_1(\eta, t) = \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2}, \\ r_2 &\equiv r_2(\eta, t) = \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2}, \\ r_3 &\equiv r_3(\eta, t) = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Burada, r_1, r_2, r_3 Riemann tipi değişkenler olarak adlandırılmaktadır ve $r_3 > r_2 > r_1$ 'dir. ε^{-1} mertebeli problemin çözümü olan f_0 , (2.33) ile verilen Riemann tipi değişkenler cinsinden yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

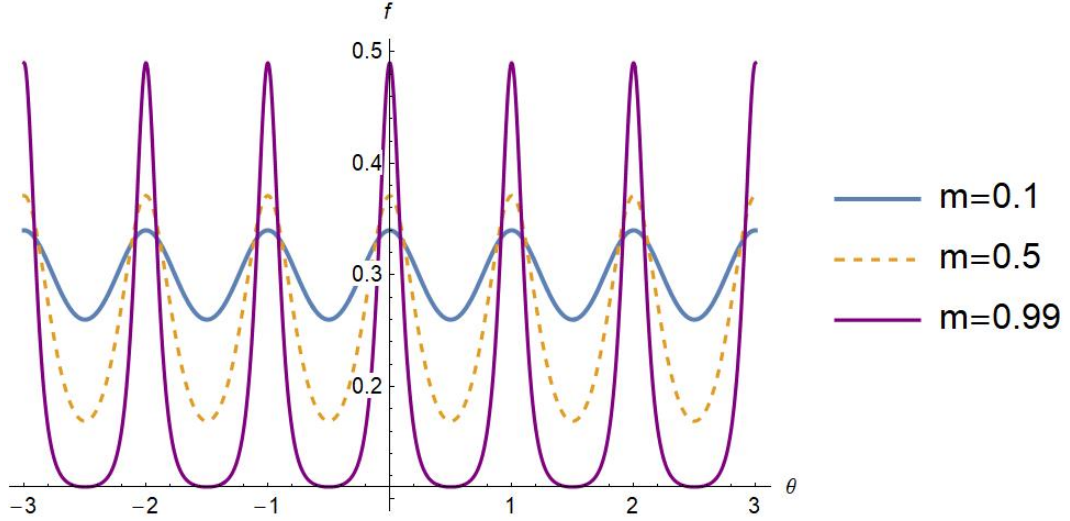
$$f_0(\theta, \eta, t) = r_3 - r_2 + r_1 + \frac{2(r_2 - r_1)(r_3 + r_1)(1 - \text{sn}^2[2(\theta - \theta_0)K, m])}{r_3 + r_1 + (r_2 - r_1)\text{sn}^2[2(\theta - \theta_0)K, m]} \quad (2.34)$$

olur. (2.34) denklemindeki $K \equiv K(m(\eta, t))$ birinci tip tam eliptik integraldir. Ek olarak, modül, dalga sayısı ve faz hızı sırasıyla Riemann tipi değişkenleri r_1, r_2, r_3 cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilir (EK A, denklem 257):

$$m = \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_3^2 - r_1^2}, \quad k^2 = \frac{r_3^2 - r_1^2}{4K^2}, \quad V = 2(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2). \quad (2.35)$$

Ayrıca, (2.17) integrale edilerek, hızlı değişken olan θ aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$\theta(\eta, t) = \int_{-L}^{\eta} \frac{k(x', t)}{\varepsilon} dx' - \int_0^t \frac{k(\eta, t')V(\eta, t')}{\varepsilon} dt'. \quad (2.36)$$



Şekil 2.2 : (2.34) ile verilen f_0 'ın farklı modül değerleri için grafikleri.

$\text{sn}^2(z, m)$ eliptik fonksiyonu $2K(m)$ periyotlu bir fonksiyon olduğundan f_0 fonksiyonunun periyodu 1 olarak bulunur. Şekil 2.2'den de görüleceği gibi $m \rightarrow 1$ iken $\text{sn}(z, m) \rightarrow \text{sech}(z)$ olduğundan soliter dalga çözüm formu; $m \rightarrow 0$ iken $\text{sn}(z, m) \rightarrow \sin(z)$ olduğundan harmonik dalga çözümü elde edilir. Burada, f_0 'ın açık ifadesinde ortaya çıkan r_1, r_2, r_3 'ü tam olarak belirlemek için bir üst merteye probleme ihtiyaç vardır. Bu sebeple f_0 bir üst merteye problem olan (2.23)'te yerine yazıldığında denklemin sağ yanında θ 'ya bağlı bir sekülerlik oluştuğu görülmektedir. Yani terimler θ 'ya göre fazla büyümektedir. Oluşan bu sekülerliği önlemek için kendine eş (adjoint) problem aşağıdaki gibi tanımlanmalıdır:

ρ , $\mathcal{L}_h u = 0$, yani (2.23) denkleminin homojen kısmının kendine eş (adjoint) probleminin çözümü olmak üzere,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_h^A \rho &= 0, \\ \mathcal{L}_h^A &= \omega \frac{\partial}{\partial \theta} - 6k f_0^2 \frac{\partial}{\partial \theta} - k^3 \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \end{aligned} \quad (2.37)$$

denklemini sağlar. Seküler terimleri ortadan kaldırmak için (2.23) denkleminde elde edilen aşağıdaki bağıntı kullanılır:

$$\int_0^1 \left[\rho \mathcal{L}_h f_1 - f_1 \mathcal{L}_h^A \rho \right] d\theta = \int_0^1 \rho \mathcal{M} d\theta = 0. \quad (2.38)$$

(2.38) eş problemi için iki lineer bağımsız çözüme ihtiyaç vardır. Bunlardan ilki olarak, $\rho = 1$ alınabilir. (2.38)'nin diğer bir çözümü olarak da $\rho = f_0$ alınabileceği kolaylıkla görülebilir. Bu iki lineer bağımsız çözüm, (2.38)'da yerine yazıldığında,

$$\int_0^1 \mathcal{M} d\theta = 0, \quad \int_0^1 f_0 \mathcal{M} d\theta = 0. \quad (2.39)$$

sekülerlik koşulları elde edilir. Kısmi integrasyon tekniği kullanılarak aşağıdaki özelliklerin sağlandığı uzun fakat standart bir hesaplama ile gösterilebilir:

$$\int_0^1 \frac{\partial^i f_0}{\partial \theta^i} d\theta = 0, \quad \int_0^1 f_0 \frac{\partial^j f_0}{\partial \theta^j} d\theta = 0 \quad i = 1, 2, \dots \text{ ve } j = 1, 3, \dots \quad (2.40)$$

ve

$$\int_0^1 f_0 \frac{\partial^2 f_0}{\partial \theta^2} d\theta = - \int_0^1 \left(\frac{\partial f_0}{\partial \theta} \right)^2 d\theta. \quad (2.41)$$

(2.40) ve (2.41) denklemleri (2.39)'da kullanılırsa cmKdV(f) denkleminin sekülerlik koşulları açık olarak aşağıdaki gibi elde edilirler:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 f_0 d\theta + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(2 \int_0^1 f_0^3 d\theta \right) + \frac{1}{2t + t_0} \int_0^1 f_0 d\theta = 0 \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 f_0^2 d\theta + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(3 \int_0^1 f_0^4 - 3k^2 \int_0^1 \left(\frac{\partial f_0}{\partial \theta} \right)^2 d\theta \right) + \frac{2}{2t + t_0} \int_0^1 f_0^2 d\theta = 0. \quad (2.43)$$

(2.42) ve (2.43)'de yer alan integraller (2.34) ile verilen f_0 ve eliptik fonksiyonların özelliklerinden yararlanılarak hesaplanır [50] (EK A, denklem 338.02, 338.03, 338.04 ve 362.25).

Dikkat edilirse, (2.34) ile verilen f_0 çözümünü tam olarak bulabilmek için Riemann değişkenlerinin (r_1, r_2, r_3) belirlenmesi gerekir. Bu Riemann değişkenleri için (2.18) dalgaların korunumu yasası ve (2.42)-(2.43) sekülerlik koşullarından elde edilen üç tane denklemin çözülmesi gerekecektir. Böylece, (2.18), (2.42) ve (2.43) denklemlerindeki terimler sırasıyla hesaplanarak, cmKdV(f) denkleminin Whitham modülasyon denklemleri türetilecektir.

2.3.2 Dalgaların korunumu yasası

Dalgaların korunumu yasası, (2.18)'de

$$k_t + (kV)_\eta = 0$$

olarak verilmişti. Burada, (2.35) ile verilen,

$$m = \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_3^2 - r_1^2}, \quad k^2 = \frac{r_3^2 - r_1^2}{4K^2}, \quad V = 2(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)$$

bağıntıları kullanılır ve r_i 'lerin ($i = 1, 2, 3$), η ve t 'nin fonksiyonu olduğu da göz önünde bulundurularak (2.18)'te yerine yazılırsa

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\sqrt{\frac{r_3^2 - r_1^2}{4K^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(2\sqrt{\frac{r_3^2 - r_1^2}{4K^2}} (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) \right) = 0 \quad (2.44)$$

olur. Türev alma kuralları yardımıyla,

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\frac{\partial}{\partial t} \left(\sqrt{r_3^2 - r_1^2} \right) 2K - 2\sqrt{r_3^2 - r_1^2} \frac{dK}{dm} \frac{\partial m}{\partial t}}{4K^2} \quad (2.45)$$

ve

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (kV) = \frac{\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\sqrt{r_3^2 - r_1^2} (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) \right) K - 2\sqrt{r_3^2 - r_1^2} (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) \frac{dK}{d\eta} \frac{\partial m}{\partial \eta}}{K^2} \quad (2.46)$$

bağıntıları elde edilir. Burada $K \equiv K(m(\eta, t))$, birinci tip tam eliptik integraldir. Ayrıca, $\frac{dK}{dm}$ türev terimi aşağıdaki gibi hesaplanır (EK A, denklem 710):

$$\frac{dK}{dm} = \frac{E - (1 - m)K}{2m(1 - m)} \quad (2.47)$$

Bu ifadede yer alan $E \equiv E(m(\eta, t))$ ikinci tip tam eliptik integrali göstermektedir. (2.45) ve (2.46)'te yerine yazılır ve gerekli ara işlemler sonucunda,

$$A_{11}r_{1t} + A_{12}r_{2t} + A_{13}r_{3t} + B_{11}r_{1\eta} + B_{12}r_{2\eta} + B_{13}r_{3\eta} = 0 \quad (2.48)$$

formunda bir yapı elde edilir. A_{11} , A_{12} , A_{13} , B_{11} , B_{12} , B_{13} 'ler (η, t) değişkenlerine bağlı katsayılar ve açık ifadeleri EK B'de yer almaktadır. Böylelikle ilk modülasyon denklemi elde edilmiş olur.

2.3.3 Sekülerlik koşulları

(2.42) ve (2.43) ile sırasıyla verilen aşağıdaki sekülerlik koşullarını göz önüne alalım:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 f_0 d\theta + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(2 \int_0^1 f_0^3 d\theta \right) + \frac{1}{2t + t_0} \int_0^1 f_0 d\theta = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 f_0^2 d\theta + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(3 \int_0^1 f_0^4 - 3k^2 \int_0^1 \left(\frac{\partial f_0}{\partial \theta} \right)^2 d\theta \right) + \frac{2}{2t+t_0} \int_0^1 f_0^2 d\theta = 0.$$

Dikkat edilecek olursa, bu koşulların hesaplanması için

$$\int_0^1 f_0 d\theta, \int_0^1 f_0^2 d\theta, \int_0^1 f_0^3 d\theta, \int_0^1 f_0^4 d\theta, \int_0^1 \left(\frac{\partial f_0}{\partial \theta} \right)^2 d\theta$$

integrallerinin hesaplanması gerekmektedir. Ancak, (2.42) ve (2.43)'te yer alan integralleri hesaplayabilmek için yararlanılan yardımcı kaynağa [50] bakıldığında (EK A, denklem 338.04) f_0 'ı

$$f_0(\theta, \eta, t) = X + Y \frac{\text{cn}^2[2(\theta - \theta_0)K, m]}{1 - n \text{sn}^2[2(\theta - \theta_0)K, m]} \quad (2.49)$$

formunda yazmanın daha uygun olduğu görülmektedir. Yapılan düzenlemelerin ardından

$$I_1 = \int_0^1 f_0 d\theta = \int_0^1 \left\{ X + Y \frac{\text{cn}^2[2(\theta - \theta_0)K, m]}{1 - n \text{sn}^2[2(\theta - \theta_0)K, m]} \right\} d\theta \quad (2.50)$$

olur. Burada,

$$X = r_3 - r_2 + r_1, \quad Y = 2(r_2 - r_1), \quad n = \frac{(r_1 - r_2)}{(r_3 + r_1)} \quad (2.51)$$

dir. Hesapların ifadelerinde modülasyon denkleminin inşasında önemli olmadığı için, θ_0 ihmal edilecektir ve çalışmanın devamında yapılan nümerik hesaplarla bulunacaktır. Bu durumda,

$$I_1 = \int_0^1 \left\{ X + Y \frac{\text{cn}^2[2\theta K, m]}{1 - n \text{sn}^2[2\theta K, m]} \right\} d\theta \quad (2.52)$$

olur. I_1 integralini hesaplayabilmek için, $2\theta K = v$ değişken dönüşümü yapılırsa, I_1 aşağıdaki gibi yeniden düzenlenir:

$$I_1 = \int_0^{2K} \left\{ X + Y \frac{\text{cn}^2[v, m]}{1 - n \text{sn}^2[v, m]} \right\} \frac{dv}{2K} = X + \frac{Y}{2K} X_1. \quad (2.53)$$

Burada, $X_1 = \int_0^{2K} \frac{\text{cn}^2[v, m]}{1 - n \text{sn}^2[v, m]} dv$ şeklinde tanımlanmıştır.

Yine yardımcı kaynak [50] yardımıyla (EK A, denklem 338.01)

$$\int \frac{\text{cn}^2[v, m]}{1 - n \text{sn}^2[v, m]} dv = \frac{1}{n} \{ v + (n-1)\Pi(\varphi, n, m) \} \quad (2.54)$$

bağıntısı bilinmektedir. Burada, $\Pi(\varphi, n, m)$ üçüncü tip tam olmayan Legendre eliptik integralini (Legendre's incomplete elliptic integral of the third kind) göstermektedir (EK A, denklem 400). İntegralleri tam eliptik fonksiyonlar cinsinden hesaplama gerekliliğinden dolayı, X_1

$$\begin{aligned} X_1 &= \int_0^{2K} \frac{\text{cn}^2[v, m]}{1 - n \text{sn}^2[v, m]} dv \\ &= \int_0^K \frac{\text{cn}^2[v, m]}{1 - n \text{sn}^2[v, m]} dv + \int_K^{2K} \frac{\text{cn}^2[v, m]}{1 - n \text{sn}^2[v, m]} dv \end{aligned} \quad (2.55)$$

formunda yazılmalıdır. İkinci integralin de sınırlarını aynı yapmak için $\Omega = 2K - v$ değişken dönüşümü uygulanır ve EK A (denklem 122.00 ve 122.04) dan, $\text{cn}(2K - \Omega) = -\text{cn}\Omega$ ve $\text{sn}(2K - \Omega) = \text{sn}\Omega$ bağıntıları kullanılırsa, X_1 aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$X_1 = 2 \int_0^K \frac{\text{cn}^2[v, m]}{1 - n \text{sn}^2[v, m]} dv. \quad (2.56)$$

Böylelikle, (2.54)'de sınırlar yerine yazıldığında,

$$X_1 = \frac{2K}{n} + 2 \frac{n-1}{n} \Pi(n, m) \quad (2.57)$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned} I_1 &= X + \frac{Y}{2K} X_1 = X + \frac{Y}{2K} \left\{ \frac{2K}{n} + 2 \frac{n-1}{n} \Pi(n, m) \right\} \\ &= X + \frac{Y}{n} + \frac{Y}{K} \frac{n-1}{n} \Pi(n, m) \end{aligned} \quad (2.58)$$

dir. Diğer integraller de benzer analiz yapılarak yine yardımcı kaynak [50] yardımıyla (EK A, denklem 338.02, 338.03, 338.04 ve 362.25)

$$I_2 = \int_0^1 f_0^2 d\theta = r_1^2 + r_2^2 - r_3^2 + \frac{E(-2r_1^2 + 2r_3^2)}{K},$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^1 f_0^3 d\theta \\ &= \frac{2\Pi(r_2 + r_3)(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)}{K} \\ &\quad - (r_1^3 + r_2^3 + r_2^2 r_3 + r_2 r_3^2 + r_3^3 + r_1^2 (r_2 + r_3) + r_1 (r_2 + r_3)^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_4 &= \int_0^1 f_0^4 d\theta \\
&= \frac{-8(3\Pi r_1 r_2 r_3 (r_2 + r_3) + (r_1^2 - r_3^2)(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2))}{3K} \\
&\quad + \frac{3r_1^4 + 3r_2^4 + 2r_2^2 r_3^2 - 5r_3^4 + 12r_1 r_2 r_3 (r_2 + r_3) + 2r_1^2 (5r_2^2 + 6r_2 r_3 + r_3^2)}{3}, \\
I_5 &= \int_0^1 \left(\frac{\partial f_0}{\partial \theta} \right)^2 d\theta \\
&= -\frac{8K^2 (r_2 + r_3) (r_1 (2r_2 + r_3) + r_3 (r_2 - r_3))}{3(r_1 - r_3)} \\
&\quad + 16K \frac{\Pi r_1 r_2 r_3 (r_2 + r_3)}{(r_1 - r_3)(r_1 + r_3)} - 8K \frac{(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)(r_3^2 - r_1^2)E}{3(r_1 - r_3)(r_1 + r_3)} \quad (2.59)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada, I_1, I_2, I_3, I_4 ve I_5 integrallerinin sonuçlarında yer alan $K(m)$, $E(m)$ ve $\Pi(n, m)$ yerine kısalık olması amacıyla sırasıyla K, E ve Π yazılmıştır ve bunlar sırasıyla birinci tip, ikinci tip ve üçüncü tip tam eliptik integrali temsil etmektedir. Ayrıca yine integrallerin açık ifadelerinde karşılaşılan r_1, r_2, r_3 ' ün η ve t yavaş değişkenlerinin birer fonksiyonu olduğuna dikkat edilmelidir. Böylelikle sekülerlik koşullarını hesaplamak için ilk aşama tamamlanmış olur. Şimdi de, (2.42) ile verilen birinci sekülerlik koşulunun sol yanında yer alan I_1 ve I_3 integralleri yerlerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 f_0 d\theta &+ 2 \frac{\partial}{\partial \eta} \int_0^1 f_0^3 d\theta + \frac{1}{2t + t_0} \int_0^1 f_0 d\theta \\
&= A_{21} r_{1t} + A_{22} r_{2t} + A_{23} r_{3t} + B_{21} r_{1\eta} + B_{22} r_{2\eta} + B_{23} r_{3\eta} + C_1 \\
&= 0 \quad (2.60)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada, A_{21}, A_{22}, A_{23} ve B_{21}, B_{22}, B_{23} ' ün açık ifadelerine EK B'den ulaşılabilir. Ayrıca, C_1 silindirik terimi göstermektedir ve

$$C_1 = \frac{1}{2t + t_0} \int_0^1 f_0 d\theta \quad (2.61)$$

ifadesiyle verilmektedir (EK B). Sekülerlik koşullarından ikincisi olan (2.43) için de benzer biçimde sırasıyla gerekli olan türevler hesaplanır ve sonra (2.43) denkleminde

yerlerine yazılırlarsa,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 f_0^2 d\theta + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(3 \int_0^1 f_0^4 - 3k^2 \int_0^1 \left(\frac{\partial f_0}{\partial \theta} \right)^2 d\theta \right) + \frac{2}{2t+t_0} \int_0^1 f_0^2 d\theta \\ = A_{31}r_{1t} + A_{32}r_{2t} + A_{33}r_{3t} + B_{31}r_{1\eta} + B_{32}r_{2\eta} + B_{33}r_{3\eta} + C_2 \\ = 0 \end{aligned} \quad (2.62)$$

şeklinde yazılır. Burada, A_{ij} , B_{ij} 'lerin ($i = 3, j = 1, 2, 3$) ve aşağıdaki integrale temsil edilen C_2 'nin

$$C_2 = \frac{2}{2t+t_0} \int_0^1 f_0^2 d\theta \quad (2.63)$$

açık ifadeleri EK B'de mevcuttur.

2.3.4 cmKdV(f)-Whitham sistemi

Modülasyon denklemlerinin son halleri (2.48), (2.60) ve (2.62) birlikte düşünülürse, r_1, r_2, r_3 fonksiyonları için aşağıdaki birinci mertebeden kuazilineer denklem sistemi elde edilir:

$$\mathbf{A}\mathbf{r}_t + \mathbf{B}\mathbf{r}_\eta + \mathbf{C} = \mathbf{0} \quad (2.64)$$

Burada \mathbf{A} ve \mathbf{B} 3×3 'lük matrisleri, $\mathbf{r}_t, \mathbf{r}_\eta$ ve \mathbf{C} vektörleri aşağıdaki gibi tanımlanmışlardır:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_t = \begin{pmatrix} r_{1t} \\ r_{2t} \\ r_{3t} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{r}_\eta = \begin{pmatrix} r_{1\eta} \\ r_{2\eta} \\ r_{3\eta} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Ayrıca \mathbf{A} ve \mathbf{B} matrisleri tekil matrisler değildirler (yani $\det \mathbf{A} \neq 0$ ve $\det \mathbf{B} \neq 0$ 'dır). Dolayısıyla (2.64) ile verilen denklemin her iki yanından \mathbf{A}^{-1} matrisi ile çarpılırsa,

$$\mathbf{r}_t + \mathbf{V}\mathbf{r}_\eta + \frac{1}{2t+t_0}\mathbf{h} = \mathbf{0} \quad (2.66)$$

sistemi elde edilmiş olur. Açıktır ki bu denklem sistemi kuazilineer denklem sistemidir ve

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} v_1 & 0 & 0 \\ 0 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & v_3 \end{pmatrix}$$

şeklinde köşegen elemanları v_i ($i = 1, 2, 3$), olan bir köşegen matristir. Bu matrisin elemanları mKdV(f) denkleminin Whitham karakteristik hızlarını verir [18] ve açık ifadeleri aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned}
v_1 &= 2(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) - \frac{4K(r_2^2 - r_1^2)}{K - E}, \\
v_2 &= 2(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) - \frac{4K(r_2^2 - r_1^2)(r_3^2 - r_2^2)}{E(r_3^2 - r_1^2) - K(r_3^2 - r_2^2)}, \\
v_3 &= 2(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) + \frac{4(r_3^2 - r_2^2)K}{E}.
\end{aligned} \tag{2.67}$$

Ayrıca, \mathbf{h} vektörünün bileşenleri de silindirik terimi temsil etmektedir ve

$$\begin{aligned}
h_1 &= \frac{K(r_1 N_1 + r_2 r_3 N_2)}{(r_1^2 - r_3^2)(K - E)}, \\
h_2 &= -\frac{K(r_2 N_1 + r_1 r_3 N_2)}{E(r_3^2 - r_1^2) - K(r_3^2 - r_2^2)}, \\
h_3 &= \frac{K(r_3 N_1 + r_1 r_2 N_2)}{(r_3^2 - r_1^2)E}
\end{aligned} \tag{2.68}$$

şeklinde dirler. $K = K(m)$, $E = E(m)$ ve $\Pi = \Pi(n, m)$ sırasıyla birinci, ikinci ve üçüncü tip tam eliptik integralleri göstermektedir. Ek olarak,

$$\begin{aligned}
n &= \frac{r_1 - r_2}{r_3 + r_1}, \quad N_1 = \frac{K(r_1^2 + r_2^2 - r_3^2) - 2(r_3^2 - r_1^2)E}{K}, \\
N_2 &= \frac{K(r_1 + r_2 + r_3) - 2(r_2 + r_3)\Pi}{K}.
\end{aligned} \tag{2.69}$$

olarak ifade edilmektedir.

(2.66) denkleminde silindirik terim olmadığında, yani \mathbf{h} terimi özdeş olarak sıfır alındığında cmKdV(f) için elde edilen Whitham sistemi mKdV(f) için Driscoll ve Oneil tarafından bulunan Whitham sistemine indirgenir [18].

2.4 mKdV(f) ve cmKdV(f) Denklemlerinin Sayısal Çözümleri

Bölüm 2.2'de (2+1) boyutlu mKP(f) denklemi, özel bir çözüm ve parabolik cephe boyunca ilerlediği varsayımıyla (1+1) boyutlu cmKdV(f) denklemine indirgenmiştir.

Bölüm 2.3'te ise önerilen çözüm formu sonucu elde edilen $cmKdV(f)$ denkleminin, Whitham modülasyon denklemleri bir asimptotik analiz olan çoklu ölçekler yöntemi kullanılarak türetilmiştir. Ayrıca, $cmKdV(f)$ -Whitham sisteminin özel durumda, yani silindirik terim özdeş olarak sıfır iken $mKdV(f)$ -Whitham sistemine indirildiği gözlemlenmiştir. Bu nedenle, bu bölümde $mKdV(f)$ denkleminin sayısal çözümlerine de yer verilecektir. Öte yandan, $mKdV(f)$ ve $cmKdV(f)$ denklemleri aynı f_0 çözümüne (ilk mertebe problemin çözümü) sahip olduğundan $mKdV(f)$ denklemi için şok dalga çözümleri için (2.2) başlangıç koşulunda kullanılan v_r ve v_l sabitlere bağlı olarak yapılan sınıflandırma; [25,26]'deki sonuçlar da göz önünde bulundurularak, $cmKdV(f)$ denklemi için sayısal çözümler kullanılarak tekrarlanacaktır.

Daha sonra (1+1) boyutlu $cmKdV(f)$ denklemi ve klasik $mKdV(f)$ denklemlerine ait Whitham modülasyon denklemlerinin sayısal çözümleri ile $mKdV(f)$ ve $cmKdV(f)$ denklemlerinin doğrudan sayısal çözümlerinin bulunması amaçlanmaktadır. Bulunan sonuçlar karşılaştırılarak yöntemin uygunluğu da gösterilecektir. $cmKdV(f)$ denklemi için olan (2.66) Whitham modülasyon denklem sistemi köşegen değildir ve bu özellik analitik çözümü bulmayı olanaksız kılmaktadır. Bu yüzden analitik çözüm yerine, sonlu farklar üzerine birçok yöntemin kullanılabileceği Shampine [53] tarafından geliştirilen MATLAB temelli sayısal çözücü programı kullanılacaktır. (1+1) boyutlu $mKdV(f)$ ve $cmKdV(f)$ denklemlerinin sayısal çözümü için mevcutlar içinde en etkin spektral tabanlı sayısal yöntem olarak adlandırılan ve birçok nonlineer evrim tipi diferansiyel denklemin çözümünde hızı ve doğruluğu test edilmiş, "Exponential Time Differencing Runge Kutta-4" ETDRK4 yönteminin modifiye hali kullanılacaktır [51,52]. Daha sonra bu iki sayısal hesaplama sonucu elde edilen çözümler karşılaştırılacaktır.

2.4.1 $mKdV(f)$ ve $cmKdV(f)$ denklemlerinin asimptotik çözümü

İlk olarak, $mKdV(f)$ ve $cmKdV(f)$ denklemlerinin Whitham sistemlerinin sayısal çözümlerini bulacağız.

Klasik $mKdV(f)$ denklemine ait Whitham sistemi için Riemann değişkenlerinin sağlaması gereken sınır koşulları başlangıç koşullarının sınırdaki değerleri olarak sabitlenmiştir. Fakat, asıl problemimiz olan $cmKdV(f)$ denkleminin sağlaması gereken

sınır koşulları $S(t)$ fonksiyonuna bağlı olarak değiştiği için cmKdV(f) denkleminin Whitham sistemi için sınır koşulları da zamana bağlı olarak belirlenmelidir. cmKdV(f) denkleminin Whitham sistemi için sol sınır uç ($m \rightarrow 0$) ve sağ sınır uç ($m \rightarrow 1$) için, (2.66) denkleminde η uzaysal değişkenine bağlı türev terimleri ihmal edilerek elde edilen diferansiyel denklem sistemi çözülecektir:

$$\mathbf{r}_t + \frac{1}{2t + t_0} \mathbf{h} = 0$$

Bunun için (2.68) ile verilen \mathbf{h} silindirik terimin bileşenlerinin sırasıyla $m \rightarrow 0$ ve $m \rightarrow 1$ durumlarında limit değerleri hesaplanacaktır.

Modülü temsil eden m 'nin Riemann değişkenleri cinsinden ifadesi

$$m = \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_3^2 - r_1^2}$$

idi. Buradan, $m \rightarrow 0$ iken $r_2 \rightarrow r_1$ ve $m \rightarrow 1$ iken $r_3 \rightarrow r_2$ olduğu görülür. Buna göre, h_i 'lerin ($i = 1, 2, 3$) $m \rightarrow 0$ ve $m \rightarrow 1$ durumundaki limitleri yardımcı kaynak [50] (Formül numarası: 111.00, 111.01) yardımıyla aşağıdaki gibi bulunur:

$$\lim_{m \rightarrow 0} h_1 = \frac{r_3^2}{r_1}, \quad \lim_{m \rightarrow 0} h_2 = \frac{r_3^2}{r_1}, \quad \lim_{m \rightarrow 0} h_3 = r_3, \quad (2.70)$$

$$\lim_{m \rightarrow 1} h_1 = r_1, \quad \lim_{m \rightarrow 1} h_2 = 2r_3, \quad \lim_{m \rightarrow 1} h_3 = 2r_3. \quad (2.71)$$

Uyarı 2.4.1 Dikkat edilirse, (2.70)'de $m \rightarrow 0$ iken h_1 ve h_2 terimlerinde paydada r_1 yer almaktadır. Bu sebeple, Riemann değişkeni r_1 için başlangıç koşulu sıfırdan farklı seçilmelidir.

Ayrıca, cmKdV denkleminin (2.2) basamak tipi başlangıç koşulu altında çözümünü arandığı için, (2.2) koşulu Riemann tipi değişkenleri olan r_1, r_2 ve r_3 cinsinden belirlenmelidir. Bu bu başlangıç koşulu aynı zamanda (2.66) Whitham sistemi için de geçerlidir. Böylece, Whitham sistemi için başlangıç koşulu aşağıdaki gibi belirlenir:

$$r_1(\eta, 0) = v_r, \quad r_2(\eta, 0) = \begin{cases} v_r, & \eta < 0 \\ v_l, & \eta \geq 0 \end{cases}, \quad r_3(\eta, 0) = v_l. \quad (2.72)$$

Daha önce de belirtildiği gibi (2.72)'de verilen parametreler için $v_l > v_r \geq 0$ eşitsizliği sağlanmaktadır. (2.72) başlangıç koşullarıyla birlikte, (2.70) ve (2.71) limit

değerleri, (4.60) adi diferansiyel denkleminde yerlerine yazılarak sırasıyla Riemann değişkenlerinin sol uç ve sağ uçtaki sınırları belirlenir. Buna göre, sırasıyla limit durumlarında Riemann değişkenleri

$m \rightarrow 0$ iken,

$$r_1(\eta, t) = r_2(\eta, t) \rightarrow \sqrt{\frac{2(v_r^2 - v_l^2)t + v_r^2 t_0}{2t + t_0}}, \quad r_3(\eta, t) \rightarrow v_l \sqrt{\frac{t_0}{2t + t_0}}, \quad (2.73)$$

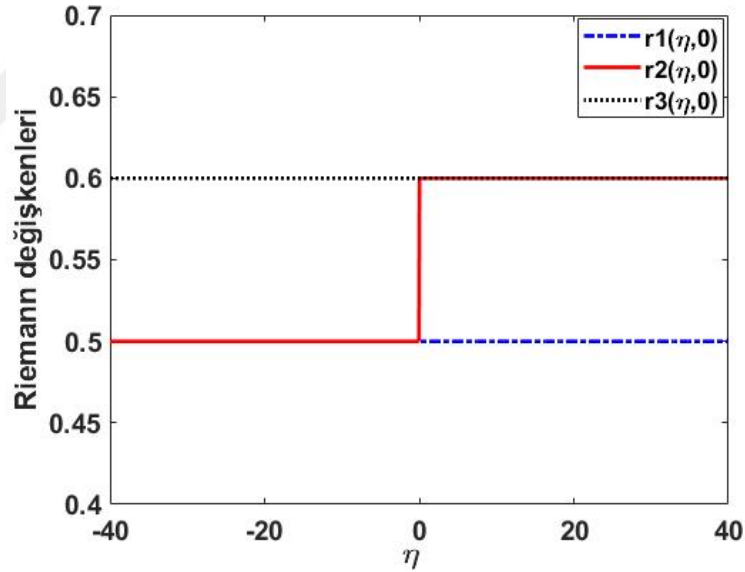
$m \rightarrow 1$ iken,

$$r_1(\eta, t) \rightarrow v_r \sqrt{\frac{t_0}{2t + t_0}}, \quad r_2(\eta, t) = r_3(\eta, t) \rightarrow v_l \frac{t_0}{2t + t_0} \quad (2.74)$$

olarak bulunurlar. (2.73) ile verilen r_1 ve r_2 göz önüne alındığında, reel değerli çözümler elde etmek için

$$2(v_r^2 - v_l^2)t + v_r^2 t_0 \geq 0 \quad (2.75)$$

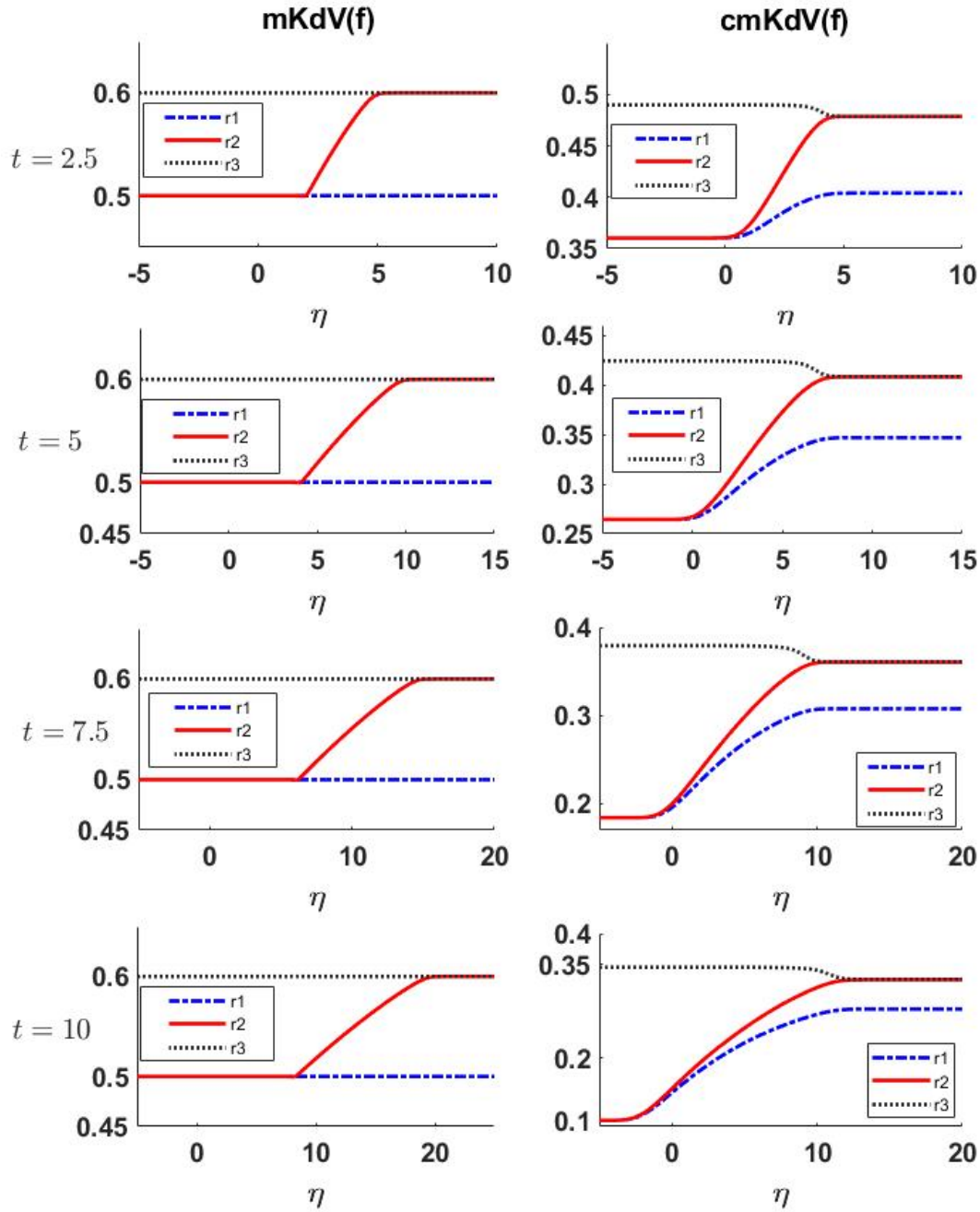
eşitsizliğin sağlanması gerektiği görülmüştür.



Şekil 2.3 : Riemann tipi değişkenler için $v_r = 0.5$ ve $v_l = 0.6$ seçimine karşı gelen (2.77) başlangıç koşulları ($t = 0$).

Uyarı 2.4.2 *cmKdV* denkleminin arka kenarında görülen DSW çözümleri incelendiğinde kritik bir t_{ca} değerinden sonra r_1 ve r_2 'nin kompleks değerli olduğu gözlemlenmiştir. (2.75) yardımıyla bu kritik değer

$$t_{ca} = \frac{t_0 v_r^2}{2(v_l^2 - v_r^2)} \quad (2.76)$$



Şekil 2.4 : Sol panelde mKdV(f) denklemi, sağ panelde cmKdV(f) denklemi için $t = 2.5, 5, 7.5$ ve $t = 10$ 'daki Whitham sistemlerinin çözümleri.

olarak bulunur. Dikkat edilecek olursa, (2.28) denkleminin sağ yanında yer alan aşağıdaki polinomun iki kökü kompleks eşlenik olmaktadır:

$$(\alpha_1 - f_0)(f_0 - \alpha_2)(f_0 - \alpha_3)(f_0 - \alpha_4) = 0$$

(2.33) denklemi yardımıyla, r_1 ve r_2 'nin kompleks olmasından α_1 ve α_2 'nin reel, α_3 ve α_4 kompleks eşlenik olduğu sonucuna varılır. Bu sebeple, $cmKdV(f)$ denkleminin periyodik ilerleyen dalga çözümü [18] kararlı (stabil) değildir. Fakat, bu durum $cmKdV(f)$ denkleminin doğrudan sayısal çözümlerinde gözlemlenmemiştir.

(2.75)'te elde edilen kısıtlamayla birlikte DSW çözümleri için $t_0 = 10$ seçimi için $v_r = 0.5$ ve $v_l = 0.6$ başlangıç koşulları ele alınmıştır (Şekil 2.3):

$$r_1(\eta, 0) = 0.5, r_2(\eta, 0) = \begin{cases} 0.5, & \eta < 0 \\ 0.6, & \eta \geq 0 \end{cases}, r_3(\eta, 0) = 0.6. \quad (2.77)$$

Benzer hesaplama (2.75) eşitsizliğini sağlayan farklı v_r ve v_l değerleri için de yapılabilir.

(2.66) $cmKdV$ -Whitham sisteminin, (2.77) başlangıç koşulları ve (2.70)-(2.71) sınır koşullarıyla birlikte sayısal çözümlerinin bulunmasında, Shampine [53] tarafından birinci mertebe hiperbolik kısmi türevli denklemler için geliştirilmiş MATLAB tabanlı sayısal çözücü kullanılmıştır. Hesaplarda iki basamaklı Lax-Wendrof yönteminin farklı bir türü kullanılmıştır. Sayısal çözümde η için, $[-160, 160]$ tanım aralığında $N = 2^{12}$ nokta kullanılmıştır. Çözümlerin grafikleri $t = 2.5, 5, 7.5$ ve $t = 10$ değerlerinde klasik $mKdV(f)$ ve $cmKdV(f)$ için, Şekil 2.4'de verilmiştir.

Şekil 2.4'den görüldüğü gibi $mKdV(f)$ denklemine ait Riemann değişkenlerinin sınırları sabit kalmakta iken, $cmKdV(f)$ denkleminde $r_1(\eta, t)$ ve $r_3(\eta, t)$ zamanla birbirine yaklaşmaktadır ve bütün Riemann değişkenlerinin seviyeleri zamanla düşmektedir. Bu aşamadan sonra, elde edilen bu sonuçların uyumluluğunu göstermek için (2.34) ile verilen f_0 ve (2.36) hızlı değişken olan θ kullanılarak $mKdV(f)$ ve $cmKdV(f)$ denklemlerinin dispersif şok dalga çözümleri, Şekil 2.11 ve Şekil 2.12'te çizdirilmiştir.

2.4.2 $mKdV(f)$ ve $cmKdV(f)$ denklemlerinin doğrudan sayısal çözümü

Klasik $mKdV(f)$ ve $cmKdV(f)$ denklemlerinin (2.2) başlangıç koşulu altında ve ilgili sınır koşullarıyla birlikte sayısal çözümlerini elde etmek için ETDRK4 (Exponential Time Differencing Fourth Order Runge-Kutta) [51,52] yönteminin modifiye versiyonu

kullanılacaktır. İlk olarak, kullanılacak doğrudan sayısal yöntem için sınır koşulları sabit olmalıdır. Klasik problemde, yani mKdV(f) denkleminin sınır koşulları sabittir. Ancak cmKdV(f) denkleminin sınır koşulları t 'nin bir fonksiyonudur. Dolayısıyla, aşağıdaki dönüşümü yaparak öncelikle sınır koşulları uygun hale getirilir:

$$f = S(t)\xi. \quad (2.78)$$

Burada, $S(t) = \frac{\sqrt{t_0}}{\sqrt{2t+t_0}}$ dir. (2.78) denkleminin (2.13) denkleminde kullanılmasıyla

$$\xi_t + 6S^2\xi^2\xi_\eta + \varepsilon^2\xi_\eta\eta\eta = 0 \quad (2.79)$$

olur. (2.78) dönüşümüyle birlikte, (2.79) denklemini için yeni sabit sınır koşulları sol tarafta $\xi_- = v_l$ iken sağ tarafta $\xi_+ = v_r$ olur.

Öte yandan, ETDRK4 yönteminin spektral doğruluğu için başlangıç koşulları düzgün ve periyodik olmalıdır. Bu nedenle, (2.79) denklemini η 'ya göre türetilir ve $\xi_\eta = z$ olarak tanımlanırsa,

$$z_t + 6S^2(\xi^2z)_\eta + \varepsilon^2z_\eta\eta\eta = 0 \quad (2.80)$$

denklemini elde edilir. (2.80) denkleminin Fourier dönüşümü uygulanır:

$$\hat{z}_t = \mathbf{L}\hat{z} + 6S^2\mathbf{N}(\hat{z}, t). \quad (2.81)$$

Bu bölüm ve devamında $\hat{z} = F(z)$, z 'nin Fourier dönüşümünü ve $z = F^{-1}(\hat{z})$ ise ters Fourier dönüşümünü göstermektedir. Ek olarak, \mathbf{L} lineer terimi ve \mathbf{N} non-lineer terimi göstermektedir. Sonuç olarak, (2.13) denklemini aşağıdaki adi diferansiyel denklem sistemine indirgenir:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\hat{z} &= -i\varepsilon^2k^3\hat{z}, \\ \mathbf{N}(\hat{z}, t) &= -ikF\left[\left(\xi_- + \int_{-R}^{\eta} F^{-1}(\hat{z})dy\right)^2 F^{-1}(\hat{z})\right] \end{aligned} \quad (2.82)$$

Burada, R bir pozitif sabiti göstermektedir. Yukarıda görülen Fourier uzayındaki denklem sistemini çözmek için Exponential-Time Differencing fourth-order Runge Kutta yöntemi (ETDRK4) [51,52] kullanılır. Klasik mKdV(f) denkleminin cmKdV(f) denkleminin tek farkı, nonlineer terim olan \mathbf{N} 'nin zamana bağlı terimler içermesidir. ETDRK4 yönteminin spektral doğruluğu için z 'nin başlangıç koşulları düzgün ve periyodik olmalıdır. Fakat, v için olan (2.2) başlangıç koşullarından

$$z(\eta, 0) = -\delta(\eta) \quad (2.83)$$

elde edilir. Burada, δ Dirac delta fonksiyonudur. Bu nedenle (2.83) başlangıç koşulu aşağıdaki gibi yeniden düzenlenebilir:

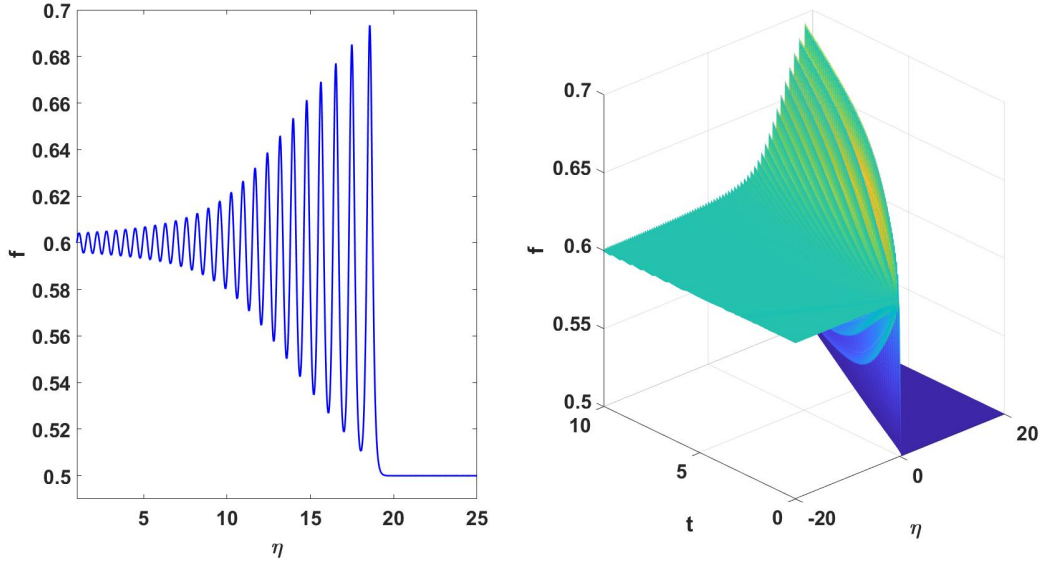
$$z(\eta, 0) = -\frac{\tilde{K}}{2} \operatorname{sech}^2(\tilde{K}\eta). \quad (2.84)$$

Burada, \tilde{K} büyük pozitif bir sabittir. Yapılan Fourier dönüşümüyle (2.80) denklemi (2.81) denkleme dönüşür. (2.81) denkleminin çözümünde uygulanan ETDRK4 yöntemi için Fourier modu $N = 2^{15}$, maddesel koordinat için $[-160, 160]$ tanım aralığı ve zaman ayrıklaştırma aralığı olarak 10^{-4} alınarak, gerekli sayısal hesaplar yapılmıştır. Ayrıca, $t_0 = 10$, $\varepsilon^2 = 5 \cdot 10^{-3}$ ve $\tilde{K} = 10$ olarak seçilmiştir. Buradan, bu parametreler kullanılarak, mKdV(f) ve cmKdV(f) denklemlerinin $t = 10$ 'daki doğrudan sayısal çözümleri sırasıyla Şekil 2.5 ve Şekil 2.6'da verilmiştir. Şekil 2.5'e dikkatlice bakıldığında mKdV(f) denkleminde, $m \rightarrow 0$ iken arka kenarın genliği 0.5'te sabit, fakat $m \rightarrow 1$ iken ön kenarda genliği seviye farkının iki katı ($2(0.6-0.5)=0.2$) olan solitonların olduğu görülür. Bu gözlem, Marchant tarafından mKdV(f) denklemi için yapılan çalışma ile tutarlıdır [25]. Diğer taraftan Şekil 2.6 incelendiğinde cmKdV(f) denklemi için durumun farklı olduğu açıktır. Silindirik terimin katkısı Şekil 2.6'da görülmektedir. Burada, arka kenarın genliğinin zamanla azaldığı ve yine zamana bağlı terimin etkisiyle aynı şekilde ön kenarın genliğinin de azaldığına dikkat edilmelidir.

Ek olarak, hesaplarda zayıf dispersiyonu temsil eden ε 'un etkisini gözlemlemek için kullanılan sayısal çözücü içinde kullanılan diğer parametreleri sabit tutarak $\varepsilon^2 = 0.05$ ve $\varepsilon^2 = 0.005$ için klasik mKdV(f) denkleminin doğrudan sayısal çözümleri Şekil 2.7'de verilmiştir. ε azaldıkça, salınımların dalga boyunun azaldığı görülmektedir. Diğer bir gözlem ise, parabolik cepheyi belirleyen t_0 değeri üzerinedir. t_0 değerleri büyüdükçe parabolik cephenin eğriliği zamanla azalmakta ve yapısı bozulmaktadır. Buna bağlı olarak, çözümlerin klasik mKdV(f) denkleminin çözümlerine indirgendiği görülmektedir. Ayrıntılar için Şekil 2.8'e bakılabilir. Bu durum, tez çalışması konusunun dışındadır. Dolayısıyla, $t_0 = 10$ problemimizi çözmek için kullanılan en uygun değerdir.

Öte yandan, büyük t değerleri için mKdV(f) ve cmKdV(f) denklemlerinin DSW çözümlerini için de sonuçlar sırasıyla Şekil 2.9 ve Şekil 2.10'da verilmiştir. Şekil 2.9'da ise mKdV(f) denkleminin $t = 5, 10, 25$ ve $t = 50$ 'deki dispersif şok dalga

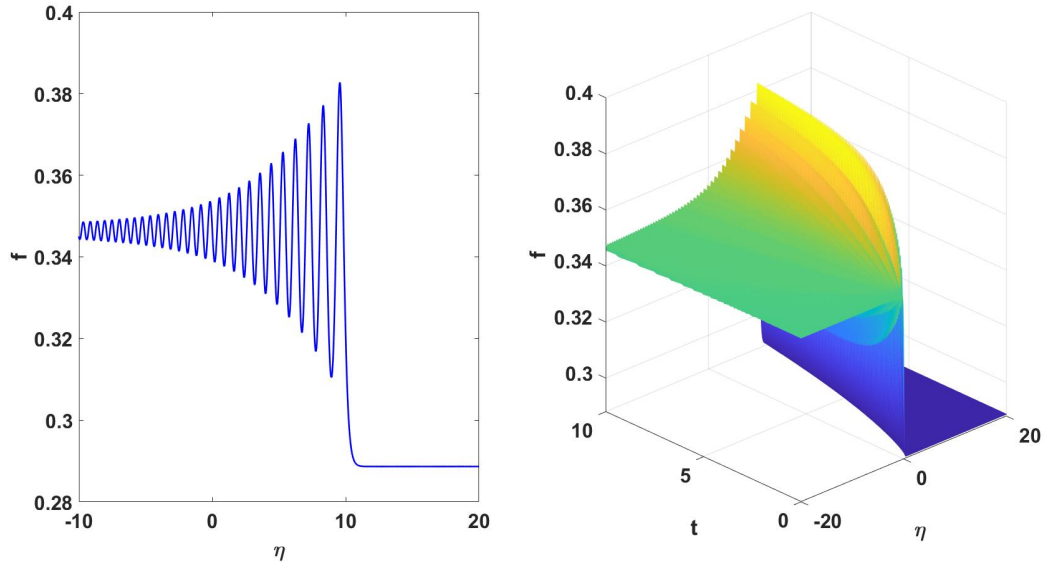
çözümleri görülmektedir. Zaman artmasına rağmen arka kenarın seviyesi 0.5'te sabit iken ve ön kenarın genliği seviye farkının 2 katına yaklaşmaktadır. Şekil 2.9'dan görüleceği gibi hızların pozitif olması nedeniyle, DSW'sı ilk sıçramanın sağına doğru ilerlemektedir. Ayrıca, ön kenarda (leading edge) solitonlar oluşmaktadır. Şekil 2.10'da ise cmKdV(f) denkleminin $t = 5, 10, 25$ ve $t = 50$ 'deki dispersif şok dalga çözümleri görülmektedir. Şekil 2.10'dan görüleceği gibi zaman arttıkça hem ön kenar hem de arka kenar seviyesi azalmaktadır. Örneğin, $t = 5$ için arka kenar seviyesi $S(t).v_r = S(5).(0.5) = \sqrt{\frac{10}{20}}.(0.5) = 0.3535$ iken; ön kenar $S(t).v_l = S(5).(0.6) = \sqrt{\frac{10}{20}}.(0.6) = 0.424$ 'tür. $t = 50$ için ise arka kenar 0.1507, ön kenar 0.1809'dur.



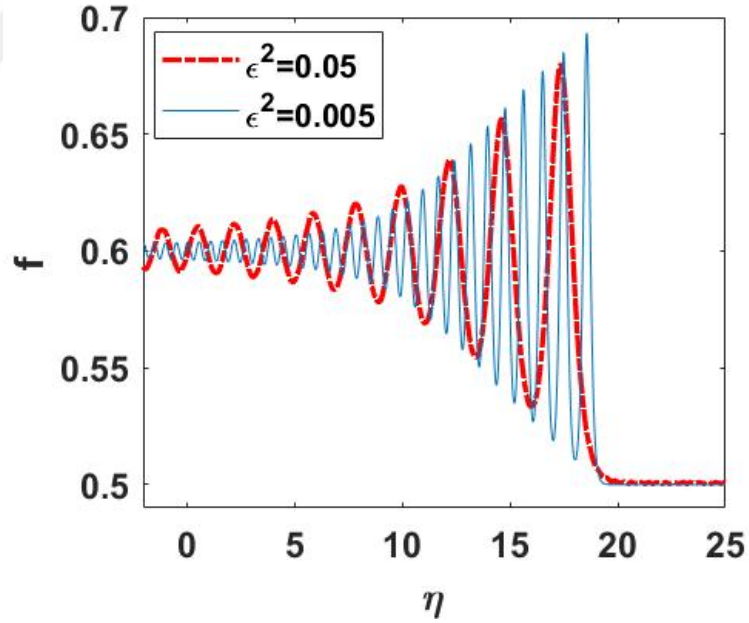
Şekil 2.5 : (2.2) ile verilen basamak tipi başlangıç koşulunda $v_r = 0.5$ ve $v_l = 0.6$ seçilmesi ile doğrudan çözümlerle elde edilen mKdV(f) denkleminin $t = 10$ 'daki dispersif şok dalga yayılımı.

2.4.3 mKdV(f) ve cmKdV(f) denklemlerinin doğrudan ve asimptotik çözümlerinin karşılaştırılması

Bu bölümde ise, türetilen modülasyon denklemlerinin (2.66) sayısal çözümlerinden elde edilen dispersif şok dalga çözümleriyle, mKdV(f) ve cmKdV(f) denklemlerinin doğrudan sayısal çözümlerinin uyumluluğunun gösterilmesi amaçlanmıştır. mKdV(f)

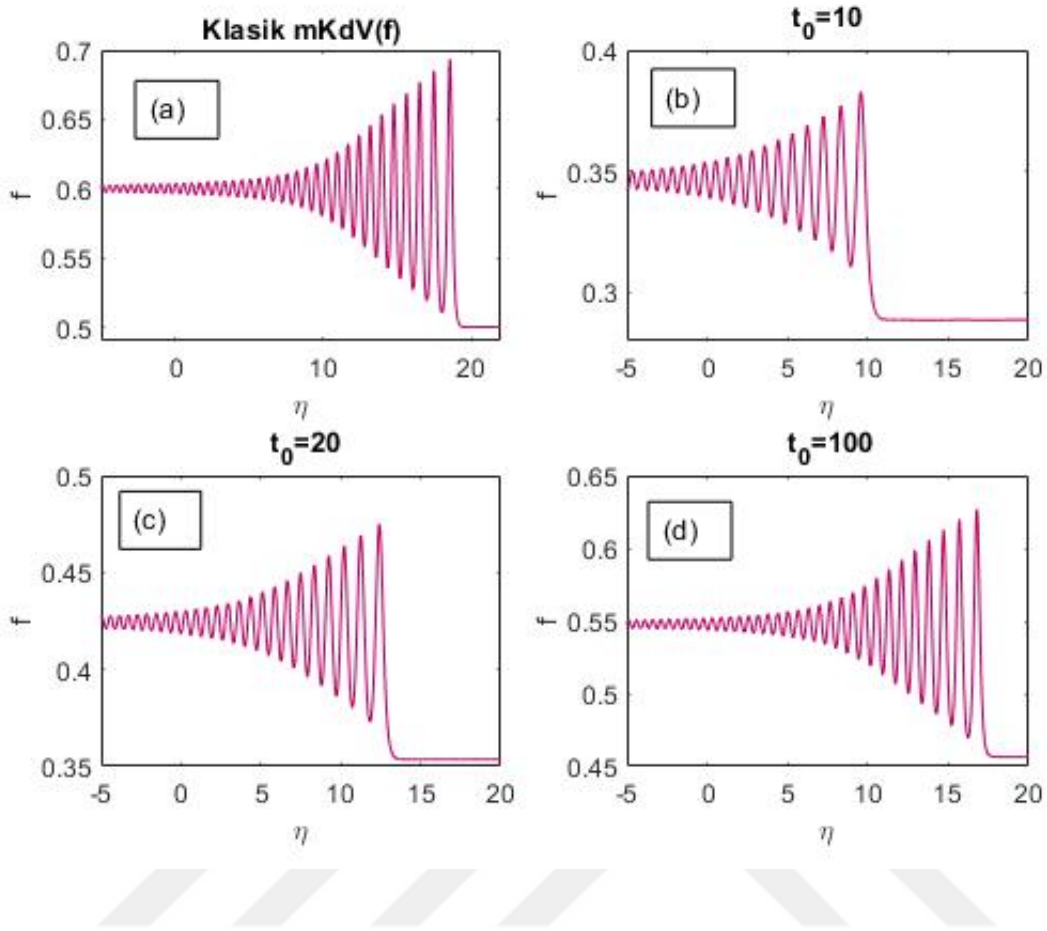


Şekil 2.6 : (2.2) ile verilen basamak tipi başlangıç koşulunda $v_r = 0.5$ ve $v_l = 0.6$ seçilmesi ile doğrudan çözümlerle elde edilen cmKdV(f) denkleminin $t = 10$ 'daki dispersif şok dalgası yayılımı.



Şekil 2.7 : mKdV(f) denkleminin (2.2) ile verilen basamak tipi başlangıç koşulunda $v_r = 0.5$ ve $v_l = 0.6$ seçilmesi ile elde edilen farklı ϵ değerleri için doğrudan sayısal çözümleri.

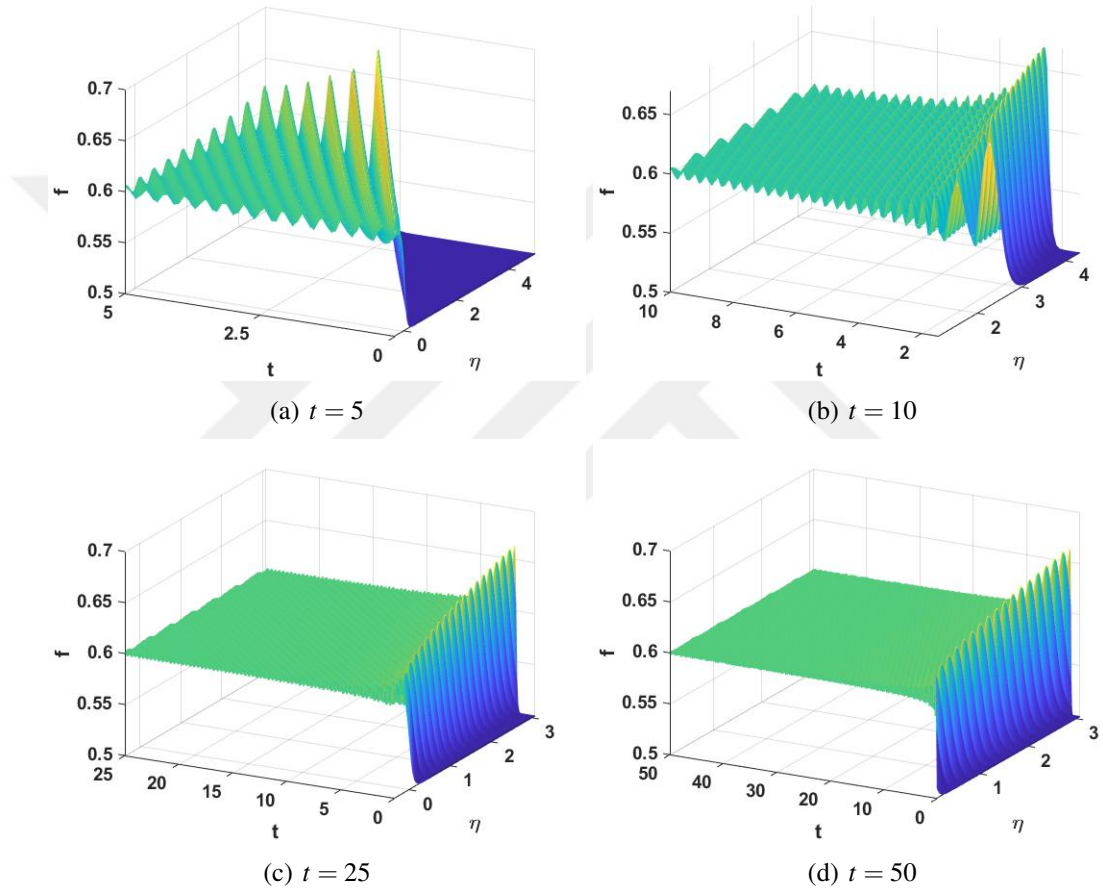
ve cmKdV(f) denklemlerinin Whitham sistemlerinin çözümünü elde etmek için Şekil 2.4 ile verilen Whitham sisteminin çözümleri ile birlikte; (2.34) ile verilen ilk mertebeye



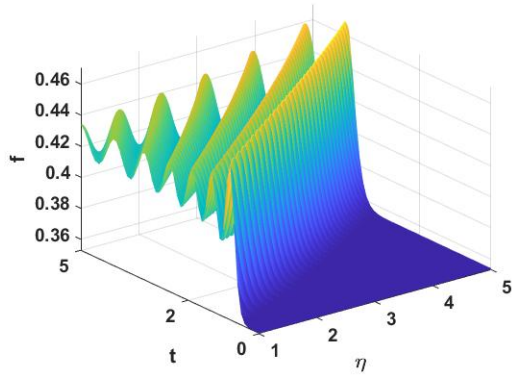
Şekil 2.8 : cmKdV(f) denkleminin (2.2) ile verilen basamak tipi başlangıç koşulunda $v_r = 0.5$ ve $v_l = 0.6$ seçilmesi ile elde edilen farklı t_0 değerleri için doğrudan sayısal çözümleri. Çözümlerin t_0 büyüdükçe klasik mKdV(f) denkleminin çözümlerine yaklaştığı görülür.

problemin çözümü (f_0) ve (2.36)'de verilen hızlı değişken θ kullanılarak, mKdV(f) ve cmKdV(f) denklemlerinin $t = 2.5, 5, 7.5$ ve $t = 10$ 'daki dispersif şok dalga yayılımı çizdirilmiştir. Bulunan sonuç ile daha önceden doğrudan sayısal olarak çözülen mKdV(f) ve cmKdV(f) denklemlerin çözümlerine ait çizimler Şekil 2.11 ve Şekil 2.12'da üst üste çizdirilmiştir.

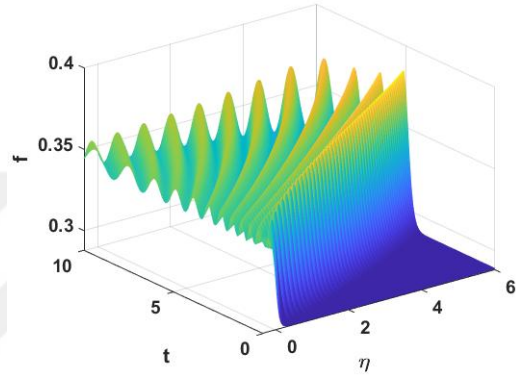
Buradan, mKdV(f) ve cmKdV(f) denklemlerinde görülen dispersif şok dalgalarının yapısıyla ilgili olarak ön kenar genliğinin ve salınımların dalga boyunun, asimptotik yaklaşım ve sayısal çözümle uyumlu olduğu görülür. Fakat, ön kenar pozisyonunda ufak bir fark mevcuttur. Bu durum, (2.34) ile verilen ilk mertebe çözümde yer alan θ_0 'dan kaynaklanmaktadır. Aslında daha yüksek mertebeden asimptotik açılım yapılarak faz farkı için daha iyi sonuçlar elde edilebilir. Fakat bu inceleme



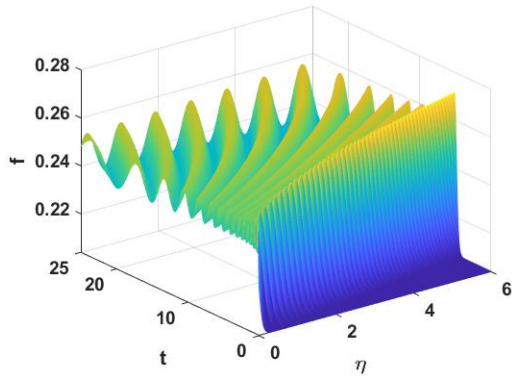
Şekil 2.9 : (2.2) ile verilen basamak tipi başlangıç koşulunda $v_r = 0.5$ ve $v_l = 0.6$ seçilmesi ile doğrudan çözümlerle elde edilen mKdV(f) denkleminin farklı t değerleri için dispersif şok dalga yayılımı.



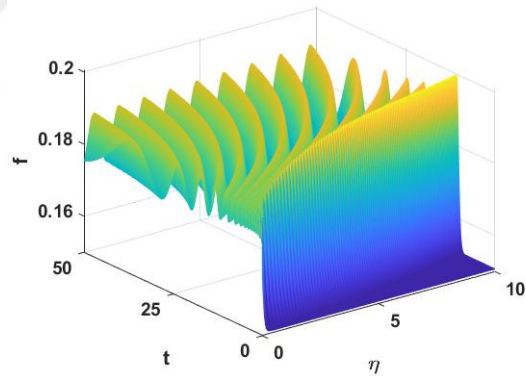
(a) $t = 5$



(b) $t = 10$



(c) $t = 25$

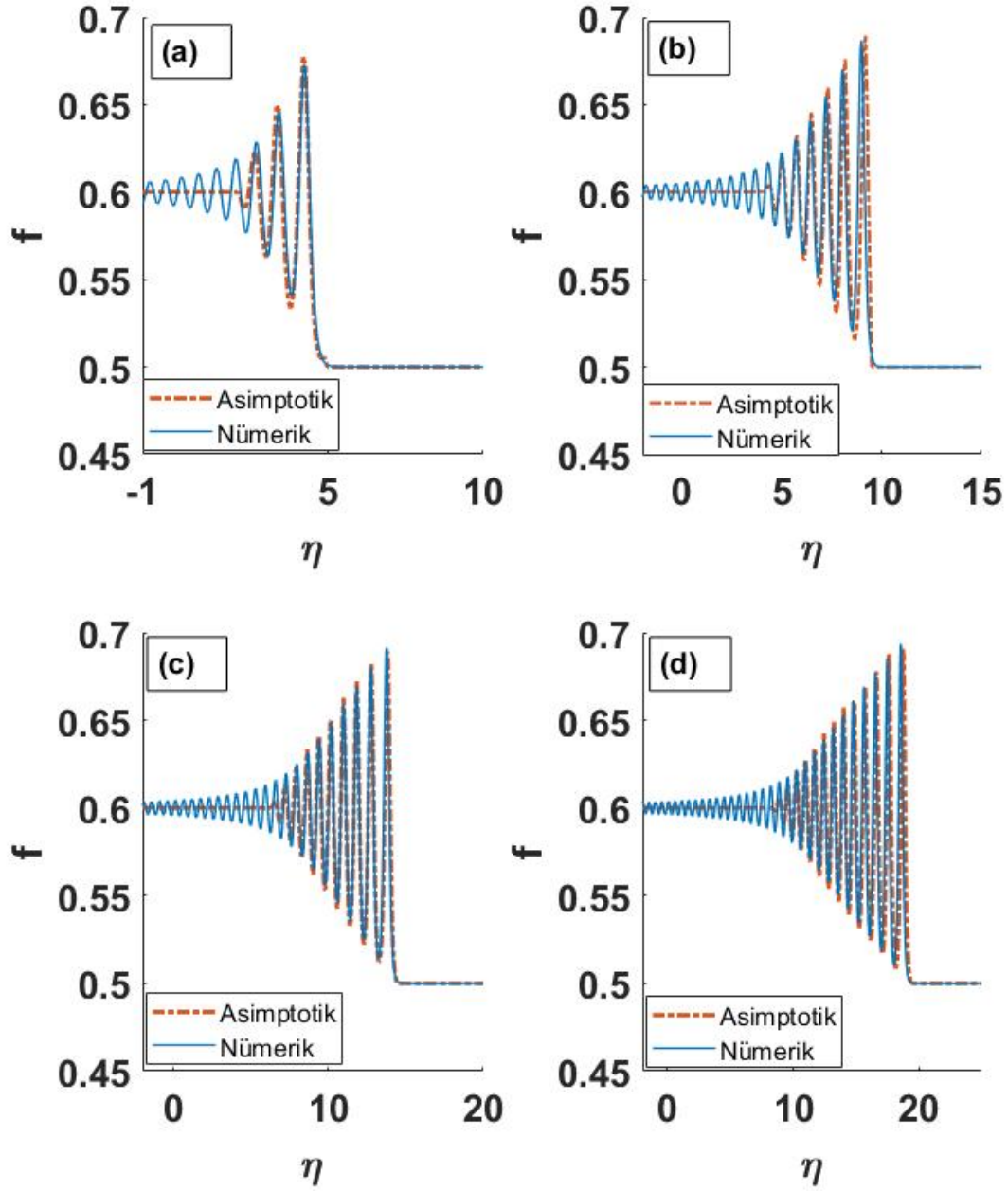


(d) $t = 50$

Şekil 2.10 : (2.2) ile verilen basamak tipi başlangıç koşulunda $v_r = 0.5$ ve $v_l = 0.6$ seçilmesi ile doğrudan çözümlerle elde edilen cmKdV(f) denkleminin farklı t değerleri için dispersif şok dalga yayılımı.

çalışılan tez konusunun dışındadır. Özel olarak, θ_0 en büyük genliğe sahip dalga katarı ile arka kenarın ortalaması alınarak belirlendiğinde sayısal çözümle asimptotik çözümün uyumlu olduğu görülmektedir. Faz farkı θ_0 , başlangıç değer problemlerinin özelliğinden dolayı sabit değildir.

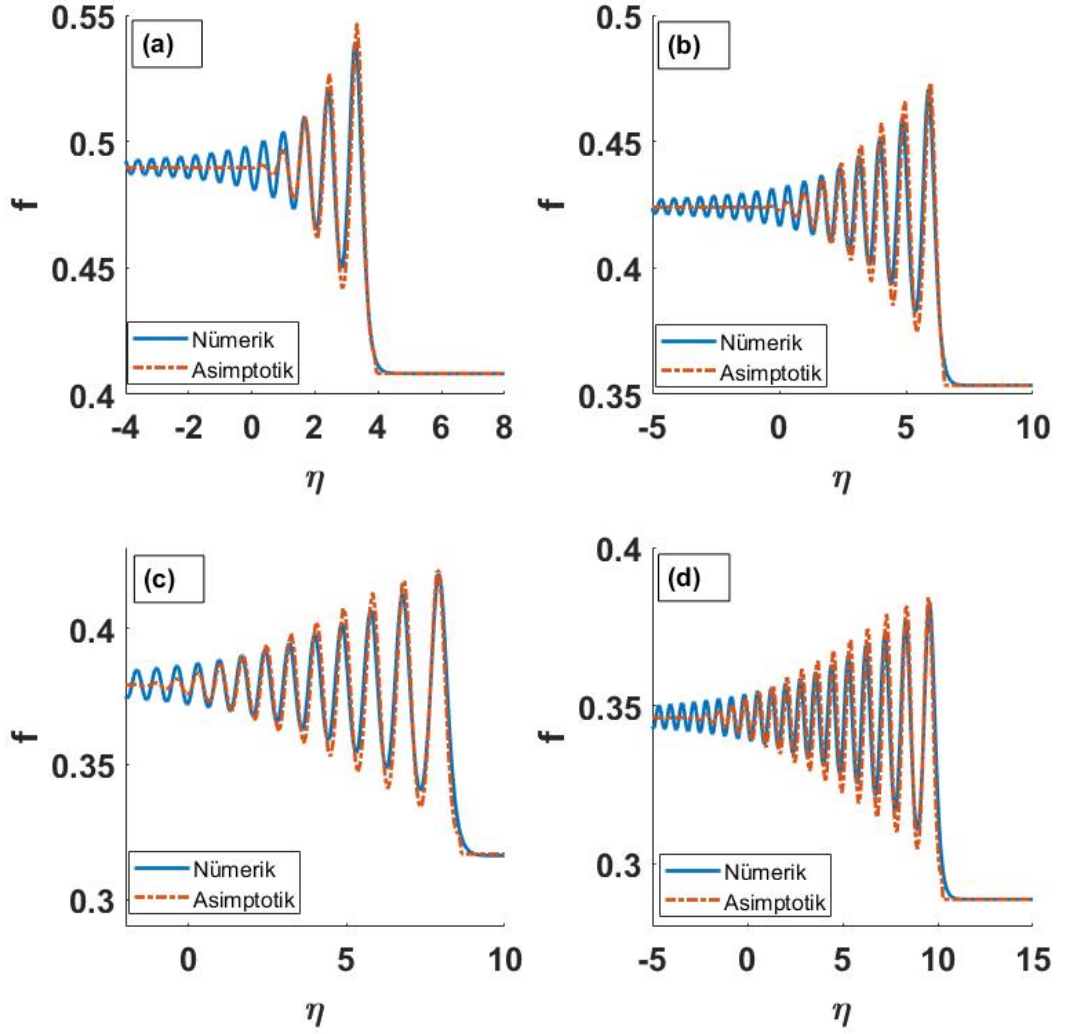
Klasik mKdV(f) ve cmKdV(f) denklemlerine ait Whitham modülasyon denklemlerinin asimptotik çözümlerinin uygunluğunu göstermek için doğrudan sayısal çözümler ile asimptotik çözümlerin $t = 2.5, 5, 7.5$ ve $t = 10$ 'da karşılaştırılması yapılmıştır. Sonuçlar, Şekil 2.11-2.12'de verilmiştir. Buradan, dalga sayısı ve dalga genliklerinin birbiriyle tutarlı olduğu sonucuna varılmıştır. Asimptotik çözümlerde yer alan θ_0 'ların belirlenmesi için mKdV(f) ve cmKdV(f) denklemlerinin doğrudan sayısal çözümlerinden yararlanılmıştır. Bunun için, ilk olarak doğrudan sayısal çözümlerden elde edilen sol taraftaki seviye değeri ile sağ taraftaki en büyük dalga katarının genlik değerinin ortalaması alınmıştır. Buradan elde edilen ortalama genlik değerleri " A_{avg} " ile gösterilmektedir. Asimptotik çözümde bu ortalama değere en yakın genliğe sahip ortadaki dalga katarına göre θ_0 belirlenmiştir. Asimptotik çözümlerden elde edilen ortadaki dalga katarının genliği " M_A " ile temsil edilmektedir. mKdV(f) ve cmKdV(f) denklemlerine ait genlik değerleri farklı zaman değerleri için sırasıyla Çizelge 2.1 ve Çizelge 2.2'de verilmiştir. Ayrıca, en büyük genliğe sahip dalga katarına ait ortalama hız değerleri (V_{avg}) de bu çizelgelerde yer almaktadır. Genliklerin hesaplanmasını $t = 10$ değerini ele alarak açıklayalım. cmKdV(f) denklemi için, ortalama değer $(0.38246 + 0.34641)/2 = 0.3643$ iken, asimptotik çözümde bu değere en yakın ortadaki dalga katarının genlik değeri 0.3674'dur. mKdV(f) denklemi için bu değerler sırasıyla $(0.6 + 0.693)/2 = 0.6465$ ve 0.6572'dir. Bu sonuçlar, mKdV(f) ve cmKdV(f) denklemleri için doğrudan sayısal ve asimptotik çözümlerin tutarlı olduğunu göstermektedir. Ek olarak, mKdV(f) denkleminin en büyük genliğe sahip dalga katarının ortalama hızı $t = 10$ 'daki $V_{avg} = 1.9179$ 'dur. cmKdV(f) denklemi için ise $t = 10$ 'daki ortalama hız $V_{avg} = 1.0432$ 'dir. Burada şu noktaya dikkat çekmek gerekir: cmKdV(f) denkleminin ortalama hızı mKdV(f) denklemine göre daha düşüktür. Bunun sebebi en büyük genliğe sahip dalga katarının genliğinin zamanla azalmasıdır.



Şekil 2.11 : (2.2) başlangıç koşulunda $v_r = 0.5$ ve $v_l = 0.6$ seçilmesiyle mKdV(f) denklemleri için (a) $t = 2.5$, (b) $t = 5$, (c) $t = 7.5$ ve (d) $t = 10$ 'da doğrudan sayısal ve Whitham sistemleri üzerinden elde edilen asimptotik çözümlerin karşılaştırılması.

2.4.3.1 ETDRK4 metodu için hata analizi

Bu kısımda, mKdV(f) ve cmKdV(f) denklemlerini basamak tipi başlangıç koşuluyla birlikte doğrudan çözmek için kullanılan sayısal yöntem için hata analizi yapılacaktır.



Şekil 2.12 : (2.2) başlangıç koşulunda $v_r = 0.5$ ve $v_l = 0.6$ seçilmesiyle cmKdV(f) denklemi için (a) $t = 2.5$, (b) $t = 5$, (c) $t = 7.5$ ve (d) $t = 10$ 'da doğrudan sayısal ve Whitham sistemleri üzerinden elde edilen asimptotik çözümlerin karşılaştırılması.

Literatür incelendiğinde, silindirik denklemler için başlangıç değer problemleri ile ilgili kullanılan sayısal yöntem için hata analizinin mevcut olmadığı görülmüştür.

Yapılan analizde başlangıç koşulu olarak kullanılmak üzere, soliter dalga çözümleri araştırılmış ve klasik mKdV(f) denklemi için literatürde çalışmaların yapıldığı görülmüştür [54]–[56]. Ancak, cmKdV(f) denkleminin soliter dalga çözümleri bilinmemektedir. Bu nedenle, hata analizinde farklı zaman adımları için bulunan doğrudan sayısal çözümler karşılaştırarak ETDRK4 yönteminin kullanılabilirliği test

Çizelge 2.1 : $t = 2.5, 5, 7.5$ ve $t = 10$ zaman değerlerinde mKdV(f) denklemi için A_{avg} , M_A ve V_{avg} değerleri.

t (Zaman)	A_{avg} (Doğrudan çözüm)	M_A (Asimptotik çözüm)	V_{avg}
2.5	0.6363	0.6489	1.9766
5	0.6431	0.6455	1.9258
7.5	0.6454	0.6485	1.9206
10	0.6465	0.6572	1.9179

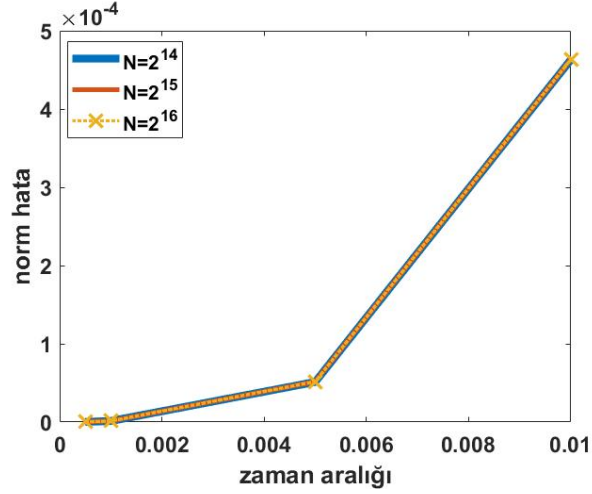
Çizelge 2.2 : $t = 2.5, 5, 7.5$ ve $t = 10$ zaman değerlerinde cmKdV(f) denklemi için A_{avg} , M_A ve V_{avg} değerleri.

t (Zaman)	A_{avg} (Doğrudan çözüm)	M_A (Asimptotik çözüm)	V_{avg}
2.5	0.5142	0.5269	1.5785
5	0.4470	0.4484	1.3050
7.5	0.3998	0.3983	1.1513
10	0.3643	0.3676	1.0432

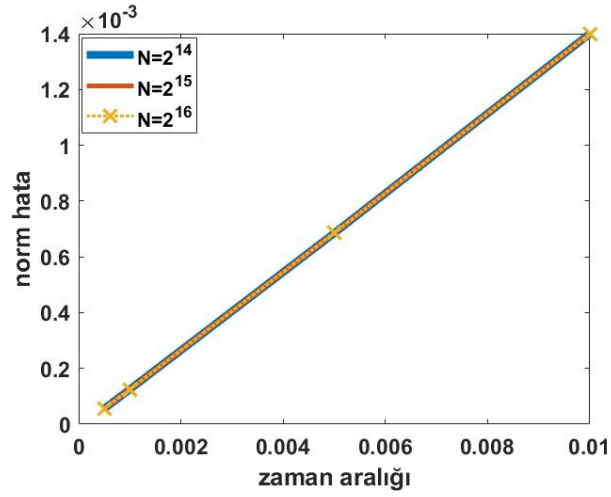
edilecektir. Bunun için doğrudan sayısal çözümde nispeten küçük 0.0001 zaman adımını referans alınarak elde edilen çözüm, "gerçek çözüm" olarak bu analizde adlandırılacaktır ve f^{ex} ile temsil edilecektir. Ayrıca, bu çözümleri elde ederken, Bölüm 2.4.2'de elde edilen sayısal çözümler için kullanılan parametreler ve basamak tipi başlangıç koşulları kullanılmıştır. Sırasıyla (0.0005, 0.001, 0.005, 0.01) zaman aralıkları için elde edilen çözüm (f^{com}), "gerçek çözümle" karşılaştırılacaktır. Bunun için, N Fourier modu sabit tutulmaktadır ve karşılaştırma aşağıdaki norm yardımıyla gerçekleştirilecektir:

$$L_{\infty} = \max_l | f_l^{ex} - f_l^{com} | . \quad (2.85)$$

Burada, L_{∞} vektör öğelerinin maksimum mutlak değerini ölçen normdur. Bu karşılaştırma farklı Fourier modları için hem mKdV(f) hem de cmKdV(f) denklemi için yapılmıştır. Çizelge 2.3'de mKdV(f) denkleminin ait farklı Fourier modları için norm hata değerleri verilirken; Çizelge 2.4'da ise cmKdV(f) denkleminin farklı Fourier modları için elde edilen norm hata değerleri verilmiştir. Bu çizelgeler ve Şekil 2.13 yardımıyla, zaman adımı arttıkça hatanın büyüklüğünün de arttığı görülmektedir. Ancak, Fourier modlarının sayısı $N = 2^{14}$, ten $N = 2^{16}$, ya yükseldiğinde, her iki denklem durumu için hatanın büyüklüğünde önemli bir değişiklik olmadığı sonucuna varılmıştır.



(a)



(b)

Şekil 2.13 : (a) mKdV(f), (b) cmKdV(f) denkleminin $t = 10^3$ 'da farklı Fourier modları (N) için L_∞ normuna göre hataların karşılaştırılması. Burada, başlangıç ön kenar ve arka kenar seviyesi (0.5,0.6) ve $\varepsilon^2 = 0.005$ olarak seçilmiştir.

Çizelge 2.3 : mKdV(f) denkleminin için elde edilen norm hata analizi.

h (Zaman adımı)	$N = 2^{14}$	$N = 2^{15}$	$N = 2^{16}$
0.0005	1.9863e-07	1.9863e-07	1.9863e-07
0.001	1.3359e-06	1.3359e-06	1.3359e-06
0.005	5.1691e-05	5.1691e-05	5.1691e-05
0.01	4.6348e-04	4.6348e-04	4.6348e-04

Çizelge 2.4 : cmKdV(f) denkleminin için elde edilen norm hata analizi.

h (Zaman adımı)	$N = 2^{14}$	$N = 2^{15}$	$N = 2^{16}$
0.0005	5.5447e-05	5.5447e-05	5.5447e-05
0.001	1.2475e-04	1.2475e-04	1.2475e-04
0.005	6.8494e-04	6.8535e-04	6.8542e-04
0.01	0.0014	0.0014	0.0014



3. (3+1) BOYUTLU FOCUSING MODİFİYE KADOMTSEV- PETVIASHVILI (mKP(f)) DENKLEMİNİN DİSPERSİF ŞOK DALGA ÇÖZÜMLERİ

3.1 Giriş

Bu bölümde, Bölüm 2’de ortaya konan yöntem kullanılarak, (3+1) boyutlu nonlinear kısmi türevli bir denklem olan focusing modifiye Kadomtsev-Petviashvili (mKP(f)) denkleminde

$$(v_t + 6v^2v_x + \varepsilon^2v_{xxx})_x + \sigma(v_{yy} + v_{zz}) = 0 \quad (3.1)$$

dispersif şok dalga yayılımı problemi ele alınacaktır. Burada, $v = v(x, y, z, t)$ şeklinde bir fonksiyon, $0 < \varepsilon \ll 1$ olmak üzere zayıf dispersiyon etkisini belirleyen sabit ve $\sigma = \mp 1$ ’dir. (3.1) denkleminin iki boyutlu hali Bölüm 2’de incelenmiştir. (3.1) denklemi, plazma fiziğinde soliton dalga yayılımı için türetilmiştir [66].

3.2 (3+1) Boyutlu mKP(f) Denkleminin (1+1) Boyutlu smKdV(f) Denklemine İndirgenmesi

(3+1) boyutlu Benjamin-Ono denklemi için DSW yayılımı problemi [46]’de ele alınmıştır. Bu çalışmada, özel olarak paraboloid tipte bir başlangıç koşulu seçilmiş ve böylece denklem (1+1) boyutlu küresel Benjamin-Ono denklemine indirgenmiştir. Burada anlatılan yöntemin, (3+1) boyutlu mKP(f) denkleminin uygulanması literatüre önemli katkıları olacağı düşünüldüğünden bu tez çalışmasının konusu olmuştur. Öncelikle, (3.1) denklemini indirgeyebilmek için aşağıdaki yeni değişkeni tanımlayalım:

$$\eta = x + \frac{1}{2}\psi(y, z, t). \quad (3.2)$$

(3.2)’de yer alan ψ ’nin açık formu çalışmanın devamında belirlenecektir. Ayrıca, (3.1) denkleminin aşağıdaki basamak tipi başlangıç koşulunu sağladığı kabul edilmektedir ($t = 0$):

$$v(\eta, 0) = \begin{cases} v_l, & \eta < 0 \\ v_r, & \eta \geq 0 \end{cases} . \quad (3.3)$$

Daha önce de belirtildiği gibi bu tez çalışmasında dispersif şok dalga çözümleri ile ilgilenildiğinden, yukarıda ifade edilen başlangıç koşulunda, v_r ve v_l reel sabitleri göstermek üzere, $v_l > v_r \geq 0$ eşitsizliğinin sağlanması gerekmektedir [25,26]. Bu varsayım altında, (3.1) denkleminin küresel denkleme indirgenbilmesi için α reel bir sabit olmak üzere özel olarak paraboloid tipte bir cephe seçilecektir:

$$\psi(y, z, 0) = \alpha(y^2 + z^2). \quad (3.4)$$

(3.1) denkleminin (3.4) ile verilen paraboloid tipi cephe boyunca indirgemesinin yapılabilmesi için aşağıdaki çözüm formunu sağladığı kabul edilmektedir:

$$v = f\left(x + \frac{1}{2}\psi(y, z, t), y, t\right). \quad (3.5)$$

Daha sonra, (3.5) ile verilen çözüm formu, (3.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$\left(\frac{1}{2}\psi_t f_\eta + f_t + 6f^2 f_\eta + \varepsilon^2 f_{\eta\eta\eta}\right)_\eta + \sigma\left(\frac{1}{4}((\psi_y)^2 + (\psi_z)^2) f_{\eta\eta} + \frac{1}{2}(\psi_{yy} + \psi_{zz}) f_\eta\right) = 0 \quad (3.6)$$

olur. Ek olarak, (3.1) denkleminin sonsuzda aşağıdaki artmayan tipteki sınır koşulunu sağladığı varsayılmaktadır:

$$\eta \rightarrow -\infty \text{ iken } v \rightarrow v_l S(t) \text{ ve } v \rightarrow v_r S(t) \text{ iken } \eta \rightarrow \infty. \quad (3.7)$$

Yukarıdaki sınır koşulunda görülen $S(t)$ bölümün sonunda belirlenecektir. Ayrıca, (3.7) sınır koşulu ile birlikte ve ψ_{yy} ve ψ_{zz} fonksiyonlarının y ve z değişkenlerinden bağımsız olduğu kabul edilirse, (3.6) denklemindeki f_η terimi ile ilgili katsayıların toplamı yalnızca t değişkenine bağlı olur. Ek olarak, (3.6) denklemindeki $f_{\eta\eta}$ teriminin katsayılar toplamının sıfır olduğu kabul edilirse, ψ ve f fonksiyonları aşağıdaki denklem sistemini sağlar:

$$\psi_t + \frac{\sigma}{2}\left((\psi_y)^2 + (\psi_z)^2\right) = 0, \quad (3.8)$$

$$f_t + 6f^2 f_\eta + \varepsilon^2 f_{\eta\eta\eta} + \frac{\sigma}{2}(\psi_{yy} + \psi_{zz})f = 0. \quad (3.9)$$

(3.8) denklemi, "dalğaya şekli veren denklem" (front shape equation) olarak adlandırılır. Bu denklemin çözümü, (3.4) başlangıç koşuluyla birlikte karakteristikler metodu kullanılarak

$$\psi(y, z, t) = \frac{\alpha(y^2 + z^2)}{1 + 2\alpha\sigma t} \quad (3.10)$$

olarak elde edilir. Dikkat edilecek olursa, yapılan varsayımı uygun olarak, ψ_{yy} ve ψ_{zz} tüm t değerleri için y ve z değişkenlerinden bağımsızdırlar. Öte yandan, (3.9) denklemi DSW'nin η eksenine doğrultusunda yayılımını karakterize eder. (3.10) çözüm formu (3.9) denkleminde yerine yazılırsa, (1+1) boyutlu focusing küresel modifiye Korteweg-de Vries (smKdV(f)) denklemi elde edilir ve bu denklem plazma fiziği (dust ion acoustic waves) alanında daha önce türetilmiştir [58]:

$$f_t + 6f^2 f_\eta + \varepsilon^2 f_{\eta\eta\eta} + \frac{1}{t+t_0} f = 0, \quad t_0 = \frac{1}{2\sigma\alpha}. \quad (3.11)$$

Bu çalışmada, yalnızca $\sigma = 1$ durumu ele alınmıştır. Benzer inceleme, $\sigma = -1$ için $\alpha \rightarrow -\alpha$ dönüşümü yardımıyla yapılabilir ve bu durumda, dalga cephesinin yönü tersine döner. Fakat, bu analiz bu tez konusunun kapsamı dışındadır.

Diğer yandan, (3.11) denkleminin sonsuzdaki sınır koşullarında yer alan $S(t)$ 'yi belirleyebilmek için, (3.11) denklemindeki η 'ya bağlı türev terimleri ihmal edilir ve geriye kalan t bağımsız değişkenine bağlı adi diferansiyel denklem $S(0) = 1$ başlangıç koşuluyla birlikte çözülürse, $S(t)$ fonksiyonu

$$S(t) = \frac{t_0}{t+t_0} \quad (3.12)$$

olarak bulunur.

3.3 smKdV(f) Denkleminin Whitham Modülasyon Denklemlerinin Türetilmesi

Bu kısımda, smKdV(f) denklemi için üç tane Whitham modülasyon denklemleri elde edilecektir. Bunun için, Driscoll ve Oneil tarafından mKdV(f) denklemi [18] için kullanılan Riemann tipi değişkenler tanımlanarak modülasyon denklemleri köşegen forma en yakın biçimde yazılacaktır. smKdV(f) denkleminin modülasyon denklemleri, birinci mertebeden kuazilineer bir denklem sistemi oluşturur ve bu denklemler Whitham sistemi olarak adlandırılır. Bölüm 2'de olduğu gibi, f 'nin asimptotik çözümü için çoklu ölçekler metodu kullanılacaktır [11]. Bunun için, hızlı değişen faz değişkeni θ ,

$$\theta_\eta = \frac{k(\eta, t)}{\varepsilon}, \quad \theta_t = -\frac{\omega(\eta, t)}{\varepsilon} = -\frac{kV}{\varepsilon} \quad (3.13)$$

bağıntılarıyla tanımlanır. Burada, k ile dalga sayısı, ω ile frekans ve V ile faz hızı gösterilmektedir. Bu yeni tanımlanan θ hızlı değişkeninde yer alan k , ω ve V yavaş

değişen η ve t 'nin fonksiyonlarıdır. (3.13) tanımında, $(\theta_\eta)_t = (\theta_t)_\eta$ uyumluluk koşulunun kullanılmasıyla

$$k_t + (kV)_\eta = 0 \quad (3.14)$$

elde edilir. Bölüm 2'den hatırlanacağı gibi, (3.14) denklemi "dalgaların korunumu yasası" (conservation of waves) olarak adlandırılmaktadır ve bu bizim için gerekli olan ilk modülasyon denklemdir.

Şimdi de diğer iki Whitham modülasyon denklemlerini elde etmek için asimptotik analiz yapılacaktır. Bunun için, yavaş ve hızlı değişkenler arasındaki

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\omega}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (3.15)$$

bağıntılar (3.11) denkleminde kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon} \left(-\omega \frac{\partial f}{\partial \theta} + k^3 \frac{\partial^3 f}{\partial \theta^3} + 6f^2 k \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \\ & + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + 3k^2 \frac{\partial^3 f}{\partial \eta \partial \theta^2} + 3kk_\eta \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + 6f^2 \frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{f}{t+t_0} \right) \\ & + \varepsilon \left(3k \frac{\partial^3 f}{\partial \theta \partial \eta^2} + 3kk_\eta \frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial \eta} + k_{\eta\eta} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} = 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

denklemini elde edilir. Daha sonra, f fonksiyonu ε 'nin kuvvetlerine göre açılır;

$$f(\theta, \eta, t) = f_0(\theta, \eta, t) + \varepsilon f_1(\theta, \eta, t) + \varepsilon^2 f_2(\theta, \eta, t) + \dots \quad (3.17)$$

ve (3.17) ile verilen asimptotik açılım (3.16) denkleminde kullanılırsa, ε 'un aynı kuvvetlerinin katsayıları eşitlenerek f_n 'nin ardışık olarak hesaplanabileceği bir problemler hiyerarşisi elde edilir. Bu çalışmada, kullanılacak olan ilk iki pertürbasyon problemi aşağıda verilmektedir:

$$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right): \quad -\omega \frac{\partial f_0}{\partial \theta} + 6kf_0^2 \frac{\partial f_0}{\partial \theta} + k^3 \frac{\partial^3 f_0}{\partial \theta^3} = 0, \quad (3.18)$$

$$\mathcal{O}(1): \quad -\omega \frac{\partial f_1}{\partial \theta} + 6k \frac{\partial (f_0^2 f_1)}{\partial \theta} + k^3 \frac{\partial^3 f_1}{\partial \theta^3} = \mathcal{M}. \quad (3.19)$$

Burada,

$$\mathcal{M} = -\left(\frac{\partial f_0}{\partial t} + 6f_0^2 \frac{\partial f_0}{\partial \eta} + 3k^2 \frac{\partial^3 f_0}{\partial \eta \partial \theta^2} + 3kk_\eta \frac{\partial^2 f_0}{\partial \theta^2} + \frac{f_0}{t+t_0} \right) \quad (3.20)$$

olarak tanımlanmaktadır. Analize, ε^{-1} mertebeye problemi çözülerek devam edilecektir. Dikkat edilirse, (3.18) denklemi ve mKdV(f) denkleminin ilerleyen dalga çözümü

için indirgenen denklem ile aynı yapıdadır [26]. (3.18) denkleminin çözümünün bulunmasındaki ayrıntılar için Bölüm 2'ye ve [26] çalışmasına bakılabilir. Buradan, (3.18) denkleminin ilerleyen dalga çözümü aşağıdaki formda elde edilir:

$$f_0(\theta, \eta, t) = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + \frac{(2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3)}{(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3) + (\alpha_1 - \alpha_2)\text{sn}^2[U_1(\theta - \theta_0), m]}. \quad (3.21)$$

Burada, $U_1 = \sqrt{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3)}/2k$ 'dır. Ayrıca, α_1 , α_2 ve α_3 , η ve t 'nin yavaş değişen fonksiyonlarıdır. Bu değişkenler arasında, $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$ eşitsizliği sağlanmaktadır. (3.21) çözümündeki, $\text{sn}(z, m)$ Jacobi eliptik sinüs fonksiyonunu; k dalga sayısını ve integrasyon sabiti olarak ortaya çıkan θ_0 ise faz farkını göstermektedir. Bu sabitin değeri smKdV(f) denkleminin sayısal çözümleri karşılaştırılarak bir sonraki bölümde bulunacaktır.

Çalışmamıza bu aşamadan sonra, mKdV(f) denkleminin Riemann tipi değişkenlerini $r_i = r_i(\eta, t)$ ($i = 1, 2, 3$) tanımlayarak devam edelim:

$$r_1 = \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2}, r_2 = \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2}, r_3 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}. \quad (3.22)$$

Bu değişkenler arasında $r_3 > r_2 > r_1$ eşitsizliği geçerlidir. Böylece, (3.21) çözümünde, (3.22) kullanılırsa, ilk mertebe problemin çözümü

$$f_0(\theta, \eta, t) = r_3 - r_2 + r_1 + \frac{2(r_2 - r_1)(r_3 + r_1)cn^2[2(\theta - \theta_0)K, m]}{(r_3 + r_1)(r_2 - r_1)\text{sn}^2[2(\theta - \theta_0)K, m]} \quad (3.23)$$

olarak elde edilir. Burada, $K = K(m(\eta; t))$ birinci tip tam eliptik integraldir. Ek olarak, modül, dalga sayısı ve faz hızı terimleri Riemann değişkenleri cinsinden sırasıyla;

$$m = \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_3^2 - r_1^2}, \quad k = \frac{\sqrt{r_3^2 - r_1^2}}{2K}, \quad V = 2(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) \quad (3.24)$$

olarak yazılırlar. Ayrıca, (3.13) yardımıyla, hızlı değişken olan faz değişkeni

$$\theta(\eta, t) = \int_{-L}^{\eta} \frac{k(x', t)}{\varepsilon} dx' - \int_0^t \frac{k(\eta, t')V(\eta, t')}{\varepsilon} dt'. \quad (3.25)$$

olarak bulunur. İlk mertebe problemin çözümü olan (3.23), (3.19) denkleminde yerine yazılırsa, (3.19) denkleminin sağ yanında θ 'ya bağlı sekülerlik oluşmaktadır, yani terimler θ 'ya göre fazla büyümektedir. Bu sekülerliği ortadan kaldırmak için, f_0 'ın θ 'ya göre periyodunun 1 olduğu da kullanılarak, (3.19) denkleminde aşağıdaki sekülerlik koşulları elde edilir:

$$\int_0^1 \mathcal{M} d\theta = 0, \quad \int_0^1 f_0 \mathcal{M} d\theta = 0. \quad (3.26)$$

(3.26) sekülerlik koşulları uzun fakat standart bir hesaplama ile aşağıdaki denklemlere indirgenirler:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 f_0 d\theta + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(2 \int_0^1 f_0^3 d\theta \right) + \frac{1}{t+t_0} \int_0^1 f_0 d\theta = 0, \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 f_0^2 d\theta + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(3 \int_0^1 f_0^4 - 3k^2 \int_0^1 \left(\frac{\partial f_0}{\partial \theta} \right)^2 d\theta \right) + \frac{2}{t+t_0} \int_0^1 f_0^2 d\theta = 0. \quad (3.28)$$

(3.27) ve (3.28) ile verilen sekülerlik koşullarındaki integralleri hesaplamak için (3.23) ilk merteye problemin çözümü ve yardımcı kaynaktaki sonuçlar [50] kullanılır. İntegrallerin hesaplanmasındaki ayrıntılar için Bölüm 2'ye ve sonuçları için (2.58)-(2.59)'a bakılabilir. Bu koşullara ek olarak, (3.14) ile verilen dalgaların korunumu yasasının eklenmesiyle smKdV(f) denklemi için Whitham modülasyon sistemi türetilmiş olur. Böylece, (3.14), (3.27) ve (3.28) modülasyon denklemleri standart bir hesaplama ile

$$\frac{\partial r_i}{\partial t} + v_i(r_1, r_2, r_3) \frac{\partial r_i}{\partial \eta} + \frac{1}{t+t_0} h_i = 0 \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.29)$$

şeklinde elde edilir. Burada, v_i ($i = 1; 2; 3$) terimleri ile mKdV(f) denkleminin Whitham karakteristik hızları [18] gösterilmektedir ve açık ifadeleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} v_1 &= 2(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) - \frac{4K(r_2^2 - r_1^2)}{K - E}, \\ v_2 &= 2(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) - \frac{4K(r_2^2 - r_1^2)(r_3^2 - r_2^2)}{E(r_3^2 - r_1^2) - K(r_3^2 - r_2^2)}, \\ v_3 &= 2(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) + \frac{4K(r_3^2 - r_2^2)}{E}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

Ayrıca, h_i 'ler de ($i = 1; 2; 3$) küresel terim ile ilişkili terimleri göstermektedir:

$$h_1 = \frac{K(r_1 N_1 + r_2 r_3 N_2)}{(r_1^2 - r_3^2)(K - E)}, \quad h_2 = -\frac{K(r_2 N_1 + r_1 r_3 N_2)}{E(r_3^2 - r_1^2) - K(r_3^2 - r_2^2)}, \quad h_3 = \frac{K(r_3 N_1 + r_1 r_2 N_2)}{(r_3^2 - r_1^2)E}. \quad (3.31)$$

Burada, $K = K(m)$, $E = E(m)$ ve $\Pi = \Pi(n, m)$ sırasıyla birinci, ikinci ve üçüncü tip eliptik tam integrallerdir. Ek olarak, (3.31) denkleminde görülen ilgili terimler

$$N_1 = \frac{K(r_1^2 + r_2^2 - r_3^2) - 2(r_3^2 - r_1^2)E}{K}, \quad N_2 = \frac{K(r_1 + r_2 + r_3) - 2(r_2 + r_3)\Pi}{K}, \quad n = \frac{r_1 - r_2}{r_3 + r_1} \quad (3.32)$$

şeklinde tanımlanırlar. Dikkat edilirse, (3.29) denkleminde, $h_i (i = 1, 2, 3)$ 'ler özdeş olarak sıfır alındığında, smKdV(f)-Whitham sistemi klasik mKdV(f)-Whitham sistemine indirgenir [18].

3.4 mKdV(f) ve smKdV(f) Denklemlerinin Sayısal Çözümleri

Bu bölümde, öncelikle mKdV(f) ve smKdV(f) denklemlerinin Whitham modülasyon denklemleri asimptotik olarak çözülecektir. Daha sonra, mKdV(f) ve smKdV(f) denklemleri Exponential Time-differencing Fourth-Order Runge Kutta (ETDRK4) metodunun [51,52] modifiye hali kullanılarak doğrudan çözdürülecektir. Ardından, asimptotik ve doğrudan çözümler karşılaştırılarak kullanılan asimptotik yöntemin doğruluğu test edilecektir. Bu karşılaştırma ile, Whitham teorisinin ne kadar başarılı olduğu gözlemlenecektir.

Öte yandan, daha önce de belirtildiği gibi smKdV(f)-Whitham sistemi, küresel terim özdeş olarak sıfır alındığında (yani $h_i = 0$) mKdV(f)-Whitham sistemine indirgenmektedir. Bu nedenle, bu bölümde mKdV(f) denkleminin sayısal ve asimptotik çözümlerine de yer verilerek, küresel terimin çözümleri ne ölçüde etkilediği gösterilecektir. Ayrıntılar Bölüm 3.4.1'de verilmektedir.

Daha sonra, zamana bağlı terimin denklemler üzerindeki etkisini ortaya koymak için Bölüm 2'de çalışılan cmKdV(f) denkleminin ve smKdV(f) denkleminin için karşılaştırma yapılacaktır.

3.4.1 mKdV(f) ve smKdV(f) denklemlerinin asimptotik çözümü

Öncelikle, (3.29) smKdV(f)-Whitham sistemi için olan (3.3) başlangıç koşulu Riemann tipi değişkenler cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edilmelidir :

$$r_1(\eta, 0) = v_r, \quad r_3(\eta, 0) = v_l, \quad r_2(\eta, 0) = \begin{cases} v_r, & \eta < 0 \\ v_l, & \eta \geq 0 \end{cases} . \quad (3.33)$$

Dikkat edilecek olursa, mKdV(f) ve smKdV(f) denklemleri için ilk mertebe problemin çözümü olan f_0 aynıdır. mKdV(f) denkleminin farklı şok dalga çözümleri için bilinen sınıflandırma yardımıyla, (3.3) başlangıç koşulunda DSW yayılımı gözlemlenmesi için $v_l > v_r \geq 0$ eşitsizliğinin sağlanması gerekmektedir [25,26]. Ayrıca, muhtemel diğer eşitsizlikler için de farklı tipte şok dalga çözümleri elde edilebilir. Bu tez

çalışmasında, mKdV(f) denklemini için yapılan sınıflandırma göz önünde tutularak benzer bir inceleme Bölüm 3.4.5'te yapılacaktır.

Başlangıç koşulunun sağlanması gereken eşitsizlik belirlendikten sonra, smKdV(f)-Whitham sistemi için sınır koşulları belirlenmelidir. mKdV(f)-Whitham sisteminin sınır koşulları sabit olduğundan, bu tez çalışmasında asıl amaç $S(t)$ 'ye bağlı olarak değişen smKdV(f)-Whitham sisteminin sınır koşullarını belirlemektir. Bu amaçla, (3.31) denkleminde yer alan h_i 'lerin $m \rightarrow 0$ (sol sınır uç) ve $m \rightarrow 1$ (sağ sınır uç) iken limitleri hesaplanacaktır. Yapılan uzun hesaplamalar sonucu bu limitler aşağıdaki gibi elde edilirler:

$$\lim_{m \rightarrow 0} h_1 = \frac{r_3^2}{r_1}, \quad \lim_{m \rightarrow 0} h_2 = \frac{r_3^2}{r_1}, \quad \lim_{m \rightarrow 0} h_3 = r_3, \quad (3.34)$$

$$\lim_{m \rightarrow 1} h_1 = r_1, \quad \lim_{m \rightarrow 1} h_2 = 2r_3, \quad \lim_{m \rightarrow 1} h_3 = 2r_3. \quad (3.35)$$

Uyarı 3.4.1 (3.34) limit değerleri incelendiğinde, r_1 'in sıfırdan farklı seçilmesi gerektiği sonucuna varılmıştır. Bölüm 2'den hatırlanacağı gibi cmKdV(f) denkleminin sol sınır uç limit değerinden elde edilen kısıtlama sebebiyle Riemann değişkeni r_1 sıfırdan farklı alınarak sayısal çözümler elde edilmiştir.

Ardından, smKdV(f)-Whitham sisteminin sınır koşullarını belirleyebilmek için, (3.29) denklemindeki η 'ya bağlı türevler ihmal edilir ve geriye kalan t bağımsız değişkenine bağlı adi diferansiyel denklem sistemi çözümlenerek aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

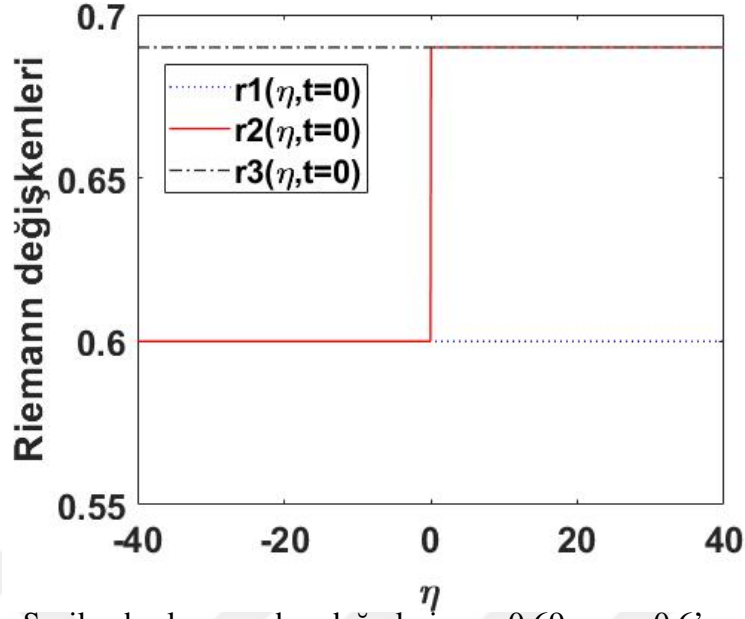
$$m \rightarrow 0 \quad \text{iken} \quad r_1 = r_2 \rightarrow \frac{\sqrt{(v_r^2 - v_l^2)(t + t_0)^2 + v_l^2 t_0^2}}{(t + t_0)}, \quad r_3 \rightarrow v_l \frac{t_0}{t + t_0} \quad (3.36)$$

$$m \rightarrow 1 \quad \text{iken} \quad r_1 \rightarrow v_r \frac{t_0}{t + t_0}, \quad r_2 = r_3 \rightarrow v_l \frac{(t_0)^2}{(t + t_0)^2} \quad (3.37)$$

Uyarı 3.4.2 Dikkat edilecek olursa, (3.36) çözümleri yardımıyla r_1 ve r_2 limit değerlerinden reel çözümler elde edebilmek için

$$(v_r^2 - v_l^2)(t + t_0)^2 + v_l^2 t_0^2 \geq 0 \quad (3.38)$$

eşitsizliği sağlanmalıdır.



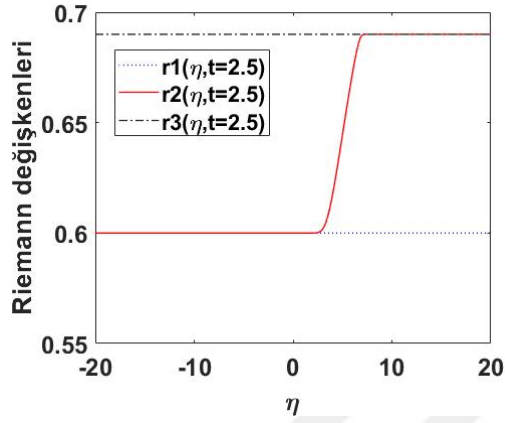
Şekil 3.1 : Seçilen başlangıç adım değerleri $v_l = 0.69$ ve $v_r=0.6$ 'ya göre Riemann değişkenleri için (3.39)'de verilen başlangıç değerleri.

Bu eşitsizlik, v_r , v_l , t ve t_0 üzerine kısıtlama getirmektedir ve alınan değerlere bağlı olarak çözümler eliptik ya da hiperbolik olmaktadır.

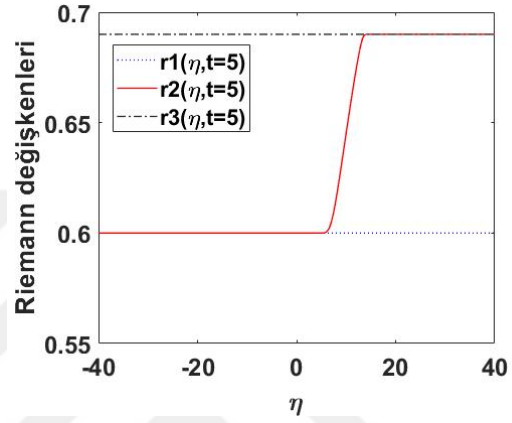
Şimdi, tez çalışmasının amacına uygun olarak, yani DSW yayılımının gözlemlenmesi için, (3.38) eşitsizliğini sağlayacak şekilde $t_0 = 10$ olmak üzere Riemann tipi değişkenler için aşağıdaki başlangıç koşulu alınmıştır (Şekil 3.1):

$$r_1(\eta, 0) = 0.6, \quad r_2(\eta, 0) = \begin{cases} 0.6, & \eta < 0 \\ 0.69, & \eta \geq 0 \end{cases}, \quad r_3(\eta, 0) = 0.69. \quad (3.39)$$

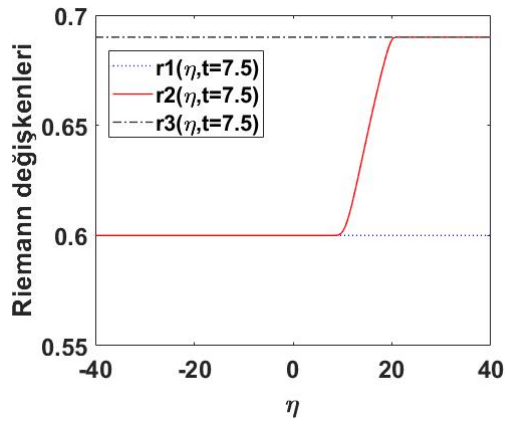
Benzer inceleme diğer t_0 değerleri için de yapılabilir. Ancak, bu değer çok büyük ya da küçük seçilmesi durumunda paraboloid yapının formu bozulmaktadır. (3.29) Whitham modülasyon denklemlerinin, (3.39) başlangıç koşulu ve (3.36)-(3.37) sınır koşullarıyla birlikte sayısal çözümlerini elde edebilmek için Shampine [53] tarafından birinci mertebe hiperbolik kısmi türevli denklemler için geliştirilmiş MATLAB tabanlı çözücü kullanılmıştır. Çözümler elde edilirken, Lax-Wendrof yönteminin farklı bir türü seçilmiştir. Bu bölümle ilgili analiz yapılırken, $[-160, 160]$ tanım aralığında $N = 2^{12}$ nokta kullanılmış ve zaman ayrıklaştırma aralığı olarak da maddesel ayrıklaştırma aralığının 0.4 katı seçilmiştir. mKdV(f) ve smKdV(f) denklemlerine ait DSW çözümlerinin grafikleri elde edilirken, (3.23) ve (3.25) denklemleri kullanılmıştır. mKdV(f) ve smKdV(f) denklemlerine ait Riemann değişkenlerinin çözümleri $t =$



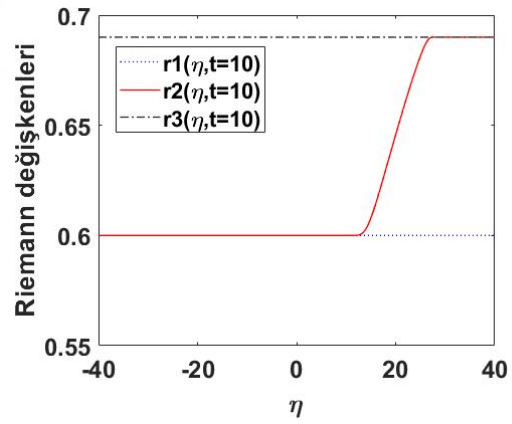
(a) $t = 2.5$



(b) $t = 5$

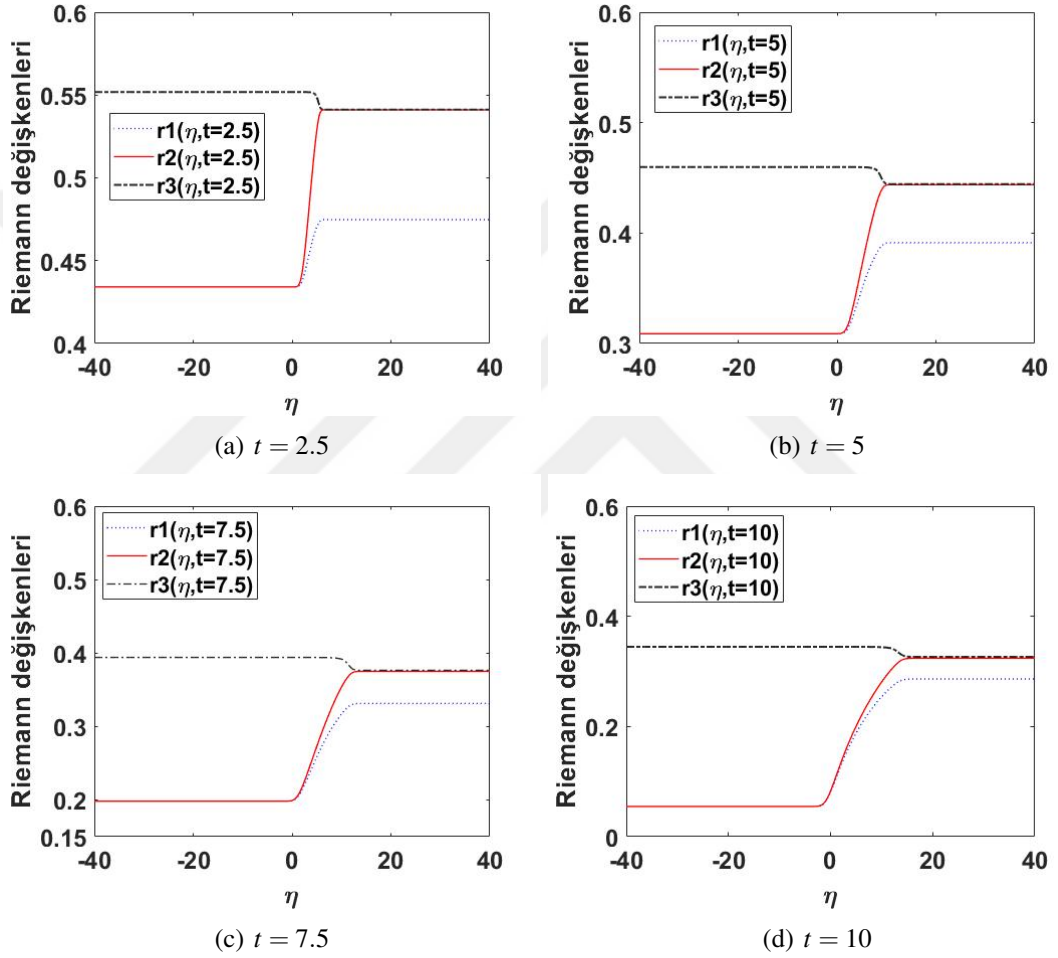


(c) $t = 7.5$



(d) $t = 10$

Şekil 3.2 : mKdV(f) denklemi için (3.29) Whitham sisteminin asimptotik olarak çözülmesi sonucu elde edilen $t = 2.5, 5, 7.5, 10$ 'daki Riemann değişkenleri.



Şekil 3.3 : smKdV(f) denkleminin (3.29) Whitham sisteminin asimptotik olarak çözülmesi sonucu elde edilen $t = 2.5, 5, 7.5, 10$ 'daki Riemann değişkenleri.

2.5, 5, 7.5 ve $t = 10$ için sırasıyla Şekil 3.2 ve Şekil 3.3'te çizdirilmiştir. Şekil 3.3'te, smKdV(f) denkleminin ait tüm Riemann değişkenlerinin zamanla azaldığı açıkça görülmektedir.

3.4.2 mKdV(f) ve smKdV(f) denklemlerinin doğrudan sayısal çözümü

Önceki bölümde mKdV(f) ve smKdV(f) denklemlerine ait Whitham sistemlerinin çözümleri bir tür asimptotik analiz olan çoklu ölçekler metodu kullanılarak elde edilmiştir. Bu bölümde ise, mKdV(f) ve smKdV(f) denklemlerinin doğrudan sayısal çözümleri bulunacaktır. Daha önce de Bölüm 2'de mKdV(f) ve cmKdV(f) denklemleri için yapılan analizde belirtildiği gibi basamak tipi başlangıç koşulu ve ilgili sınır koşulları ile birlikte sayısal olarak elde etmek için ETDRK4 metodunun modifiye versiyonu kullanılacaktır.

Ayrıntıları daha önceki ilgili bölümde anlatılan ETRK4 yöntemini uygulayabilmek için sınır koşullarının sabit olması gerekmektedir. mKdV(f) denkleminin sınır koşulları sabit olarak kalmaktadır, ancak smKdV(f) denkleminin sınır koşullarında zamana bağlı $S(t)$ fonksiyonu yer almaktadır. Bu nedenle, öncelikle, smKdV(f) denklemi için sınır koşulları aşağıdaki dönüşüm ile sabit hale getirilir:

$$f = S(t)\xi, \quad S(t) = \frac{t_0}{t + t_0}. \quad (3.40)$$

(3.40) dönüşümünün (3.11) ile verilen smKdV(f) denkleminde yerine yazılmasıyla

$$\xi_t + 6S^2\xi^2\xi_\eta + \varepsilon^2\xi_\eta\eta\eta = 0 \quad (3.41)$$

elde edilir. (3.40) dönüşümü yardımıyla elde edilen (3.41) denklemi, sol sınır uçta $\xi_- = v_l$ sağ sınır uçta ise $\xi_+ = v_r$ olacak şekilde sabit sınır koşullarını sağlar. Bölüm 2'de olduğu gibi ETDRK4 yöntemini kullanabilmek için (3.41) denklemi η 'ya göre bir kez türetilip, $\xi_\eta = z$ olarak isimlendirilirse aşağıdaki denklem elde edilir:

$$z_t + 6S^2(\xi^2z)_\eta + \varepsilon^2z_\eta\eta\eta = 0 \quad (3.42)$$

Uygun bir teknik ile dönüştürülen (3.42) denkleminin Fourier dönüşümü uygulanırsa

$$\hat{z}_t = \mathbf{L}\hat{z} + 6S^2\mathbf{N}(\hat{z}, t) \quad (3.43)$$

olur. Burada, $\hat{z} = F(z)$, z 'nin Fourier dönüşümü ve $z = F^{-1}(\hat{z})$ ile ters Fourier dönüşümü temsil edilmektedir. Daha önceki bölümde olduğu gibi, \mathbf{L} lineer terimi ve \mathbf{N} nonlinear terimi göstermektedir. Böylece, (3.11) denklemi

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\hat{z} &= -i\varepsilon^2 k^3 z, \\ \mathbf{N}(\hat{z}, t) &= -ikF\left[\left(\xi_- + \int_{-R}^{\eta} F^{-1}(\hat{z})dy\right)^2 F^{-1}(\hat{z})\right] \end{aligned} \quad (3.44)$$

şeklinde adi diferansiyel denklem sistemine indirgenir. Elde edilen bu sistemde, R pozitif bir sabiti göstermektedir. ETDRK4 yönteminin spektral doğruluğu için z 'nin başlangıç koşullarının düzgün ve periyodik olması gerektiği bir önceki bölümden hatırlanacak olursa, v için olan (3.3) başlangıç koşulu

$$z(\eta, 0) = -\delta(\eta), \quad \delta = \text{Dirac delta fonksiyonu} \quad (3.45)$$

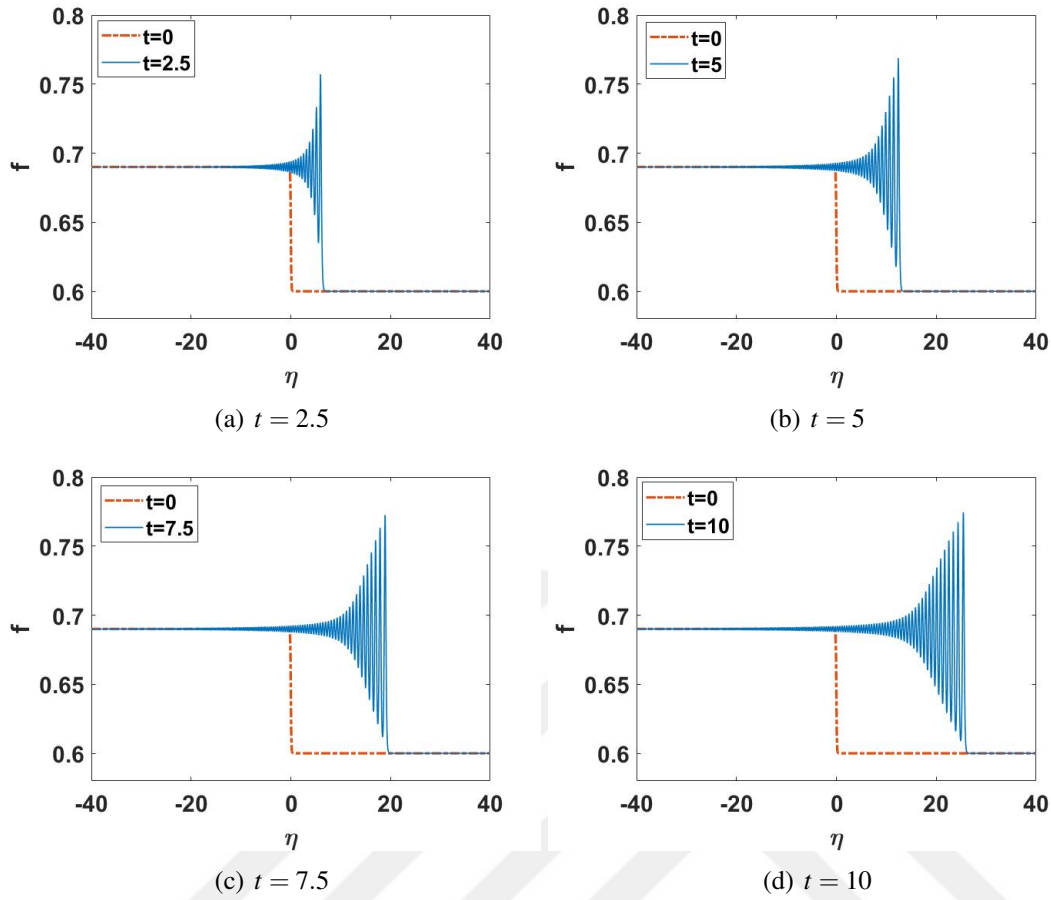
şeklinde ifade edildiğinden (3.45) başlangıç koşulu aşağıdaki gibi yeniden düzenlenebilir:

$$z(\eta, 0) = -\frac{\tilde{K}}{2} \text{sech}^2(\tilde{K}\eta). \quad (3.46)$$

Burada, \tilde{K} ile büyük pozitif bir sabiti temsil etmektedir. Sonuç olarak, (3.42) denklemi uygulanan Fourier dönüşümü ile birlikte (3.43) denkleme dönüşür. (3.43) denkleminin sonlu $[-R, R]$ aralığında ETDRK4 sayısal şeması kullanılarak çözülebileceği görülmektedir.

Yukarıda anlatılan sayısal şema kullanılırken, maddesel koordinat için $[-200, 200]$ tanım aralığı seçilirken, bu koordinat için $N = 2^{15}$ Fourier modu kullanılmıştır. Ayrıca, zaman ayrıklaştırma aralığı olarak 10^{-3} seçilmiştir. Ek olarak, yapılan bu analizde smKdV(f) denklemi için $t_0 = 10$, $\varepsilon^2 = 5 \cdot 10^{-3}$ ve $\tilde{K} = 10$ parametreleri alınmıştır.

mKdV(f) ve smKdV(f) denklemlerine ait doğrudan sayısal çözümlerin grafikleri $t = 2.5, 5, 7.5$ ve $t = 10$ için sırasıyla Şekil 3.4 ve Şekil 3.5'te verilmiştir. Bunlara ek olarak, grafiklerin üç boyutlu halleri Şekil 3.7'de çizdirilmiştir. Şekil 3.4 ve Şekil 3.7'ten görüldüğü üzere, mKdV(f) denkleminde zaman artmasına rağmen arka kenar 0.6'da sabit iken, ön kenarın genliği 0.2'ye yaklaşmaktadır. Şekil 3.5 ve Şekil 3.7 incelendiğinde, smKdV(f) denklemi için zaman arttıkça hem ön kenar hem de arka kenar seviyelerinin azaldığı görülür. Şekil 3.4 ve Şekil 3.5 karşılaştırıldığında, smKdV(f) denkleminde yer alan küresel terimin etkisiyle, arka kenar ve ön kenar



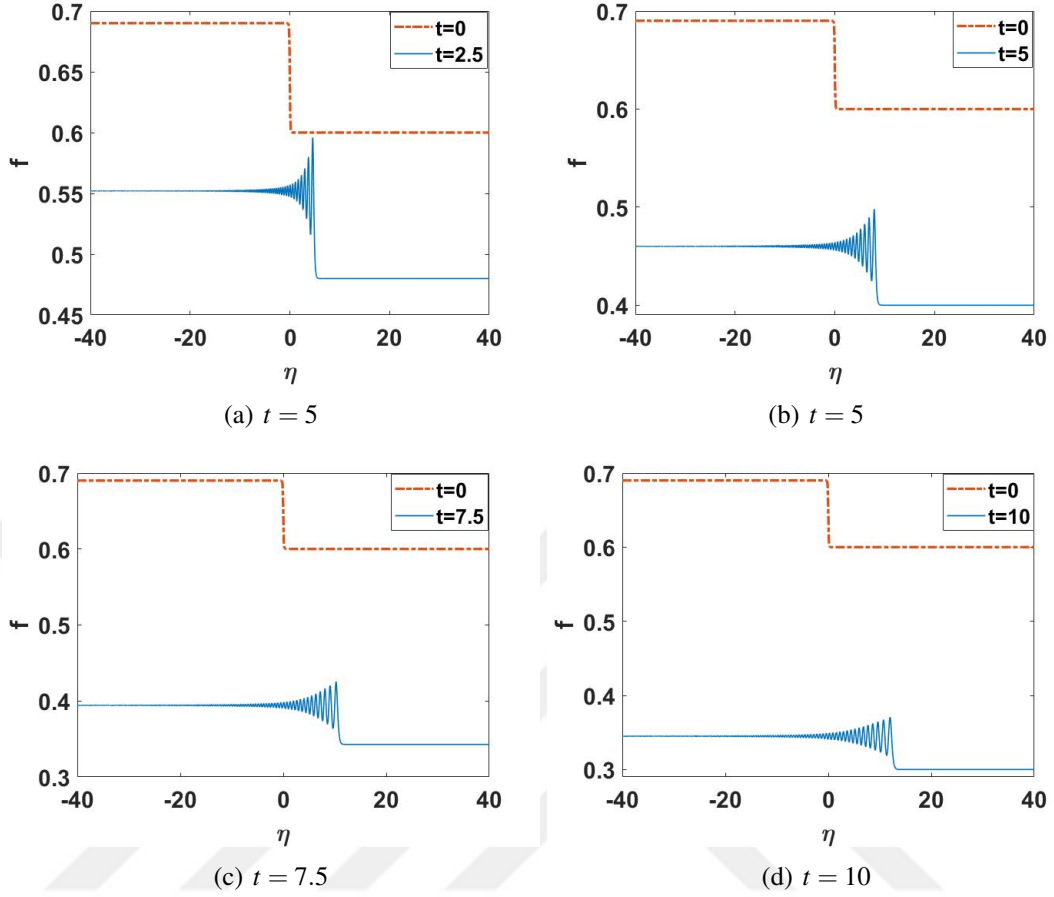
Şekil 3.4 : Kırmızı kesikli olarak verilen çizgi, $v_l = 0.69$ ve $v_r = 0.6$ için (3.3)'de adım başlangıç değerlerini göstermektedir. Mavi eğri ise, farklı zaman değerlerinde $\varepsilon^2 = 5 \cdot 10^{-3}$ seçilmesi ile doğrudan sayısal çözümlerle elde edilen mKdV(f) denkleminin dispersif şok çözümünü temsil etmektedir.

genlikleri azalmaktadır. Hem mKdV(f) hem de smKdV(f) denklemlerinde DSW'nın ilk sıçramanın sağına doğru ilerlediğini ve solitonların ön kenarda (sağ taraf) oluştuğu gözlemlenmektedir.

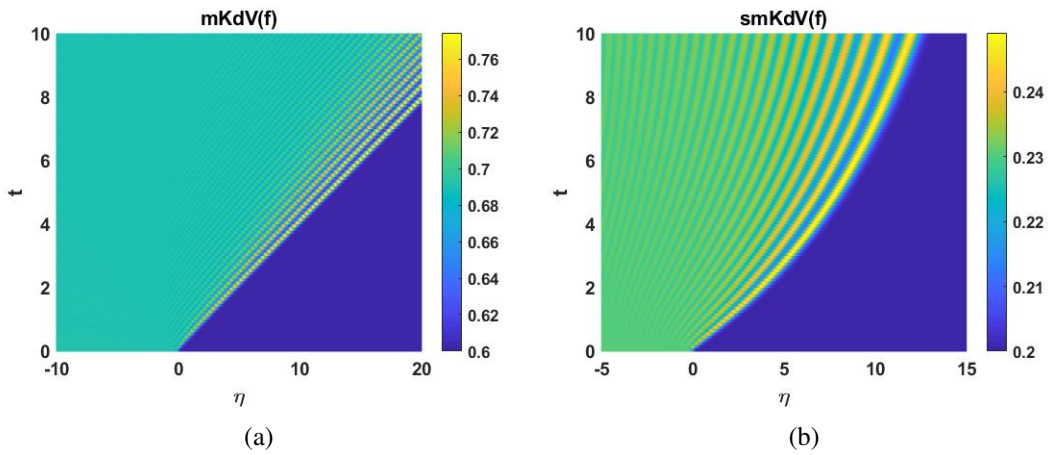
Şekil 3.6'da ise mKdV(f) ve smKdV(f) denklemlerinin doğrudan sayısal çözümlerine ait uzay-zaman grafikleri verilmiştir. Buradan, smKdV(f) denklemine ait dalga katarlarının mKdV(f) denkleminde farklı olarak birbirinden ayrıldığı daha net bir şekilde görülmektedir.

3.4.3 mKdV(f) ve smKdV(f) denklemlerinin asimptotik çözümü ve doğrudan sayısal çözümünün karşılaştırılması

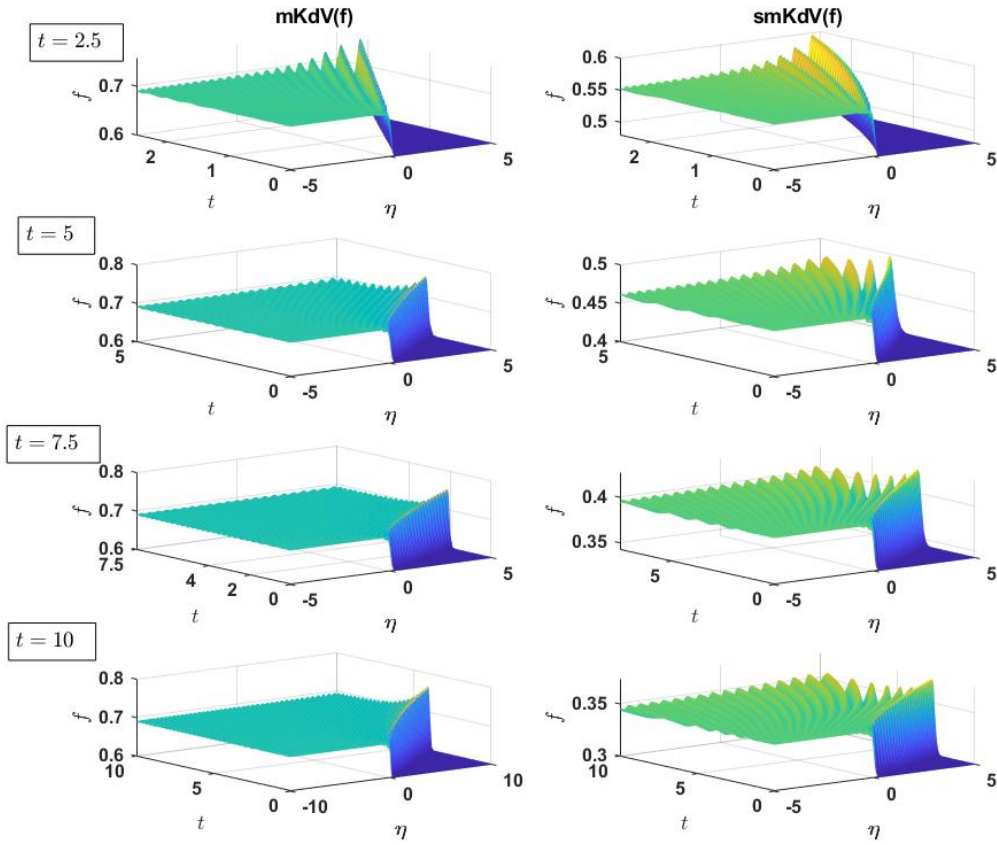
Bu kısımda, (3.29) modülasyon denklemlerinin sayısal çözümlerinden elde edilen DSW çözümleriyle, mKdV(f) ve smKdV(f) denklemlerinin doğrudan sayısal



Şekil 3.5 : Kırmızı kesikli olarak verilen çizgi, $v_l = 0.69$ ve $v_r = 0.6$ için (3.3)'de adım başlangıç değerlerini göstermektedir. Mavi eğri ise, farklı zaman değerlerinde $\varepsilon^2 = 5.10^{-3}$ ve $t_0 = 10$ seçilmesi ile doğrudan sayısal çözümle elde edilen smKdV(f) denkleminin dispersif şok çözümünü temsil etmektedir.



Şekil 3.6 : (a) mKdV(f) (b) smKdV(f) denklemleri için $t = 0$ ve $t = 10$ arasındaki doğrudan sayısal çözümlerin uzay-zaman grafikleri.



Şekil 3.7 : Sol panelde $mKdV(f)$ denklemi, sağ panelde $smKdV(f)$ denklemi için $t = 2.5, 5, 7.5$ ve $t = 10$ 'da elde edilen doğrudan sayısal çözümlerin grafikleri.

çözümlerinin karşılaştırılması yapılacaktır. Bu amaçla, $mKdV(f)$ ve $smKdV(f)$ denklemlerinin Whitham sistemlerinin çözümünü elde etmek için Şekil 3.2 ve Şekil 3.3 ile verilen sonuçlarla birlikte, (3.23) ile verilen ilk mertebe problemin çözümü (f_0) ve (3.25) ile hesaplanan hızlı değişken olan θ kullanılarak, $mKdV(f)$ ve $smKdV(f)$ denklemlerinin $t = 2.5, 5, 7.5$ ve $t = 10$ 'daki DSW yayılımı elde edilmiştir. Bulunan sonuçlar ile daha önce bulunan $mKdV(f)$ ve $smKdV(f)$ denklemlerine ait doğrudan sayısal çözümler (Şekil 3.4-Şekil 3.5) Şekil 3.8 ve Şekil 3.9'de karşılaştırılmıştır. Buradan, $mKdV(f)$ ve $smKdV(f)$ denklemlerinde görülen DSW yapısıyla ilgili olarak ön kenar genliğinin ve salınımların dalga boyunun, asimptotik yaklaşım ve sayısal çözümle uyumlu olduğu görülmektedir. Şekil 3.8 ve Şekil 3.9 incelendiğinde, dalga katarlarının pozisyonları arasında ufak bir fark olduğu görülür. Bu durum, (3.23)

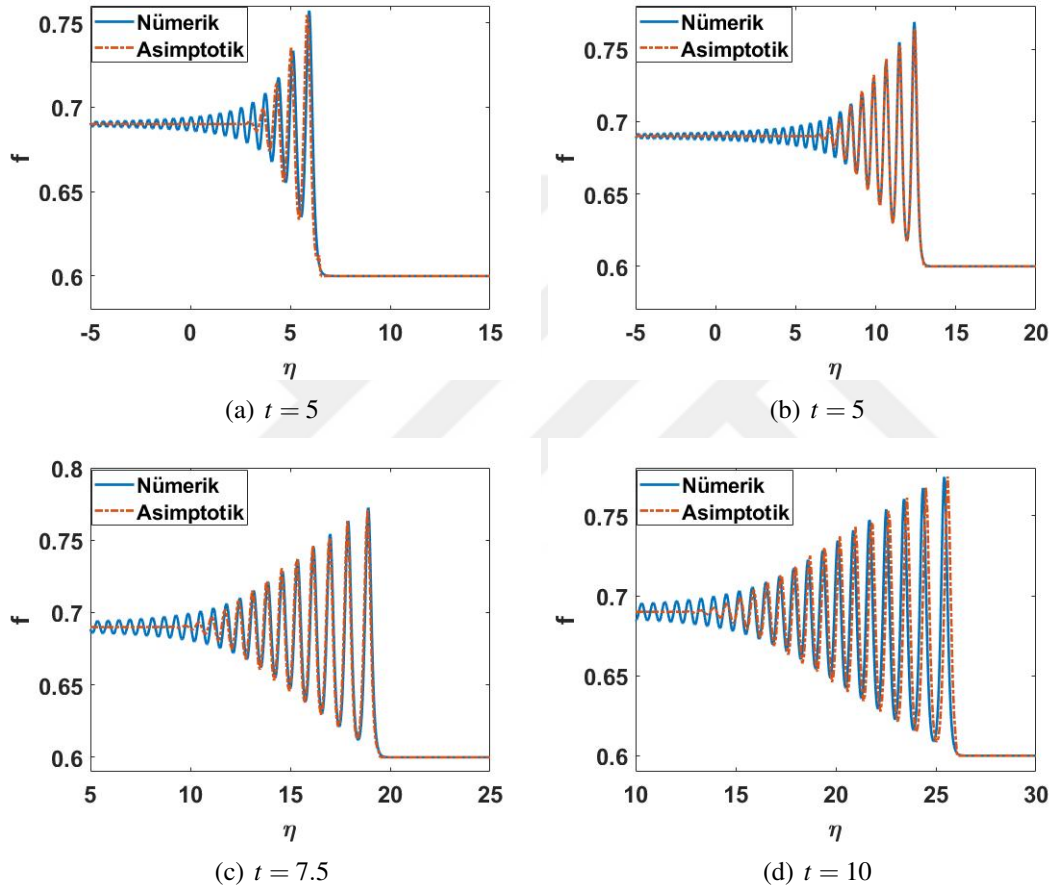
Çizelge 3.1 : $t = 2.5, 5, 7.5$ ve $t = 10$ zaman değerlerinde mKdV(f) denklemi için A_{avg} , M_A ve V_{avg} değerleri.

t (Zaman)	A_{avg} (Doğrudan çözüm)	M_A (Asimptotik çözüm)	V_{avg}
2.5	0.7236	0.7175	2.7976
5	0.7291	0.7296	2.7741
7.5	0.7312	0.7356	2.7350
10	0.7316	0.7301	2.7331

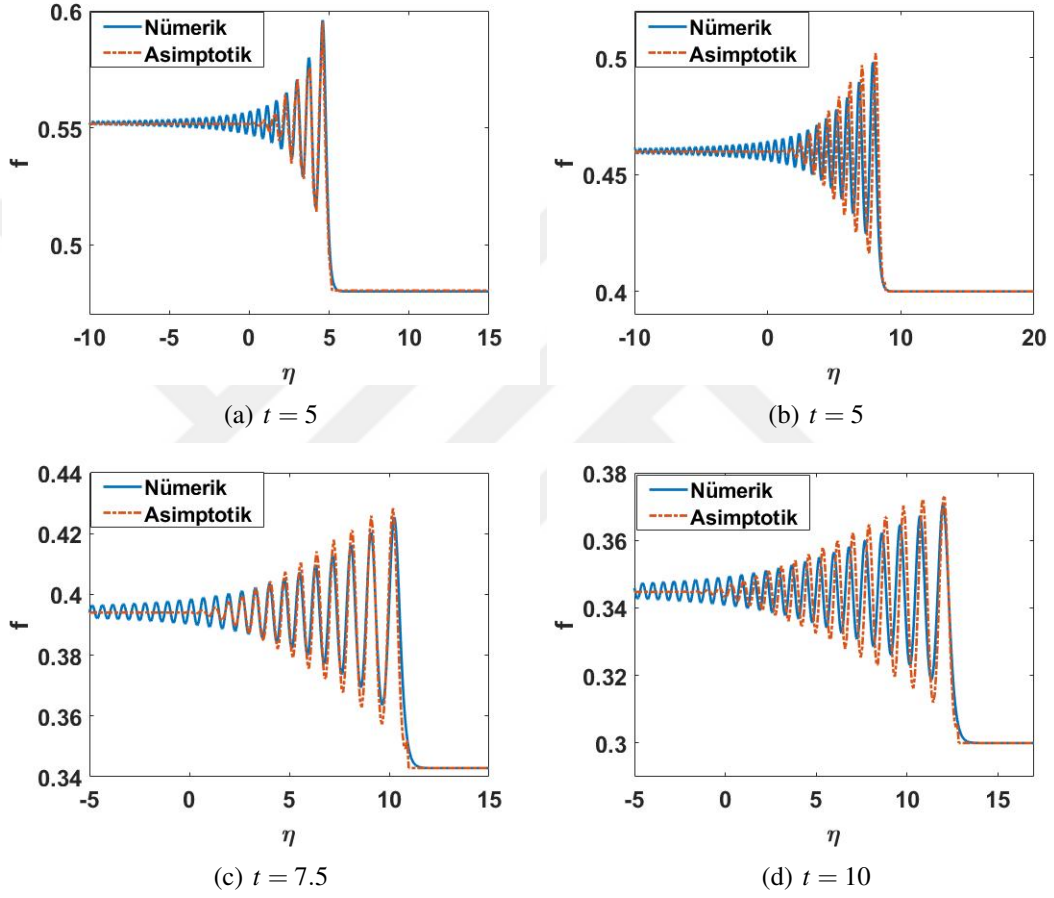
Çizelge 3.2 : $t = 2.5, 5, 7.5$ ve $t = 10$ zaman değerlerinde smKdV(f) denklemi için A_{avg} , M_A ve V_{avg} değerleri.

t (Zaman)	A_{avg} (Doğrudan çözüm)	M_A (Asimptotik çözüm)	V_{avg}
2.5	0.5736	0.5701	2.4850
5	0.4786	0.4834	1.9614
7.5	0.4099	0.41074	1.5476
10	0.3557	0.3567	1.4496

ilk mertebeye problemin çözümünde yer alan θ_0 'ı yaklaşık olarak belirleyebilmemizden kaynaklanmaktadır. Aslında daha yüksek mertebeden asimptotik açılım yapılarak faz farkı için daha iyi sonuçlar elde edilebilir. Fakat bu inceleme çalışılan tez konusunun dışındadır. Özel olarak, asimptotik çözümler için gerekli olan θ_0 , doğrudan sayısal çözümlerden elde edilen sol taraftaki seviye değeriyle sağ taraftaki en büyük genliğe sahip dalga katarının ortalaması alınmıştır ve bu ortalama genlik değeri " A_{avg} " ile temsil edilecektir. Daha sonra, asimptotik çözümde bu değere en yakın ortadaki dalga katarına göre θ_0 değeri belirlenmiştir. Asimptotik çözümdeki, ortalama genlik değerine en yakın dalga katarının genliği ise M_A ile gösterilmektedir. mKdV(f) ve smKdV(f) denklemlerine ait A_{avg} ve M_A değerleri farklı zaman değerleri için sırasıyla Çizelge 3.1 ve Çizelge 3.2'de verilmektedir. Bu sonuçlar, denklemlerin doğrudan sayısal çözümleri ve Whitham modülasyon denklemlerinin çözümlerinin birbiri ile tutarlı olduğunu göstermektedir. Ek olarak, aynı çizelgelerde en büyük genliğe sahip dalga katarının ortalama hız değerleri (V_{avg}) farklı zaman değerleri için verilmiştir. Çizelgelerden görüldüğü üzere, smKdV(f) denklemine ait ortalama hız değerleri mKdV(f) denklemine göre oldukça küçüktür. Bu durum, en büyük genliğe sahip dalga katarının genliğinin zamanla azalmasından kaynaklanmaktadır. Bunun sebebi, genlik azaldıkça ortalama hız değerinin de azalmasıdır.



Şekil 3.8 : $\varepsilon^2 = 5.10^{-3}$ seçilerek farklı zaman değerlerinde $v_l = 0.69$ ve $v_r = 0.6$ adım tipi başlangıç değerleri için mKdV(f) denkleminin doğrudan sayısal çözümünün ve asimptotik çözümünün (Whitham modülasyon teorisi çözümü) karşılaştırmaları.



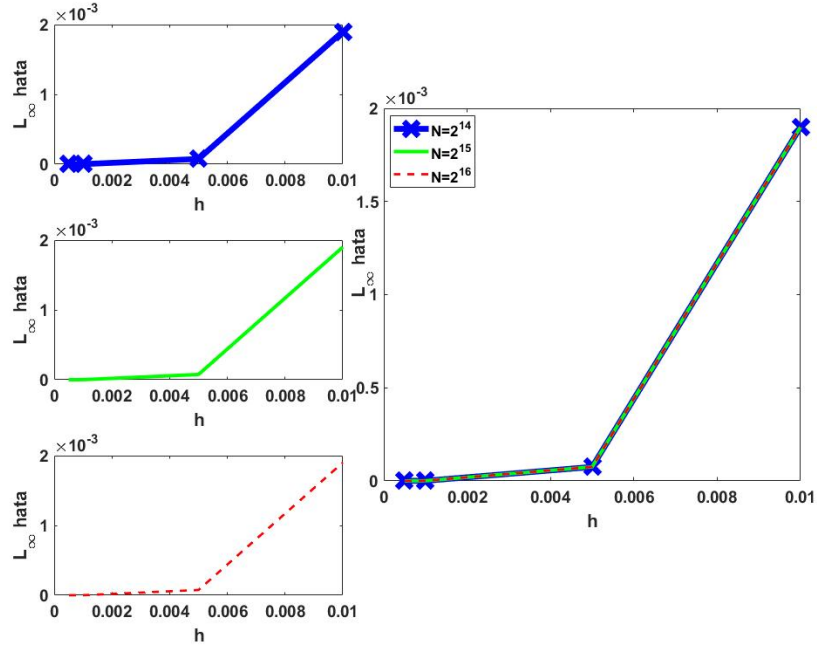
Şekil 3.9 : $\varepsilon^2 = 5 \cdot 10^{-3}$ ve $t_0 = 10$ seçilerek farklı zaman değerlerinde $v_l = 0.69$ ve $v_r = 0.6$ adım tipi başlangıç değerleri için smKdV(f) denkleminin doğrudan sayısal çözümünün ve asimptotik çözümünün (Whitham modülasyon teorisi çözümü) karşılaştırmaları.

3.4.3.1 ETRK4 yöntemi için hata analizi

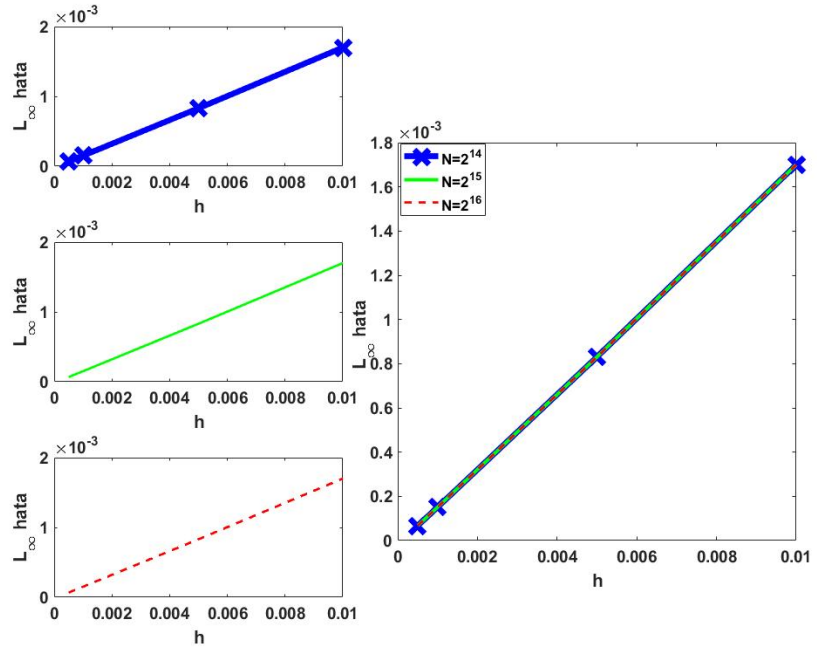
Bu bölümde, orijinal denklemleri doğrudan çözmek için kullanılan ETDRK4 yöntemi için hata analizi yapılmıştır. Bunun için, $h = 0.0001$ zaman aralığı referans olarak alınmış ve zaman aralıkları değiştirilerek L_∞ normuna göre hata hesaplanmıştır. Bölüm 2.4'te mKdV(f) ve cmKdV(f) denklemleri için kullanılan yöntem yardımıyla $v_r = 0.6$ ve $v_l = 0.69$ Riemann tipi başlangıç koşulu için klasik mKdV(f) ve smKdV(f) denklemleri için hata analizi yapılmıştır. Hesaplamalarda, maddesel koordinat için $[-200, 200]$ tanım aralığı alınırken; zayıf dispersiyon etkisini belirleyen sabit $\varepsilon = 0.005$ olarak alınmıştır. Dikkat edilecek olursa, bu parametreler denklemleri doğrudan çözmek için de kullanılan değerlerdir.

İlk olarak, klasik mKdV(f) denklemi için doğrudan çözümde kullanılan diğer parametreler sabit tutularak, Fourier mod sayıları $N = 2^{14}$, $N = 2^{15}$, $N = 2^{16}$ alınarak yapılan hesaplamalara göre, norm hata değerleri Çizelge 3.3'te verilmiştir. Bu çizelgeler yardımıyla, zaman aralığı arttıkça hata mertebesinin arttığı gözlemlenmiştir. Ek olarak, Şekil 3.10'da $N = 2^{14}$, $N = 2^{15}$, $N = 2^{16}$ Fourier mod sayıları için hata analizi karşılaştırması yapılmış ve Fourier mod sayısı arttığında hata mertebesinde önemli bir değişiklik olmadığı gözlemlenmiştir. Şekil 3.10'dan da görüleceği gibi hata $h = 0.0005$ zaman aralığı için 10^{-7} iken zaman aralığı arttıkça hata artmaktadır.

Klasik mKdV(f) denklemi için yapılan analiz smKdV(f) için de yapılmıştır. Çizelge 3.4'de maddesel koordinat için tanım aralığı $[-200, 200]$ ve dispersiyon sabiti $\varepsilon^2 = 0.005$ olarak alınarak tekrarlanan hesaplamalarda, seçilen farklı Fourier mod sayılarına göre ortayançikan hata değerleri verilmiştir. Ayrıca, farklı Fourier mod sayıları için hata karşılaştırılması Şekil 3.10'de yapılmıştır. Buradan, klasik denklemle smKdV(f) arasındaki hatalar karşılaştırıldığında smKdV(f) denkleminde hatanın merite olarak daha büyük olduğu gözlemlenmiştir. Benzer biçimde, smKdV(f) denklemi için de adım aralığı arttığında hata mertebesinin arttığı bu şekiller yardımıyla görülür.



(a)



(b)

Şekil 3.10 : (a) mKdV(f), (b) smKdV(f) denkleminin $t = 10^3$ 'da farklı Fourier modları (N) için L_∞ normuna göre hataların karşılaştırılması. Burada, başlangıç ön kenar ve arka kenar seviyesi (0.6, 0.69) ve $\varepsilon^2 = 0.005$ olarak seçilmiştir.

Çizelge 3.3 : mKdV(f) denklemi için elde edilen hata analizi.

h (Zaman adımı)	$N = 2^{14}$	$N = 2^{15}$	$N = 2^{16}$
0.0005	1.8830e-07	1.8885e-07	1.8904e-07
0.001	9.4657e-07	9.4935e-07	9.5056e-07
0.005	7.5173e-05	7.5361e-05	7.5377e-05
0.01	0.0019	0.0019	0.0019

Çizelge 3.4 : smKdV(f) denklemi için elde edilen hata analizi.

h (Zaman adımı)	$N = 2^{14}$	$N = 2^{15}$	$N = 2^{16}$
0.0005	6.7066e-05	6.7066e-05	6.7066e-05
0.001	1.5089e-04	1.5089e-04	1.5089e-04
0.005	8.3057e-04	8.3058e-04	8.3063e-04
0.01	0.0017	0.0017	0.0017

3.4.4 mKdV(f), cmKdV(f) ve smKdV(f) denklemlerine ait Whitham modülasyon teorisi ve doğrudan çözümlerinin karşılaştırılması

Bölüm 2’de cmKdV(f) denkleminin ait sayısal çözümler elde edilmiş ve klasik mKdV(f) denkleminin ait çözümlerle karşılaştırılarak silindirik terimin etkisi incelenmiştir. Bölüm 3’te ise smKdV(f) denklemi ile mKdV(f) denklem çözümleri karşılaştırılarak sonuçlar ortaya koyulmuştur. Bu kısımda, klasik mKdV(f), cmKdV(f) ve smKdV(f) denklemlerine ait sayısal çözümlerin karşılaştırılması amaçlanmaktadır.

Öncelikle, denklemler için başlangıç koşulu uygun şekilde belirlenmelidir. Bunun için, Bölüm 2.4.1’de cmKdV(f) denkleminin Whitham modülasyon denklemlerinin çözümlerinden elde edilen (2.75) eşitsizliğini

$$2(v_r^2 - v_l^2)t + v_r^2 t_0 \geq 0$$

ve smKdV(f)-Whitham sisteminin çözümlerinden gelen (3.38) eşitsizliğini

$$(v_r^2 - v_l^2)(t + t_0)^2 + v_l^2 t_0^2 \geq 0$$

sağlayacak şekilde v_r ve v_l değerleri belirlenmelidir. Her iki eşitsizlik de göz önünde bulundurulursa $v_l = 0.69$ ve $v_r = 0.6$ olacak şekilde adım tipi başlangıç koşulu ele alınabilir. Ayrıca, bu başlangıç koşulu Bölüm 3’te ele alınan seviye değerleri olduğundan analizi kolaylaştırmaktadır. Burada ele alınan başlangıç koşulu dışında

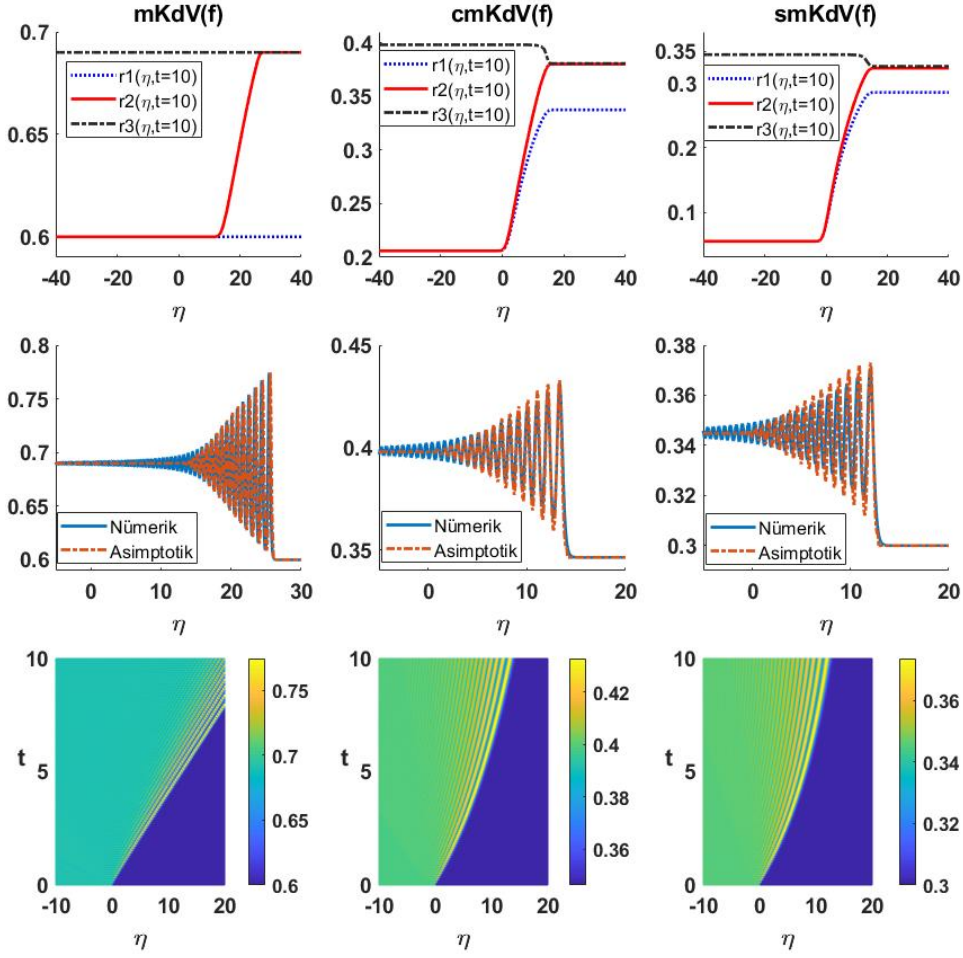
eşitsizlikleri sağlayacak şekilde farklı basamak tipi başlangıç koşulları için DSW çözümleri elde edilebilir.

Şekil 3.11’de $mKdV(f)$, $cmKdV(f)$ ve $smKdV(f)$ denklemlerine ait Whitham sistemlerinin çözümleri (Riemann değişkenlerinin zamana bağlı değişimi), doğrudan sayısal çözüm- asimptotik çözüm karşılaştırması ve doğrudan çözümlerin uzay-zaman grafikleri verilmiştir. Bütün grafiklerde $t = 10$ değerindeki sonuçlar yer almaktadır. Benzer analiz, diğer t değerleri için de yapılabilir.

Her üç denklem için Riemann değişkenlerinin zamanla değişimini inceleyerek analize başlanılacak olursa, $cmKdV(f)$ ve $smKdV(f)$ denklemlerinde, r_1 ve r_3 seviyeleri zamanla azalarak birbirine yaklaşmaktadır. Klasik $mKdV(f)$ denklemi için ise, bu seviyelerinin 0.6 ve 0.69 sabit olarak kaldığı görülmektedir. Zamana bağlı terim içeren denklemlerden olan $smKdV(f)$ denkleme ait çözümlerdeki azalma küresel terimin etkisiyle $cmKdV(f)$ denkleme ait çözümlerdeki azalmaya göre daha fazla olmuştur.

Öte yandan, doğrudan sayısal çözüm- asimptotik çözüm karşılaştırmasında, her üç denklem için de genlik ve dalga katarları sayısının birbiri ile uyumlu olduğu görülür. $mKdV(f)$ denkleminde sol taraftaki seviye 0.69’da sabit iken en büyük genliğe sahip dalga katarının genliği yaklaşık olarak (seviye farkının iki katı) 0.2’ye yaklaşır. $cmKdV(f)$ ve $smKdV(f)$ denklemlerin de ise sol taraftaki seviye farkı sırasıyla 0.398 ve 0.345’dir. Ayrıca, bu denklemler içinde en büyük genliğe sahip dalga katarının genliği seviye farkının iki katıdır. Bu gözlem, Marchant tarafından focusing $mKdV(f)$ denkleminde görülen DSW çözümleri için elde edilen verilerle tutarlıdır [25].

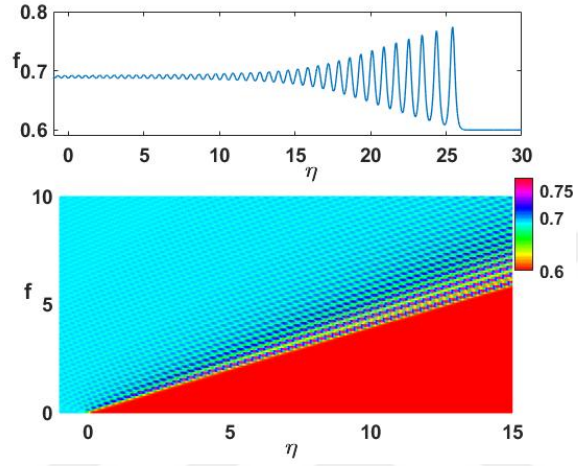
Ek olarak, Şekil 3.11’de klasik $mKdV(f)$, $cmKdV(f)$ ve $smKdV(f)$ denklemlerinin $t = 0$ ile $t = 10$ arasındaki doğrudan sayısal çözümlere ait uzay-zaman grafikleri de çizdirilmiştir. $cmKdV(f)$ ve $smKdV(f)$ denklemlerinin klasik $mKdV(f)$ denkleminde farklı olarak dalga katarlarının birbirinden uzaklaştığı görülmektedir. Ayrıca, $cmKdV(f)$ ve $smKdV(f)$ denklemleri arasındaki farkı daha iyi gözlemlemek için her üç denkleme ait doğrudan sayısal çözümler ve bu çözümlere ait uzay-zaman grafikleri $t = 10$ için Şekil 3.12’de çizdirilmiştir. Buradan, $smKdV(f)$ denkleminin dalga katarları arasındaki uzaklığın en fazla olduğu görülür.



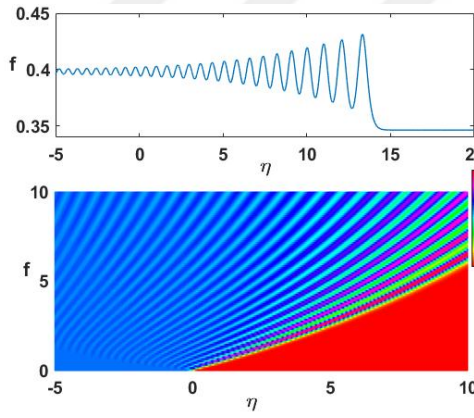
Şekil 3.11 : mKdV(f), cmKdV(f) ve smKdV(f) denklemlerine ait $t = 10$ 'da ilk satırda ilgili denklemlere ait Whitham sistemleri çözümü, ikinci satırda doğrudan sayısal çözüm-asimptotik çözüm karşılaştırması ve son satırda doğrudan sayısal çözümlere ait uzay-zaman grafikleri verilmiştir.

3.4.5 mKdV(f) tipindeki denklemler için Riemann problemi

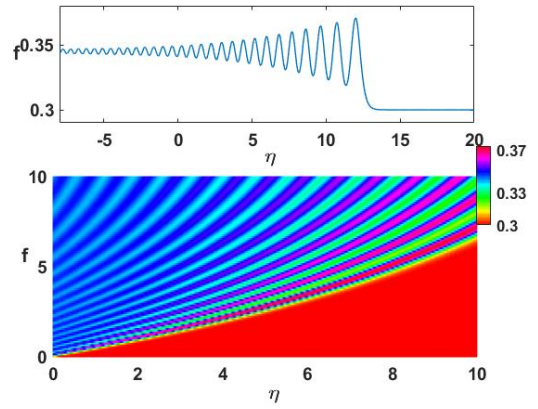
Bu tez çalışmanın temel amacı DSW çözümlerini incelemektir. Ancak, literatür incelendiğinde klasik mKdV denklemleri için farklı tipte şok dalga çözümleri için sınıflandırma yapıldığı görülmektedir [24]–[26]. Bu çalışmalardan [24]'de defocusing mKdV denklemleri için farklı şok tipi çözümlerinin sınıflandırılması yapılmıştır. Defocusing mKdV denklemleri ile ilgili ayrıntılar Bölüm 4'te verilecektir. [25,26]'da focusing mKdV denklemlerinde DSW çözümlerinin oluşabilmesi için gerekli olan



(a) mKdV(f)



(b) cmKdV(f)



(c) smKdV(f)

Şekil 3.12 : $v_l = 0.69$ ve $v_r = 0.6$ adım tipi başlangıç değerleri için $t = 10$ 'da (a) mKdV(f), (b) cmKdV(f) ve (c) smKdV(f) denkleminin doğrudan sayısal çözümleri ve uzay-zaman grafikleri.

kriterlerin yanı sıra, "Contact Dispersif Şok Dalgası" (CDSW) , Seyreltme Dalgası (R) ve bu dalgaların kombinasyonu olan CDSW-DSW, CDSW-R şok dalga çözümleri türetilmiştir. DSW çözümünün oluşabilmesi için verilen kriterler, başlangıç koşulunda verilen seviye değerlerine bağlıdır. Ancak $cmKdV(f)$ ve $smKdV(f)$ denklemleri gibi herhangi değişken katsayılı kısmi türevli denklem modeli için benzer bir problem sınıflandırması henüz yapılmamıştır. Bu çalışmada $cmKdV(f)$ ve $smKdV(f)$ denklemlerinin çözümlerinin sınıflandırılmasına yardımcı olabilecek, ilgili denklemlerin doğrudan sayısal çözümleri ile elde edilen sonuçlar verilecektir.

Hoefler ve El yaptığı detaylı çalışmada $mKdV(f)$ denkleminde dispersif şok dalga yayılımının gözlemlenmesi için

$$|v_l| > |v_r|, \quad v_r v_l \geq 0 \quad (3.47)$$

şartının sağlanması gerektiğini göstermiştir [26]. Benzer farklı şartların sağlanmasına bağlı olarak oluşan farklı tipteki şok dalga formlarına dair kriterler Çizelge 3.5'te verilmiştir.

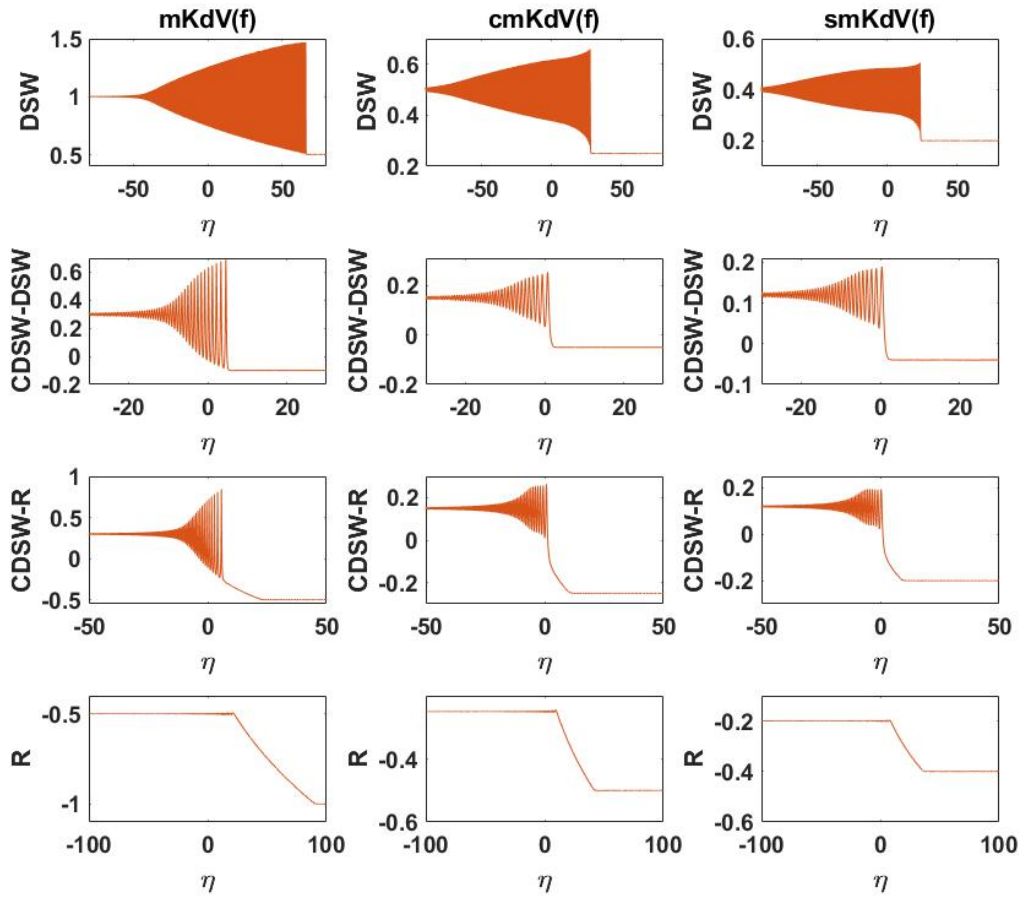
$|v_l| > |v_r|$ ve $v_r v_l \geq 0$ şartları sağlandığında, DSW'sı oluşmaktadır. Şekil 3.13'de $v_l = 1, v_r = 0.5$ parametre seçimine bağlı olarak oluşan $t = 15$ 'te DSW yayılımı gözlenmektedir. Klasik $mKdV(f)$ denkleminin arka kenar ve ön kenar pozisyonları sırasıyla $\eta_T = -45$ ve $\eta_L = 67$ 'dir. $cmKdV(f)$ denklemi için bu pozisyonlar $\eta_T = -89$ ve $\eta_L = 28$ 'dir. Bir diğer zamana bağlı terim içeren $smKdV(f)$ denklemi için ise arka kenar ve ön kenar pozisyonları sırasıyla $\eta_T = -92$ ve $\eta_L = 24$ 'tür. Bu sonuçlar, $mKdV(f)$ denkleminde $smKdV(f)$ denklemine doğru ön kenarların yavaşladığını, arka kenarların ise daha hızlı hale geldiğini göstermektedir. Ayrıca, her üç denklem için de ön kenarda seviye farklarının iki katı genlikli en büyük genliğe sahip dalga katarları mevcuttur. Arka kenarda ise en küçük genlikli dalgalar oluşmaktadır.

$|v_l| > |v_r|$ eşitsizliğinin sağlandığı fakat $v_r v_l > 0$ eşitsizliğinin sağlanmadığı durumda ise, klasik $mKdV(f)$ denkleminde CDSW ve DSW dalgaların kombinasyonu olarak adlandırılan "CDSW-DSW" dalga formu oluşmaktadır [25,26]. Şekil 3.13'te başlangıç koşulu olarak $v_l = 0.3$ ve $v_r = -0.1$ parametre seçimine bağlı olarak oluşan $t = 15$ 'teki CDSW-DSW çözümleri görülmektedir. Bir CDSW, klasik DSW'ye benzer salınımlı bir yapıya sahiptir ve $\eta \rightarrow -\infty$ iken $B > 0$ ve $\eta \rightarrow \infty$ iken $A = -B$ olmak üzere

Çizelge 3.5 : mKdV(f) denklemi için sınıflandırma.

$ v_l > v_r $	$v_r v_l > 0$	Şok Dalga Tipi
Evet	Evet	DSW
Hayır	Evet	Seyreltme Dalgası
Hayır	Hayır	CDSW-R
Evet	Hayır	CDSW-DSW

iki durumu birbirine bağlar (A ve B reel sabitlerdir). Her üç denklem modelinin CDSW-DSW formlarını karşılaştırdığımızda, mKdV(f) denkleminin CDSW-DSW çözümünün zarfının, cmKdV(f) ve smKdV(f) denklemlerine ait çözüm zarflarından oldukça farklı olduğu belirtilmelidir.



Şekil 3.13 : mKdV(f), cmKdV(f) ve smKdV(f) denklemlerine ait $t = 15$ için şok dalga çözümlerinin sınıflandırılması. Çözümler elde edilirken, $t_0 = 10$ ve $\varepsilon^2 = 0.005$ olarak alınmıştır. Ayrıca, oluşan şok dalga formları şekillerde etiketlenmiştir.

$|v_l| < |v_r|$ ve $v_r v_l > 0$ şartları sağlandığında ise, "CDSW" ve "R" dalgalarının kombinasyonu oluşmaktadır. $v_r = 0.5$ ve $v_l = 0.3$ seçimiyle oluşan bu dalga formu $t = 15$ için Şekil 3.13'te verilmiştir.

$|v_l| < |v_r|$ ve $v_r v_l < 0$ şartları sağlandığında ise, ($v_l = -0.5$ ve $v_r = -1$) oluşan seyreltme dalgası $t = 15$ için elde edilmiş ve grafiği Şekil 3.13'te verilmiştir.



4. (2+1) ve (3+1) BOYUTLU DEFOCUSING MODİFİYE KADOMTSEV-PETVIASHVİLİ DENKLEMİNİN (mKP(d)) DİSPERSİF ŞOK DALGA ÇÖZÜMLERİ

4.1 Giriş

(2+1) boyutlu mKP(f) denkleminin DSW çözümleri Bölüm 2’de ele alınmıştır. (2+1) boyutlu mKP(f) denkleminde özel bir dönüşüm yardımıyla indirgenen cmKdV(f) denkleminin, Whitham modülasyon denklemlerinin asimptotik çözümü üzerinde durulmuş ve doğrudan sayısal çözüm ve asimptotik çözüm arasındaki uyum gösterilmiştir. Daha sonra, Bölüm 3’te (3+1) boyutlu mKP(f) denklemi için benzer analiz yapılarak, indirgeme sonucu türetilen smKdV(f) denkleminin Whitham modülasyon denklemleri asimptotik olarak elde edilmiştir. Bölümün devamında, smKdV(f) denkleminin doğrudan çözümleri ile asimptotik çözümleri karşılaştırılarak yöntemin uygunluğu tartışılmıştır.

Bu bölümde, (2+1) ve (3+1) boyutlu defocusing modifiye Kadomtsev-Petviashvili (mKP(d)) denklemleri için DSW çözümleri üzerinde durulacaktır.

4.2 (2+1) ve (3+1) Boyutlu mKP(d) Denklemlerinin İndirgenmesi ve Whitham Modülasyon Denklemlerinin Türetilmesi

4.2.1 (2+1) boyutlu mKP(d) denkleminin (1+1) boyutlu cmKdV(d) denkleminin indirgenmesi ve cmKdV(d)-Whitham sisteminin türetilmesi

Bu kısımda, tez çalışmasının birinci ve ikinci probleminde kullanılan yöntem yardımıyla (2+1) boyutlu nonlinear kısmi türevli bir denklem olan defocusing modifiye Kadomtsev-Petviashvili (mKP(d)) denkleminin

$$(v_t - 6v^2v_x + \varepsilon^2v_{xxx})_x + \sigma v_{yy} = 0 \quad (4.1)$$

dispersif şok dalga çözümleri analiz edilecektir. Burada, $v = v(x, y, t)$, ε , zayıf dispersiyon bağıntısını belirleyen küçük bir sabit ($0 < \varepsilon \ll 1$) ve $\sigma = \mp 1$ ’dir. (4.1)

denkleminin aşağıda belirtilen basamak tipi başlangıç koşulu için çözümleri inşa edilecektir ($t = 0$):

$$v(\eta, 0) = \begin{cases} v_l, & \eta < 0; \\ v_r, & \eta \geq 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Burada, $\eta = x + \frac{1}{2}\psi(y, t)$ dir. (4.2)'de yer alan v_l ve v_r reel sabitleri göstermektedir ve DSW dalga çözümlerinin elde edilebilmesi için $v_r > v_l$ eşitsizliğinin sağlanması gerekir. Bu eşitsizliğin sağlanmadığı diğer durumlar için defocusing mKdV-Whitham modülasyon sistemi için farklı tipte şok dalga çözümleri elde edilebilir [24]. Farklı tipteki şok çözümlerine ait ayrıntılara Bölüm 4.3.4'te yer verilmiştir.

Diğer taraftan, (4.1) denkleminin çözümleri (4.2) başlangıç koşuluyla birlikte ele alınarak ve (4.1) denkleminin bir indirgemesi yapılarak elde edilecektir. Bu indirgemenin yapılabilmesi için γ bir reel sabit olmak üzere $\psi(y, 0) = \gamma y^2$ özel seçimiyle birlikte aşağıdaki çözüm formunu sağladığı kabul edilir:

$$v = f\left(x + \frac{1}{2}\psi(y, t), t\right). \quad (4.3)$$

Ayrıca, (4.3) ile verilen v fonksiyonunun aşağıdaki azalmayan tipte sınır koşullarını sağladığı kabul edilir:

$$\eta \rightarrow -\infty \text{ iken } v \rightarrow v_l S(t) \text{ ve } \eta \rightarrow \infty \text{ iken } v \rightarrow v_r S(t). \quad (4.4)$$

Yukarıda verilen sınır koşulunda yer alan $S(t)$ çalışmanın devamında belirlenecektir. (4.3) çözüm formunun (4.1) denkleminde yerine yazılmasıyla

$$\left(\frac{1}{2}\psi_t f_\eta + f_t - 6f^2 f_\eta + \varepsilon^2 f_\eta \eta\right)_\eta + \sigma \left(\frac{1}{4}\psi_y^2 f_\eta + \frac{1}{2}\psi_{yy} f_\eta + \psi_y f_{\eta y} + f_{yy}\right) = 0 \quad (4.5)$$

elde edilir. Daha sonra, (4.4) sınır koşulu uygulanır ve ψ_{yy} 'nin y 'den bağımsız olduğu varsayıldığında, f_η 'nin katsayısı yalnızca t 'ye bağlı olur ve sonuç olarak ψ ve f aşağıdaki denklem sistemini sağlar:

$$\psi_t + \frac{\sigma}{2}(\psi_y)^2 = 0, \quad (4.6)$$

$$f_t - 6f^2 f_\eta + \varepsilon^2 f_\eta \eta + \frac{\sigma}{2}\psi_{yy} f = 0. \quad (4.7)$$

(4.6) denklemi focusing denklemlerde olduğu gibi "dalğaya şekli veren denklem" olarak adlandırılır ve bu denklem değişken dönüşümü ile Hopf denklemine

indirgenebilir. Bu denklemin $\psi(y,0) = \gamma y^2$ başlangıç koşulu altındaki çözümü

$$\psi(y,t) = \frac{\gamma y^2}{1 + 2\gamma\sigma t} \quad (4.8)$$

olarak elde edilir. Ayrıca, ψ_{yy} 'nin tüm t değerleri için y 'den bağımsız olma kabulünü sağladığı kolaylıkla görülür. Ayrıca, kritik bir t değerinde çözümlerde patlama olmasını önlemek adına, $\gamma\sigma > 0$ ve $t > 0$ olduğu durumlar için analiz yapılacaktır. Bu kabuller altında, (4.8) denkleminin (4.7) denkleminde kullanılmasıyla cmKdV(d) denklemi olarak adlandıracağımız defocusing silindirik mKdV denklemi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$f_t - 6f^2 f_\eta + \varepsilon^2 f_{\eta\eta\eta} + \frac{1}{2t + t_0} f = 0, \quad t_0 = \frac{1}{\sigma\gamma}. \quad (4.9)$$

Bu bölümde $\sigma = 1$ durumu için analiz yapılacaktır. Öte yandan, (4.4) sınır koşulunda yer alan $S(t)$ belirlemek için, (4.9) denkleminde yer alan η 'ya bağlı türevler ihmal edilir ve geriye kalan adi diferansiyel denklem $S(0) = 1$ başlangıç koşulunu sağlayacak biçimde çözümlürse, $S(t)$ fonksiyonu

$$S(t) = \sqrt{\frac{t_0}{2t + t_0}} \quad (4.10)$$

olarak bulunur.

İncelemenin devamında, (1+1) boyutlu (4.9) ile verilen cmKdV(d) denkleminin Whitham modülasyon denklemlerini türetmek için bir asimptotik analiz olan çoklu ölçekler metodu [11] kullanılacaktır. Bu yöntemi uygulayabilmek için θ hızlı değişkeni temsil etmek üzere

$$\theta_\eta = \frac{k(\eta,t)}{\varepsilon}, \quad \theta_t = -\frac{\omega(\eta,t)}{\varepsilon} = -\frac{kV}{\varepsilon} \quad (4.11)$$

tanımlamaları yapılır. Daha önceki bölümlerde incelenen problemlerde olduğu gibi $f = f(\theta, \eta, t)$ formunda olduğu kabul edilmektedir. (4.11) tanımında verilen, k ile dalga sayısı, ω ile açısal hız ve V ile de faz hızı temsil edilmektedir. Bu değişkenlerin, yavaş değişen η ve t 'nin fonksiyonları olduğu kabul edilir. (4.11) ile verilen tanımda $(\theta_\eta)_t = (\theta_t)_\eta$ uyumluluk koşulunun dikkate alınmasıyla

$$k_t + (kV)_\eta = 0 \quad (4.12)$$

olur ve (4.12) denklemi “dalgaların korunumu” olarak adlandırılır. (4.12) denklemi, cmKdV(d)-Whitham denklem sistemini türetebilmek için kullanılacak ilk modülasyon denklemidir.

Diğer modülasyon denklemlerini türetmek için, çoklu ölçekler metodunun olağan uygulaması olarak hızlı ve yavaş değişkenlere göre türevler

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\omega}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (4.13)$$

olarak yazılır. Daha sonra, bu bağıntılar (4.9) denkleminde kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon} \left(-\omega \frac{\partial f}{\partial \theta} + k^3 \frac{\partial^3 f}{\partial \theta^3} - 6f^2 k \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \\ & + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + 3k^2 \frac{\partial^3 f}{\partial \eta \partial \theta^2} + 3kk_\eta \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} - 6f^2 \frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{f}{2t+t_0} \right) \\ & + \varepsilon \left(3k \frac{\partial^3 f}{\partial \theta \partial \theta^2} + 3kk_\eta \frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial \eta} + k_{\eta\eta} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} = 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

denklemi elde edilir. Ardından, f , ε 'nin kuvvetlerine göre seriye açılır:

$$f(\theta, \eta, t) = f_0(\theta, \eta, t) + \varepsilon f_1(\theta, \eta, t) + \varepsilon^2 f_2(\theta, \eta, t) + \dots \quad (4.15)$$

(4.14) denkleminde, (4.15) seri açılımı yerine yazılıp terimler ε 'nin aynı kuvvetlerinin katsayıları eşitlenerek gruplanırsa, ε mertebesinde problemler hiyerarjisi elde edilir. Bu çalışmadaki analizde yeterli olacağı için, ilk iki pertürbasyon problemi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right): \quad -\omega \frac{\partial f_0}{\partial \theta} - 6kf_0^2 \frac{\partial f_0}{\partial \theta} + k^3 \frac{\partial^3 f_0}{\partial \theta^3} = 0, \quad (4.16)$$

$$\mathcal{O}(1): \quad \mathcal{L}_h f_1 \equiv -\omega \frac{\partial f_1}{\partial \theta} - 6k \frac{\partial (f_0^2 f_1)}{\partial \theta} + k^3 \frac{\partial^3 f_1}{\partial \theta^3} = \mathcal{M}. \quad (4.17)$$

Burada,

$$\mathcal{M} = -\left(\frac{\partial f_0}{\partial t} - 6f_0^2 \frac{\partial f_0}{\partial \eta} + 3k^2 \frac{\partial^3 f_0}{\partial \eta \partial \theta^2} + 3kk_\eta \frac{\partial^2 f_0}{\partial \theta^2} + \frac{f_0}{2t+t_0} \right) \quad (4.18)$$

dir.

4.2.1.1 ε^{-1} mertebeli problemin çözümü

Bölüm 2’de incelenen focusing denklemlerde olduğu gibi, ilk olarak ε^{-1} mertebeli problemin çözümünü bulalım. Dikkat edilirse, (4.16) ile mKdV(d) denkleminin ilerleyen dalga çözümü için indirgenen denklemin aynı yapıda olduğu görülür. Bu denklemin çözümünü bulabilmek için, (4.16) denklemini bir defa θ değişkenine göre integre edilir ve $\frac{2\partial f_0}{\partial \theta}$ ile çarpılırsa

$$k^2 \left(\frac{\partial f_0}{\partial \theta} \right)^2 = f_0^4 + V f_0^2 + 2D_3 f_0 + D_4 \quad (4.19)$$

veya

$$k^2 \left(\frac{\partial f_0}{\partial \theta} \right)^2 = (f_0 - \alpha_1)(f_0 - \alpha_2)(f_0 - \alpha_3)(f_0 - \alpha_4) \quad (4.20)$$

halini alır. (4.19) denkleminde yer alan D_3 ve D_4 , denklemini integre ederken ortaya çıkan integrasyon sabitlerini göstermektedir. Ayrıca, (4.20) ile verilen denklemin sağ yanında yer alan α_1 , α_2 , α_3 ve α_4 dördüncü dereceden denklemin reel kökleridir ve $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$ bağıntısı sağlanmaktadır. Ardından, (4.20) denklemini θ değişkenine göre bir kez integre edilirse,

$$\int \frac{df_0}{\sqrt{(f_0 - \alpha_1)(f_0 - \alpha_2)(f_0 - \alpha_3)(f_0 - \alpha_4)}} = \frac{1}{k}(\theta - \theta_0), \quad \theta_0 = \text{sabit} \quad (4.21)$$

olur. Diğer taraftan, kararlı yapıdaki ilerleyen dalga çözümünü elde edebilmek için $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq f_0 \geq \alpha_3 \geq \alpha_4$ eşitsizliği sağlanmalıdır [50]. Bu parametreler arasında aşağıdaki bağıntılar geçerlidir:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 &= 0, \\ V &= \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_1 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \alpha_4, \\ 2D_3 &= -\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 - (\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_1) \alpha_4, \\ D_4 &= \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4. \end{aligned} \quad (4.22)$$

(4.21) integrali, yardımcı kaynak [50] kullanılarak hesaplanırsa, (4.16) denkleminin çözümü

$$f_0(\theta, \eta, t) = \alpha_1 - \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}{(\alpha_1 - \alpha_3) - (\alpha_2 - \alpha_3) \text{sn}^2[U_2(\theta - \theta_0), m]} \quad (4.23)$$

olarak bulunur. 4.23'te yer alan U_2 , m ve k 'nın açık ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$U_2 = \frac{\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3)}}{2k}, \quad m = \frac{(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_4)}{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}, \quad (4.24)$$

$$k^2 = \frac{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}{16K(m)^2}.$$

Burada, $\text{sn}(z, m)$ Jacobi eliptik sinüs fonksiyonudur. $K = K(m)$ ile birinci tip tam eliptik integral, k ile dalga sayısı ve m ile modül temsil edilmektedir. Hızlı değişken olan θ , (4.11)'in dikkate alınmasıyla

$$\theta(\eta, t) = \int_{-L}^{\eta} \frac{k(x', t)}{\varepsilon} dx' - \int_0^t \frac{k(\eta, t')V(\eta, t')}{\varepsilon} dt'. \quad (4.25)$$

olarak bulunur.

Şimdi de, tez çalışmasında incelen diğer problemlerde olduğu gibi Whitham sistemini daha sade hale getirmek için aşağıdaki Riemann tipi değişkenler (r_1, r_2, r_3) tanımlanır:

$$\alpha_1 = r_2 + r_3 - r_1, \quad \alpha_2 = r_3 + r_1 - r_2, \quad \alpha_3 = r_1 + r_2 - r_3. \quad (4.26)$$

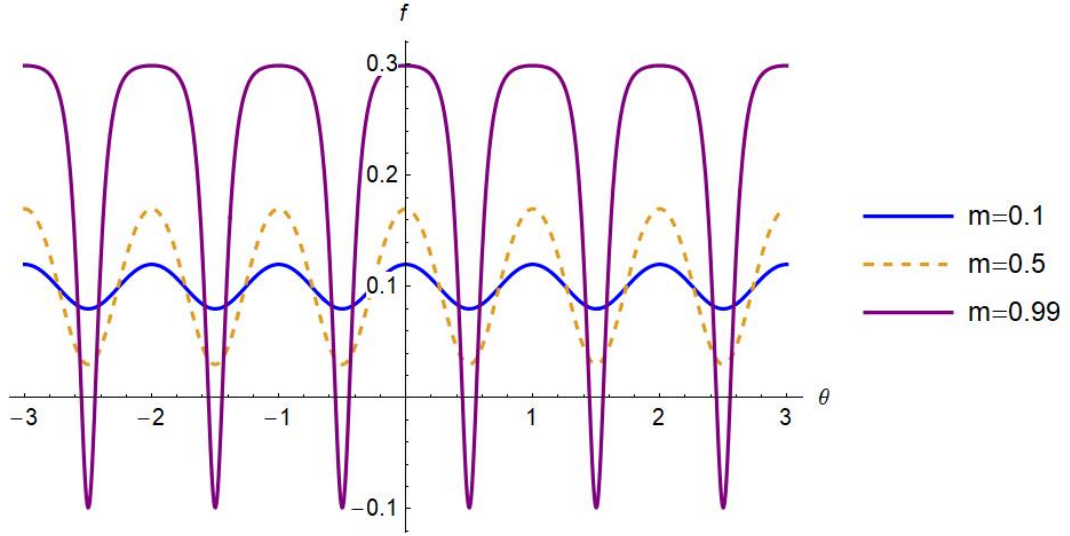
Bu Riemann tipi değişkenler (4.23) ile verilen ilerleyen dalga çözümünde kullanılır ve gerekli ara işlemler yapılırsa,

$$f_0(\theta, \eta, t) = (r_2 + r_3 - r_1) - \frac{2(r_2 - r_1)}{1 - U_3 \text{sn}^2[2(\theta - \theta_0)K, m]}, \quad U_3 = \frac{r_3 - r_2}{r_3 - r_1} \quad (4.27)$$

olarak elde edilir. Burada, m , k ve V için aşağıdaki bağıntılar geçerlidir ([50], denklem 255):

$$m = \frac{r_3^2 - r_2^2}{r_3^2 - r_1^2}, \quad k^2 = \frac{r_3^2 - r_1^2}{4K^2}, \quad V = -2(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2). \quad (4.28)$$

Daha önce belirtildiği gibi, $\text{sn}^2(z, m)$ eliptik fonksiyonu $2K(m)$ periyotlu olduğundan f_0 fonksiyonunun periyodu 1 olur. Şekil 4.1'den görüleceği üzere, $m \rightarrow 1$ iken $\text{sn}(z, m) \rightarrow \text{sech}(z)$ olduğundan soliter dalga çözümü; $m \rightarrow 0$ iken $\text{sn}(z, m) \rightarrow \sin(z)$ olduğundan harmonik dalga çözümü, oluşur. Böylece, ε^{-1} mertebeli problemin çözümü tamamlanmış olur.



Şekil 4.1 : (4.27) ile verilen f_0 in farklı modül değerleri için grafikleri.

4.2.1.2 ε^0 mertebeli problemin çözümü

Bu kısımda, ε^0 mertebeli problemin çözümü için analiz yapılacaktır. f_0 'ın açık ifadesi dikkatlice incelendiğinde çözümde yer alan r_1, r_2 ve r_3 'ü tam olarak belirlemek için bir üst mertebeye probleme ihtiyaç vardır. Bu amaçla, f_0 bir üst mertebeye problem olan (4.17)'de yerine yerleştirildiğinde denklemin sağ yanında θ 'ya bağlı sekülerlik oluşmaktadır. Bu durumu ortadan kaldırmak için kendine eş (adjoint) problem tanımlanmalıdır. Bu amaçla, ρ , (4.17) denkleminin homojen kısmının kendine eş probleminin çözümü olmak üzere ($\mathcal{L}_h u = 0$),

$$\mathcal{L}_h^A \rho = 0, \quad (4.29)$$

$$\mathcal{L}_h^A = \omega \frac{\partial}{\partial \theta} - 6k f_0^2 \frac{\partial}{\partial \theta} - k^3 \frac{\partial^3}{\partial \theta^3}$$

denklemini sağlar. Sekülerliği önlemek için (4.17) denklemini yardımıyla elde edilen aşağıdaki bağıntı kullanılır:

$$\int_0^1 [\rho \mathcal{L}_h f_1 - f_1 \mathcal{L}_h^A \rho] d\theta = \int_0^1 \rho \mathcal{M} d\theta = 0. \quad (4.30)$$

(4.29) eş problemini, $\rho = 1$ ve $\rho = f_0$ fonksiyonları, çözüm olarak sağlamaktadırlar. Bu iki lineer bağımsız çözümün, sırasıyla (4.30)'da kullanılmasıyla,

$$\int_0^1 \mathcal{M} d\theta = 0, \quad \int_0^1 f_0 \mathcal{M} d\theta = 0 \quad (4.31)$$

sekülerlik koşulları elde edilir. Bu sekülerlik koşulları hesaplanırken, f_0 'ın periyodik olması ile birlikte aşağıdaki özellikler de göz önüne alınır:

$$\int_0^1 \frac{\partial^i f_0}{\partial \theta^i} d\theta = 0, \quad \int_0^1 f_0 \frac{\partial^j f_0}{\partial \theta^j} d\theta = 0 \quad i = 1, 2, \dots \text{ ve } j = 1, 3, \dots \quad (4.32)$$

ve

$$\int_0^1 f_0 \frac{\partial^2 f_0}{\partial \theta^2} d\theta = - \int_0^1 \left(\frac{\partial f_0}{\partial \theta} \right)^2 d\theta. \quad (4.33)$$

Böylece, (4.31) integralleri, cmKdV(d) denklemi için sırasıyla aşağıdaki sekülerlik koşullarını verir:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 f_0 d\theta + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(2 \int_0^1 f_0^3 d\theta \right) + \frac{1}{2t+t_0} \int_0^1 f_0 d\theta = 0 \quad (4.34)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 f_0^2 d\theta + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(3 \int_0^1 f_0^4 - 3k^2 \int_0^1 \left(\frac{\partial f_0}{\partial \theta} \right)^2 d\theta \right) + \frac{2}{2t+t_0} \int_0^1 f_0^2 d\theta = 0. \quad (4.35)$$

(4.34) ve (4.35)'te yer alan integraller, (4.27) ile verilen f_0 ve eliptik fonksiyonların özelliklerinden yararlanılarak hesaplanır [50].

(4.12) dalgaların korunumu yasası ve (4.34)-(4.35) sekülerlik koşulları ile birlikte cmKdV(d) denklemi için Whitham modülasyon sistemini oluştururlar. Dikkat edilirse, (4.17)'de üç bilinmeyen (r_1, r_2, r_3) vardır ve buradan üç tane korunum yasasına ihtiyaç olduğu açıktır. Şimdi de (4.12), (4.34) ve (4.35) denklemlerindeki terimler sırasıyla hesaplanarak, modülasyon denklemleri aşağıdaki gibi türetilir:

$$\frac{\partial r_i}{\partial t} + v_i(r_1, r_2, r_3) \frac{\partial r_i}{\partial \eta} + \frac{h_i}{2t+t_0} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.36)$$

Bu denklem sistemi kuasilineer denklem sistemidir ve

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} v_1 & 0 & 0 \\ 0 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & v_3 \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

şeklinde köşegen elemanları v_i , ($i = 1, 2, 3$), olan bir köşegen matristir. Bu matrisin elemanları mKdV(d) denkleminin Whitham karakteristik hızlarını verir [23] ve açık

ifadeleri aşağıdaki gibi bulunurlar:

$$\begin{aligned}
v_1 &= -2(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) + \frac{K(r_2^2 - r_1^2)}{E}, \\
v_2 &= -2(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) - \frac{4K(r_3^2 - r_2^2)(r_2^2 - r_1^2)}{E(r_3^2 - r_1^2) - K(r_2^2 - r_1^2)}, \\
v_3 &= -2(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) - \frac{4K(r_3^2 - r_2^2)}{K - E}.
\end{aligned} \tag{4.38}$$

$h_i (i = 1, 2, 3)$ 'ler ise,

$$\Psi_1 = r_1 + r_2 + r_3 - 2(r_2 + r_3) \frac{\Pi}{K}, \quad \Psi_2 = r_1^2 + r_2^2 - r_3^2 - 2(r_3^2 - r_1^2) \frac{E}{K}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
h_1 &= \frac{(Kr_1\Psi_2 - r_2r_3\Psi_1)}{E(r_1^2 - r_3^2)}, \\
h_2 &= -\frac{K(r_2\Psi_2 - r_1r_3\Psi_1)}{E(r_3^2 - r_1^2) - KE(r_2^2 - r_1^2)}, \\
h_3 &= \frac{E(r_3\Psi_2 - r_1r_2\Psi_1)}{(K - E)(r_3^2 - r_1^2)}
\end{aligned} \tag{4.39}$$

şeklinde dirler. $K = K(m), E = E(m)$ ve $\Pi = \Pi(n, m)$ sırasıyla birinci, ikinci ve üçüncü tip tam eliptik integralleri göstermektedir. Ek olarak, $n = (r_3 - r_2)/((r_3 - r_1))$ 'dir.

Böylece, $cmKdV(d)$ denklemi için Whitham modülasyon denklemleri Riemann değişkenleri cinsinden köşegen hale en yakın forma indirgenmiştir. Ek olarak, (4.36) denkleminde $t_0 \rightarrow \infty$ iken $cmKdV(d)$ için elde edilen Whitham sistemi, $mKdV(d)$ için Kamchatnov tarafından bulunan Whitham sistemine indirgeneceği kolaylıkla görülür [23].

4.2.2 (3+1) boyutlu defocusing mKP denkleminin (1+1) boyutlu smKdV(d) denklemine indirgenmesi ve smKdV(d)-Whitham sisteminin türetilmesi

Bu bölümde, (3+1) boyutlu defocusing modifiye Kadomtsev-Petviashvili (mKP(d)) denkleminde görülen DSW yayılımı ele alınacaktır:

$$(v_t - 6v^2v_x + \varepsilon^2v_{xxx})_x + \sigma(v_{yy} + v_{zz}) = 0, \quad \sigma = \mp 1. \tag{4.40}$$

Burada, $v = v(x, y, z, t)$ şeklinde bir fonksiyon ve ε , $0 < \varepsilon \ll 1$ olmak üzere zayıf dispersiyonu gösteren parametredir. (4.40) denkleminin iki boyutlu hali

antiferromanyetik malzemelerde ses dalgalarının yayılımı ile ilgili olarak türetilmiştir [40].

Bölüm 4.2.1'te yapılan analize benzer bir yol izleneceğinden, bu bölümde Bölüm 4.2.1'e atıf yapılarak analize devam edilecektir. İlk olarak, (4.40) denklemini (1+1) boyutlu küresel denkleme indirgeyebilmek için, yeni $\eta = x + \frac{1}{2}\psi(y, z, t)$ olmak üzere değişkenini tanımlayarak başlayalım. Bu yeni değişkende görülen ψ 'nin açık formu bölümün ilerleyen kısmında belirlenecektir. Ek olarak, (4.40) denkleminin aşağıdaki çözüm formunu sağladığı kabul edilmektedir:

$$v = f\left(x + \frac{1}{2}\psi(y, z, t), y, t\right). \quad (4.41)$$

Burada, özel olarak

$$\psi(y, z, 0) = \alpha(y^2 + z^2) \quad (4.42)$$

paraboloid tipi başlangıç cephesi için analiz yapılacaktır.

(2+1) boyutlu mKP(d) denkleminde olduğu gibi, (4.40) denklemindeki DSW çözümleri için (4.2) basamak tipi başlangıç koşulu ($t = 0$) ve (4.4) azalmayan tipte sınır koşulu ele alınacaktır, fakat burada $\eta = x + \frac{1}{2}\psi(y, z, t)$ olduğuna dikkat edilmelidir. Sınır koşulunda yer alan $S(t)$ 'nin açık formuna bölümün sonunda yer verilecektir. Bu azalmayan tipteki sınır koşulu ve çözüm formu (4.41)'in (4.40)'da birlikte kullanılması ile ψ ve f için aşağıdaki denklem sistemi elde edilir:

$$\psi_t + \frac{\sigma}{2} \left((\psi_y)^2 + (\psi_z)^2 \right) = 0, \quad (4.43)$$

$$f_t - 6f^2 f_\eta + \varepsilon^2 f_{\eta\eta\eta} + \frac{\sigma}{2} (\psi_{yy} + \psi_{zz}) f = 0. \quad (4.44)$$

(4.43) denklemi, bilindiği gibi dalga cephesinin zamanla evrimini karakterize eder ve bu denklemin (4.42) başlangıç koşulu altındaki çözümü karakteristikler metodu kullanılarak

$$\psi(y, z, t) = \frac{\alpha(y^2 + z^2)}{1 + 2\alpha\sigma t} \quad (4.45)$$

elde edilir. Daha sonra, $\psi(y, z, t)$ çözümü için (4.44) denkleminde yerine yerleştirilmesiyle, (1+1) boyutlu defocusing küresel mKdV (smKdV(d)) denklemi elde edilir:

$$f_t - 6f^2 f_\eta + \varepsilon^2 f_{\eta\eta\eta} + \frac{1}{t + t_0} f = 0, \quad t_0 = \frac{1}{2\sigma\alpha}. \quad (4.46)$$

Bu bölümde, $\sigma = 1$ olma durumu ele alınacaktır. (4.46) denkleminin sonsuzdaki sınır koşulunu bulmak için, Bölüm 4.2.1 ile benzer yol izlenerek (4.4) sınır koşulunda görülen $S(t)$ aşağıdaki gibi bulunur:

$$S(t) = \frac{t_0}{t + t_0}. \quad (4.47)$$

İndirgeme işleminin tamamlanmasının ardından (1+1) boyutlu smKdV(d) denklemine ait Whitham sistemi elde edilecektir. Bu amaçla, (4.11) denklemi ile analize başlayalım ve (4.13) denklemi ile verilen hızlı ve yavaş değişkenler arasındaki ilişki (4.46) denklemine uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon} \left(-\omega \frac{\partial f}{\partial \theta} + k^3 \frac{\partial^3 f}{\partial \theta^3} - 6f^2 k \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \\ & + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + 3k^2 \frac{\partial^3 f}{\partial \eta \partial \theta^2} + 3kk_\eta \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} - 6f^2 \frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{f}{t + t_0} \right) \\ & + \varepsilon \left(3k \frac{\partial^3 f}{\partial \theta \partial \eta^2} + 3kk_\eta \frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial \eta} + k_{\eta\eta} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} = 0 \end{aligned} \quad (4.48)$$

olur. Daha sonra, f fonksiyonu $f(\theta, \eta, t) = f_0(\theta, \eta, t) + \varepsilon f_1(\theta, \eta, t) + \dots$ olarak ε 'nin kuvvetlerine göre seriye açılır ve bu açılımın (4.48) denkleminde kullanılmasıyla ortaya çıkan denklem ε 'nin kuvvetleri cinsinden gruplanırsa bu analiz için yeterli olan ilk iki merteye problem aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right): \quad -\omega \frac{\partial f_0}{\partial \theta} - 6kf_0^2 \frac{\partial f_0}{\partial \theta} + k^3 \frac{\partial^3 f_0}{\partial \theta^3} = 0, \quad (4.49)$$

$$\mathcal{O}(1): \quad -\omega \frac{\partial f_1}{\partial \theta} - 6k \frac{\partial (f_0^2 f_1)}{\partial \theta} + k^3 \frac{\partial^3 f_1}{\partial \theta^3} = \mathcal{M}. \quad (4.50)$$

Burada,

$$\mathcal{M} = -\left(\frac{\partial f_0}{\partial t} - 6f_0^2 \frac{\partial f_0}{\partial \eta} + 3k^2 \frac{\partial^3 f_0}{\partial \eta \partial \theta^2} + 3kk_\eta \frac{\partial^2 f_0}{\partial \theta^2} + \frac{f_0}{t + t_0} \right) \quad (4.51)$$

dir. Bu problemlerin çözümü için, ilk olarak $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$ merteye problemin çözümü inşa edilecektir. Dikkatlice edilirse, (4.49) denklemi, cmKdV(d) denkleminin Whitham modülasyon denklemlerini türetirken ε^{-1} mertebeli problemde ortaya çıkmaktadır. Bölüm 4.2.1'de olduğu gibi smKdV(d)-Whitham modülasyon denklemlerini türetirken (4.26) ile verilen Riemann tipi değişkenler kullanılacaktır. (4.49) denkleminin ilerleyen dalga çözümünün, bir sonraki problemin çözümünde kullanılacağından

$$f_0(\theta, \eta, t) = (r_2 + r_3 - r_1) - \frac{2(r_2 - r_1)}{1 - U_3 \text{sn}^2[2(\theta - \theta_0)K, m]}, \quad U_3 = \frac{r_3 - r_2}{r_3 - r_1}$$

şeklinde olduğunu hatırlayalım. Burada, $K = K(m)$ birinci tip tam eliptik integrali göstermektedir. Ayrıca, Bölüm 4.2.1’den bilindiği gibi modül, dalga sayısı ve faz hızı aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır;

$$m = \frac{r_3^2 - r_2^2}{r_3^2 - r_1^2}, \quad k = \frac{\sqrt{r_3^2 - r_1^2}}{2K}, \quad V = -2(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2).$$

Dikkat edilirse, smKdV(d) denkleminin ilk modülasyon denklemi, cmKdV(d) denkleminde olduğu gibi (4.12) dalgaların korunumu yasasından gelmektedir. Diğer modülasyon denklemlerini türetmek için sekülerlik koşulları kullanılacaktır. Bu amaçla, (4.27) ile verilen f_0 , (4.50) ile verilen $\mathcal{O}(1)$ mertebeye kullanılırsa, (4.50) denkleminin sağ yanında θ ’ya bağlı sekülerlik oluşmaktadır. Bu sekülerliği ortadan kaldırmak için kendine eş problem tanımlanır ve Bölüm 4.2.1’de olduğu gibi aşağıdaki sekülerlik koşulları elde edilir:

$$\int_0^1 \mathcal{M} d\theta = 0, \quad \int_0^1 f_0 \mathcal{M} d\theta = 0. \quad (4.52)$$

Daha sonra, (4.52) denkleminde \mathcal{M} ’nin kullanılmasıyla bu sekülerlik koşulları

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 f_0 d\theta - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(2 \int_0^1 f_0^3 d\theta \right) + \frac{1}{t+t_0} \int_0^1 f_0 d\theta = 0 \quad (4.53)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 f_0^2 d\theta - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(3 \int_0^1 f_0^4 + 3k^2 \int_0^1 \left(\frac{\partial f_0}{\partial \theta} \right)^2 d\theta \right) + \frac{2}{t+t_0} \int_0^1 f_0^2 d\theta = 0. \quad (4.54)$$

şeklinde elde edilirler. Ardından, f_0 ve yardımcı kaynakta verilen eliptik fonksiyonların özelliklerinin [50] (4.53)-(4.54)’de kullanılmasıyla sekülerlik koşullarının açık yapıları elde edilir. Bu sekülerlik koşullarına (4.12) dalgaların korunumu yasasının eklenmesiyle, smKdV(d) denklemi için Whitham modülasyon sistemi elde edilir:

$$\frac{\partial r_i}{\partial t} + v_i(r_1, r_2, r_3) \frac{\partial r_i}{\partial \eta} + \frac{1}{t+t_0} h_i = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.55)$$

Burada, v_i ($i = 1; 2; 3$), mKdV(d) denkleminin karakteristik hızlarını vermektedir [23];

$$\begin{aligned} v_1 &= -2(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) + \frac{K(r_2^2 - r_1^2)}{E}, \\ v_2 &= -2(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) - \frac{4K(r_3^2 - r_2^2)(r_2^2 - r_1^2)}{E(r_3^2 - r_1^2) - K(r_2^2 - r_1^2)}, \\ v_3 &= -2(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) - \frac{4K(r_3^2 - r_2^2)}{K - E} \end{aligned} \quad (4.56)$$

ve h_i ($i = 1; 2; 3$) küresel terimlerinin açık ifadeleri

$$h_1 = \frac{K(r_1 N_3 - r_2 r_3 N_4)}{E(r_1^2 - r_3^2)}, \quad h_2 = -\frac{K(r_2 N_3 - r_1 r_3 N_4)}{E(r_3^2 - r_1^2) - K(r_2^2 - r_1^2)}, \quad h_3 = \frac{K(r_3 N_3 - r_1 r_2 N_4)}{(K - E)(r_3^2 - r_1^2)}. \quad (4.57)$$

olarak elde edilir. Burada görülen, $K(m)$ ile birinci tip, $E(m)$ ile ikinci tip ve $\Pi = \Pi(n, m)$ ile üçüncü tip tam eliptik integral temsil edilmektedir. Ayrıca,

$$n = \frac{r_3 - r_2}{r_3 - r_1}, \quad N_3 = \frac{K(r_2^2 + r_3^2 - r_1^2) - 2(r_3^2 - r_1^2)E}{K}, \quad (4.58)$$

$$N_4 = \frac{K(r_2 + r_3 - r_1) - 2(r_2 - r_1)\Pi}{K}$$

şeklinindedir.

Dikkat edilecek olursa, (4.55) denkleminde zamana bağlı $h_i(t)$ küresel terimi özdeş olarak sıfır alınırsa, smKdV(d)-Whitham sistemi mKdV(d)-Whitham sistemine indirgenir [23].

4.3 Sayısal Sonuçlar ve Tartışma

Çalışmanın bu bölümünde, mKdV(d), cmKdV(d) ve smKdV(d) denklemleri için sayısal çözümlerin verilmesi amaçlanmaktadır. Daha önceki problemlerde olduğu gibi silindirik ve küresel terimin etkisini gözlemlemek amacıyla ilk olarak klasik denklemin yani mKdV(d) denkleminin doğrudan ve asimptotik çözümleri bulunacaktır. Her üç denklem için de focusing denklemlerde olduğu gibi doğrudan ve asimptotik çözümler bulunacak ve bu çözümlerin karşılaştırması yapılarak asimptotik çözüm için uygulanan yöntemin uygunluğu gösterilecektir.

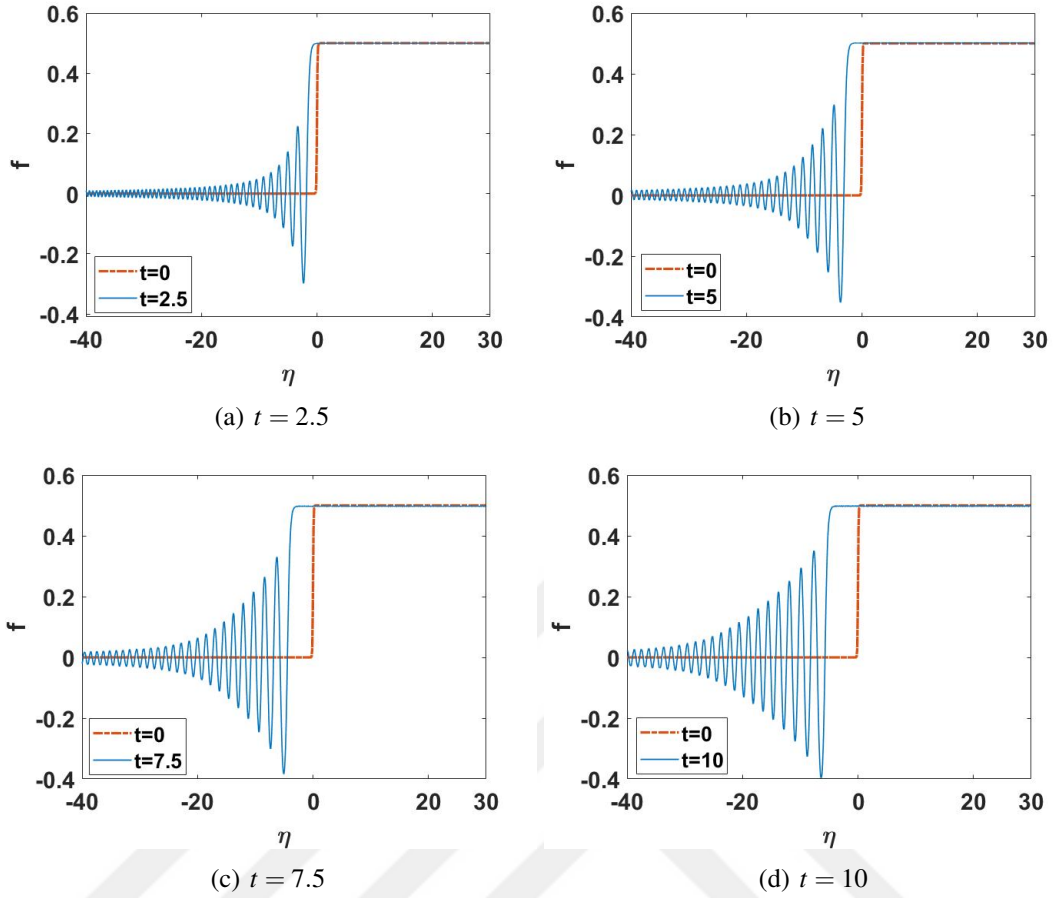
4.3.1 mKdV(d), cmKdV(d) ve smKdV(d) denklemlerinin doğrudan çözümü

Bu bölümde, klasik mKdV(d), cmKdV(d) ve smKdV(d) denklemlerinin (4.2) başlangıç koşulu altında $v_l = 0$ ve $v_r = 0.5$ değerleri ve ilgili sınır koşullarıyla birlikte sayısal çözümleri için, daha önceki problemlerde (mKdV(f), cmKdV(f) ve smKdV(f)) olduğu gibi ETDRK4 (Exponential Time Differencing Fourth Order Runge-Kutta) [51,52] metodunun modifiye versiyonu kullanılacaktır. Yöntemin uygulanmasındaki ayrıntılar için Bölüm 2 ve Bölüm 3'e bakılabilir. Kullanılan kod içerisinde, Fourier modu için $N = 2^{15}$ nokta, maddesel koordinat için $[-200, 200]$ tanım aralığı seçilirken,

zaman ayırıklaştırma aralığı olarak da 10^{-3} değeri seçilmiştir. Ek olarak, $t_0 = 10$, $\varepsilon^2 = 5 \cdot 10^{-2}$ ve $\tilde{K} = 10$ parametreleri alınarak çözümlerin grafikleri elde edilmiştir.

mKdV(d), cmKdV(d) ve smKdV(d) denklemleri için doğrudan çözümlere ait grafikler, farklı zaman değerleri için sırasıyla Şekil 4.2, Şekil 4.3 ve Şekil 4.4'de verilmiştir. Her üç denklem için de faz hızı olan V 'nin negatif olmasından dolayı DSW'sı sol tarafa doğru yayılmaktadır. Şekil 4.2'den görüleceği gibi klasik mKdV(d) denklemi için zaman artmasına rağmen ön kenarda (leading edge) oluşan küçük genlikli dalgaların genliği 0'da sabit iken arka kenarda (trailing edge) oluşan en büyük genliğe sahip dalga katarının genliği seviye farkının iki katı olan 1 değerine yaklaşmaktadır. Ayrıca, arka kenarda (trailing edge) "dark solitonlar" oluşmaktadır. Öte yandan, Şekil 4.3 incelendiğinde, silindirik terimin etkisiyle arka kenarın seviyesi zamanla azalmaktadır ve aynı zamanda arka kenarda oluşan en büyük genliğe sahip dalga katarının genliği de azalmaktadır. Şekil 4.4'de, cmKdV(d) denkleminde olduğu gibi smKdV(d) denklemi için de zamana bağlı terimin etkisiyle arka kenar seviyesinin azaldığı görülmektedir. Tüm bunlara ek olarak, zamana bağlı terimin etkisini daha rahat görebilmek için klasik mKdV(d), cmKdV(d) ve smKdV(d) denklemlerinin $t = 10$ 'da doğrudan çözümlerinin grafikleri Şekil 4.5'te verilmiştir. Dikkat edilirse, üç denklem arasında arka kenarda oluşan en büyük genlikli dalga katarları arasındaki en büyük genlik mKdV(d) denkleminde iken, en küçük genlik smKdV(d) denkleminde aittir. Ek olarak, Şekil 4.6'da klasik mKdV(d), cmKdV(d) ve smKdV(d) denklemlerinin $t = 0$ ile $t = 10$ arasındaki doğrudan sayısal çözümlerine ait uzay-zaman grafikleri çizdirilmiştir. cmKdV(d) ve smKdV(d) denklemlerinin klasik mKdV(f) denkleminde farklı olarak dalga katarlarının birbirinden uzaklaştığı görülmektedir.

Şimdi de, focusing mKdV denkleminin için yapılan analize benzer olarak hesaplarda zayıf dispersiyonu temsil eden ε 'un etkisini gözlemlemek için kullanılan sayısal çözücü içinde kullanılan diğer parametreler sabit tutarak; $\varepsilon^2 = 0.01$ ve $\varepsilon^2 = 0.001$ değerleri alınarak klasik mKdV(d) denkleminin doğrudan sayısal çözümleri Şekil 4.7'te verilmiştir. ε azaldıkça, salınımların dalga boyunun azaldığı görülmektedir. Diğer taraftan, cmKdV(d) denkleminde yer alan parabolik cepheyi belirleyen t_0 etkisi için farklı t_0 değerleri alınarak sonuçlar Şekil 4.8'de verilmiştir. t_0 büyüdükçe çözümlerin klasik mKdV(d) denkleminin çözümlerine yaklaştığı görülmektedir. Gerçekten de



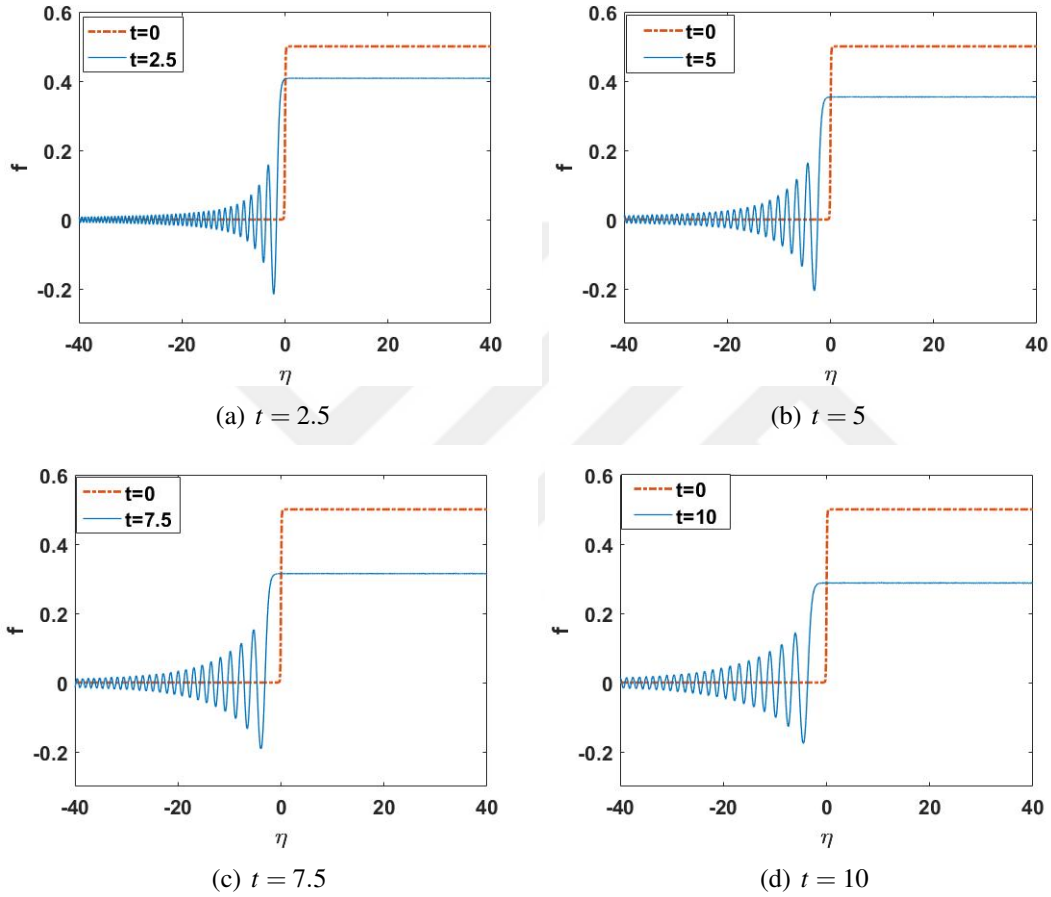
Şekil 4.2 : Kırmızı (kesikli) olarak verilen çizgi, $v_l = 0$ ve $v_r = 0.5$ için (4.2)'de adım başlangıç değerlerini göstermektedir. Mavi eğri ise, farklı zaman değerlerinde $\varepsilon^2 = 5.10^{-2}$ seçilmesi ile doğrudan çözümlerle elde edilen mKdV(d) denkleminin dispersif şok çözümünü temsil etmektedir.

t_0 'ın büyümesi ile silindirik terimin etkisi azalmakta ve (4.9) ile verilen cmKdV(d) denklemi klasik mKdV(d) denkleme indirgenmektedir. Benzer sonuçlar, Bölüm 2'de focusing cmKdV denkleminde de elde edilmiştir.

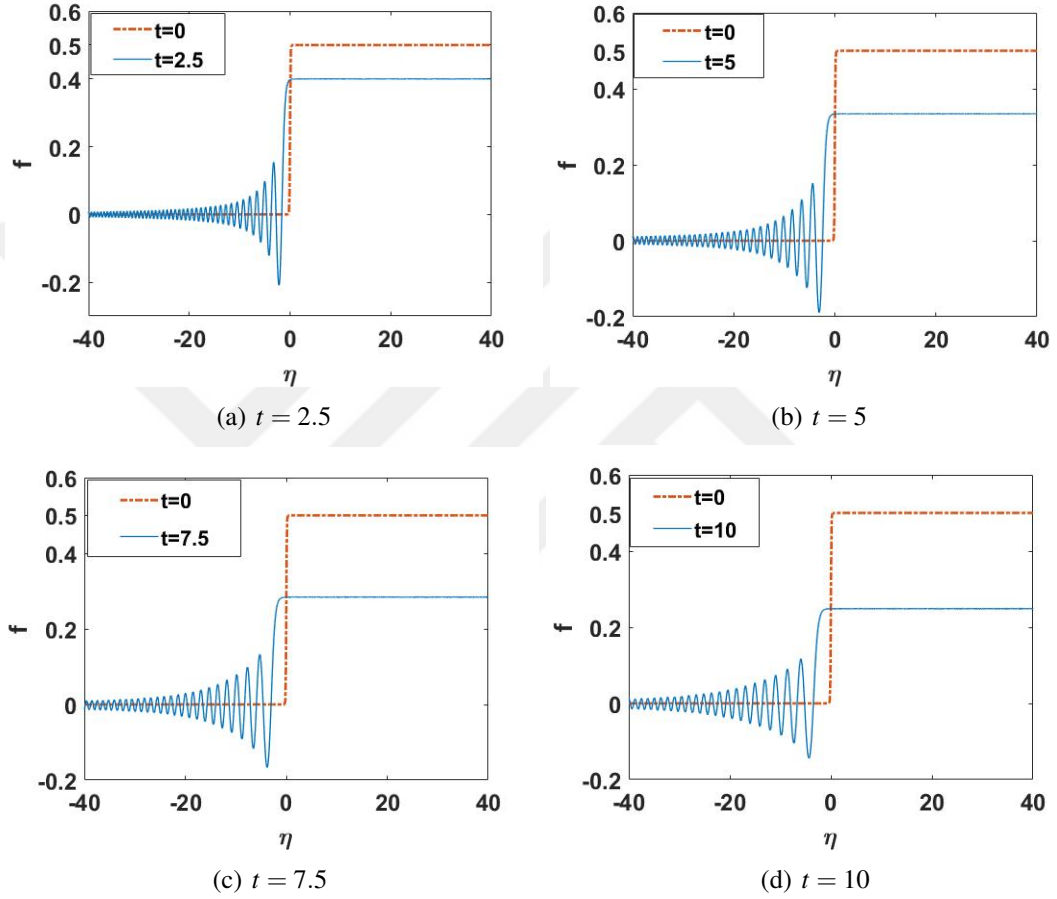
4.3.2 mKdV(d), cmKdV(d) ve smKdV(d) denklemlerinin doğrudan çözümleri ile asimptotik çözümlerinin karşılaştırılması

mKdV(d), cmKdV(d) ve smKdV(d) denklemlerinin Whitham sistemlerinin sayısal çözümlerini bulmak için ilk olarak mKdV(d), cmKdV(d) ve smKdV(d) denklemlerinin (4.2) basamak tipi başlangıç koşulu, Riemann tipi değişkenleri cinsinden belirlenmelidir:

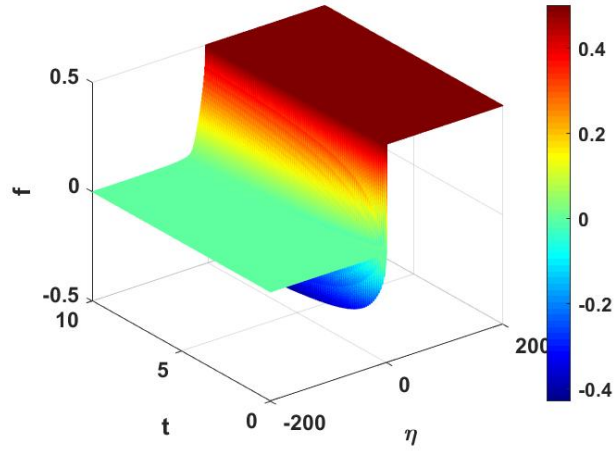
$$r_1(\eta, 0) = v_l, r_2(\eta, 0) = \begin{cases} v_l, & \eta < 0 \\ v_r, & \eta \geq 0 \end{cases}, r_3(\eta, 0) = v_r, \quad v_r > v_l. \quad (4.59)$$



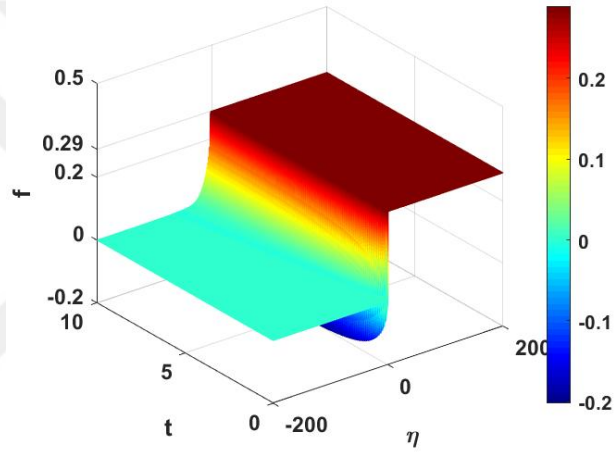
Şekil 4.3 : Kırmızı (kesikli) olarak verilen çizgi, $v_l=0$ ve $v_r=0.5$ için (4.2)'de adım başlangıç değerlerini göstermektedir. Mavi eğri ise, farklı zaman değerlerinde $\varepsilon^2 = 5 \cdot 10^{-2}$ seçilmesi ile doğrudan çözümlerle elde edilen cmKdV(d) denkleminin dispersif şok çözümünü temsil etmektedir.



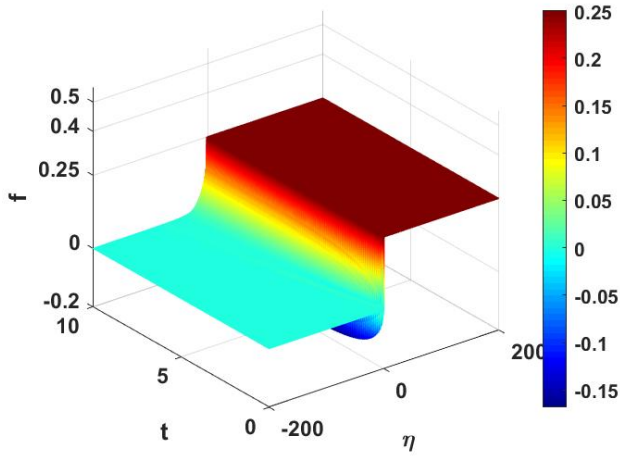
Şekil 4.4 : Kırmızı (kesikli) olarak verilen çizgi, $v_l = 0$ ve $v_r = 0.5$ için (4.2)'de adım başlangıç değerlerini göstermektedir. Mavi eğri ise, farklı zaman değerlerinde $\varepsilon^2 = 5 \cdot 10^{-2}$ seçilmesi ile doğrudan doğrudan çözümlerle elde edilen smKdV(d) denkleminin dispersif şok çözümünü temsil etmektedir.



(a) mKdV(d)

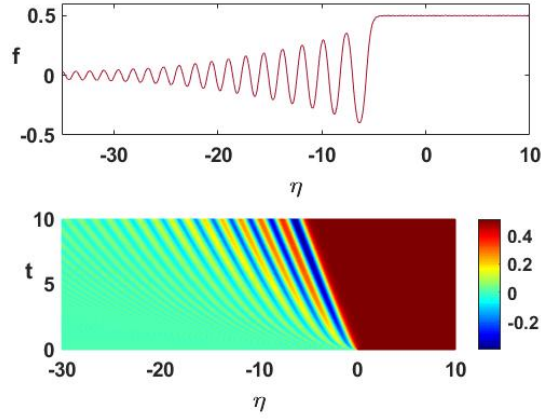


(b) cmKdV(d)

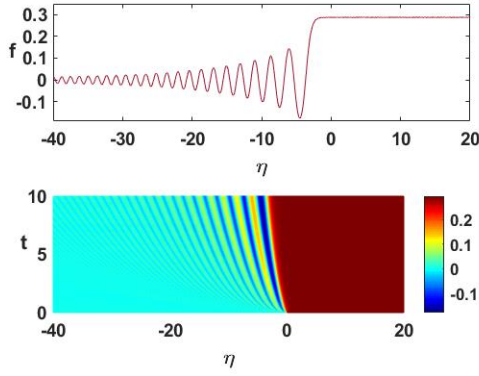


(c) smKdV(d)

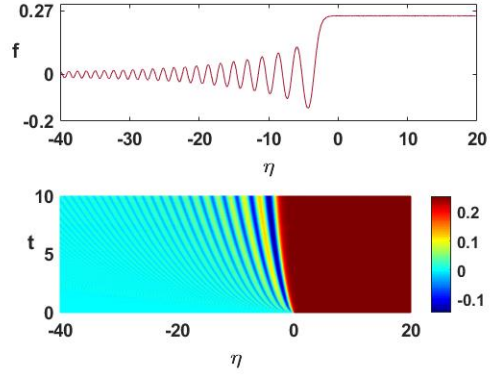
Şekil 4.5 : (4.2) ile verilen basamak tipi başlangıç koşulunda $v_l=0$ ve $v_r=0.5$ için $t = 10$ zaman değerinde (a) mKdV(d) (b) cmKdV(d) (c) smKdV(d) denklemleri için doğrudan çözümlerin karşılaştırılması.



(a) mKdV(d)

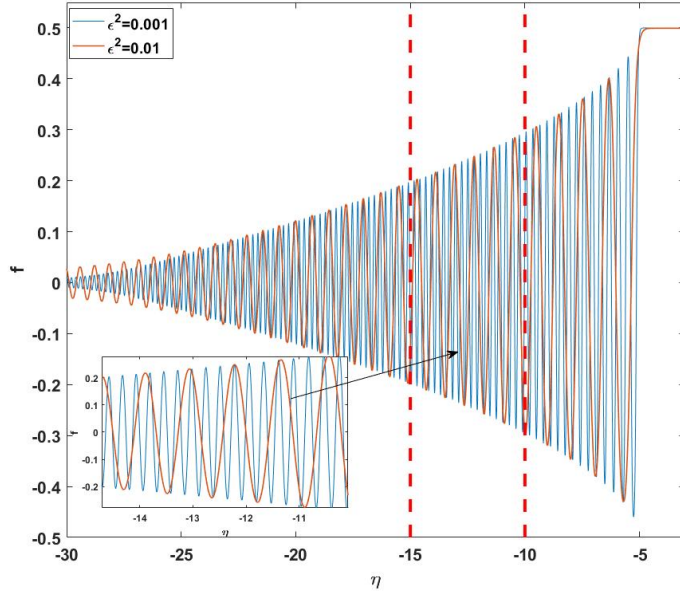


(b) cmKdV(d)

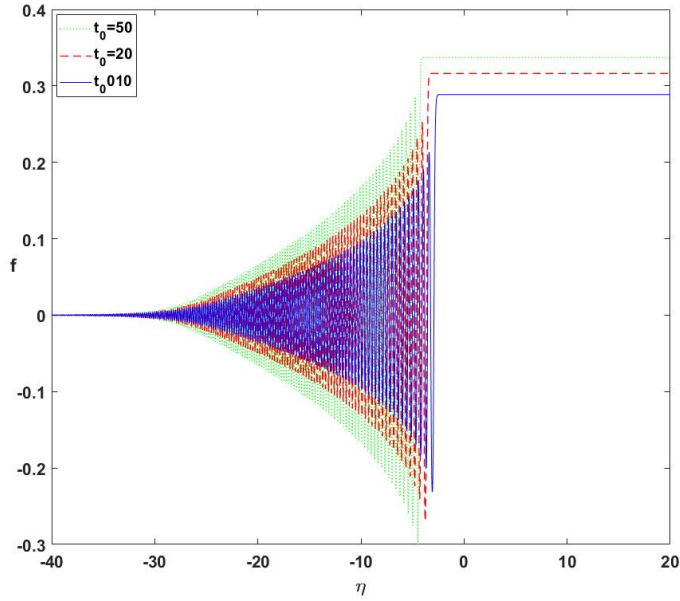


(c) smKdV(d)

Şekil 4.6 : (4.2) basamak tipi başlangıç koşulunda $v_l = 0$ ve $v_r = 0.5$ değerleri için $t = 10$ 'da (a) mKdV(d), (b) cmKdV(d) ve (c) smKdV(d) denkleminin doğrudan sayısal çözümleri ve uzay-zaman grafikleri.



Şekil 4.7 : mKdV(d) denkleminin basamak tipi başlangıç koşulu için farklı ε değerleri için sayısal çözümleri. ε azaldıkça, salınımların dalga boyunun azaldığı görülmektedir.



Şekil 4.8 : cmKdV(d) denkleminin basamak tipi başlangıç koşulu için farklı t_0 değerleri için doğrudan sayısal çözümleri. Çözümlerin t_0 büyüdükçe klasik mKdV(d) denkleminin çözümlerine yaklaştığı görülür.

Focusing denklemlerde olduğu gibi cmKdV(d) ve smKdV(d) denklemlerinin sağlanması gereken sınır koşulları $S(t)$ fonksiyonuna bağlı olarak değiştiği için

cmKdV(d) ve smKdV(d) denklemlerine ait Whitham sistemi için sınır koşulları da zamana bağlı olarak belirlenmelidir. Ayrıca, mKdV(d) denkleminin sağlaması gereken sınır koşulu (focusing mKdV denkleminde olduğu gibi) sabittir. Bu sınır koşullarını bulmak için cmKdV(d) denkleminin Whitham sisteminde sol uç ($m \rightarrow 0$) ve sağ uç ($m \rightarrow 1$) için, (4.36) denkleminde η uzaysal değişkenine bağlı türev terimleri ihmal edilerek elde edilen diferansiyel denklem sistemi çözülecektir:

$$\frac{\partial r_i}{\partial t} + \frac{h_i}{2t + t_0}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.60)$$

Bu amaçla, (4.39) ile verilen h_i bileşenlerinin sırasıyla $m \rightarrow 0$ ve $m \rightarrow 1$ durumlarında limit değerleri hesaplanacaktır.

Hatırlanacak olursa modülü temsil eden m 'nin Riemann değişkenleri cinsinden ifadesi

$$m = \frac{r_3^2 - r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}$$

idi. Buradan, $m \rightarrow 0$ iken $r_3 \rightarrow r_2$ ve $m \rightarrow 1$ iken $r_2 \rightarrow r_1$ olduğu görülür. Buna göre, h_i 'lerin ($i = 1, 2, 3$) $m \rightarrow 0$ ve $m \rightarrow 1$ durumundaki limitleri yardımcı kaynak [50] yardımıyla aşağıdaki gibi bulunurlar:

$$\lim_{m \rightarrow 0} h_1 = r_1, \quad \lim_{m \rightarrow 0} h_2 = \frac{r_1^2}{r_3}, \quad \lim_{m \rightarrow 0} h_3 = \frac{r_1^2}{r_3}, \quad (4.61)$$

$$\lim_{m \rightarrow 1} h_1 = 2r_1, \quad \lim_{m \rightarrow 1} h_2 = 2r_1, \quad \lim_{m \rightarrow 1} h_3 = r_3. \quad (4.62)$$

(4.59) başlangıç koşullarıyla birlikte, cmKdV(d) denkleminin için (4.61) ve (4.62) limit değerleri, (4.60) adi diferansiyel denkleminde yerlerine yazılarak sırasıyla Riemann değişkenlerinin sol uç ve sağ uçtaki sınırları belirlenir. Buna göre, sırasıyla limit durumlarında Riemann değişkenleri

$m \rightarrow 0$ iken,

$$r_1(\eta, t) \rightarrow v_l \sqrt{\frac{t_0}{2t + t_0}}, \quad r_2(\eta, t) = r_3(\eta, t) \rightarrow \sqrt{\frac{2(v_r^2 - v_l^2)t + v_r^2 t_0}{2t + t_0}}, \quad (4.63)$$

$m \rightarrow 1$ iken,

$$r_1(\eta, t) = r_2(\eta, t) \rightarrow v_l \frac{t_0}{2t + t_0}, \quad r_3(\eta, t) \rightarrow v_r \sqrt{\frac{t_0}{2t + t_0}} \quad (4.64)$$

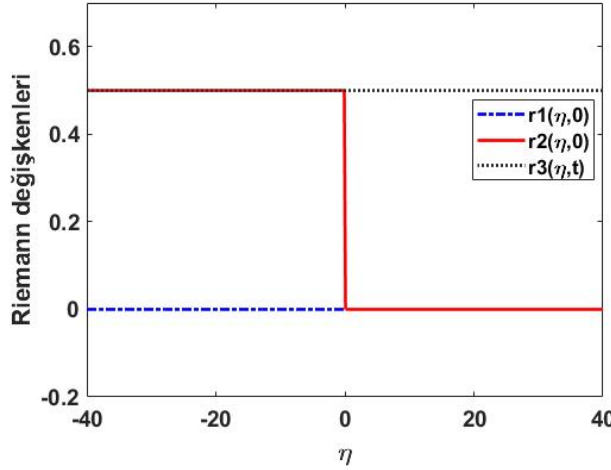
olarak bulunurlar.

Daha sonra, benzer şekilde smKdV(d) denkleminin sınır koşullarını zamana bağlı olarak belirlemek için, (4.55) denkleminde yer alan h_i , ($i = 1, 2, 3$.) terimlerinin $m \rightarrow 0$ ve $m \rightarrow 1$ iken limitleri hesaplanır. Bu limit değerleri (4.61) ve (4.62) ile aynıdır. (4.61) ve (4.62) limit değerleri, (4.55) denkleminin η 'ya bağlı türev terimlerinin ihmal edilmesi sonucu elde edilen adi diferansiyel denkleme yerine yazılır ve çözülürler. Böylece bu çözümler, smKdV(d)-Whitham sistemine ait sınır koşullarını

$$m \rightarrow 0 \text{ iken } r_1(\eta, t) \rightarrow v_l \frac{t_0}{t + t_0}, \quad r_2(\eta, t) = r_3(\eta, t) \rightarrow \frac{\sqrt{(v_r^2 - v_l^2)(t + t_0)^2 - v_l^2 t_0^2}}{t + t_0}, \quad (4.65)$$

$$m \rightarrow 1 \text{ iken } r_1(\eta, t) = r_2(\eta, t) \rightarrow v_l \frac{t_0^2}{(t + t_0)^2}, \quad r_3(\eta, t) \rightarrow v_r \frac{t_0}{t + t_0} \quad (4.66)$$

belirlerler.



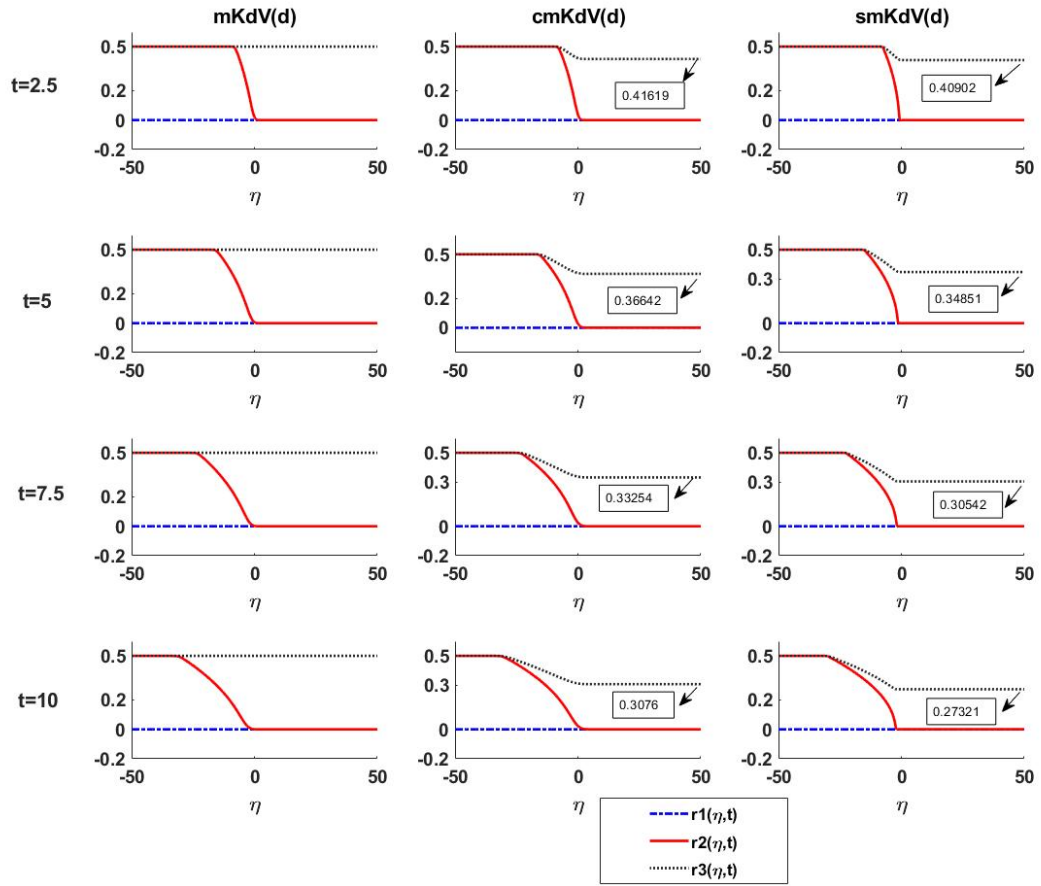
Şekil 4.9 : Riemann tipi değişkenler için $v_r = 0.5$ ve $v_l = 0$ seçimine karşı gelen (4.67) ile verilen başlangıç değerleri ($t = 0$).

DSW çözümleri elde edilirken; $t_0 = 10$, $v_l = 0$ ve $v_r = 0.5$ değerleri seçilmiştir (Şekil 4.9). Bu durumda başlangıç koşulları

$$r_1(\eta, 0) = 0, \quad r_2(\eta, 0) = \begin{cases} 0, & \eta < 0 \\ 0.5, & \eta \geq 0 \end{cases}, \quad r_3(\eta, 0) = 0.5 \quad (4.67)$$

şeklinde olurlar. Benzer hesaplama, farklı v_l ve v_r değerleri için de yapılabilir.

(4.36) ile belirtilen cmKdV(d) denkleminin Whitham sisteminin sayısal çözümünde (4.59) başlangıç koşulları ve (4.61)-(4.62) sınır koşulları ele alınmıştır. Öte

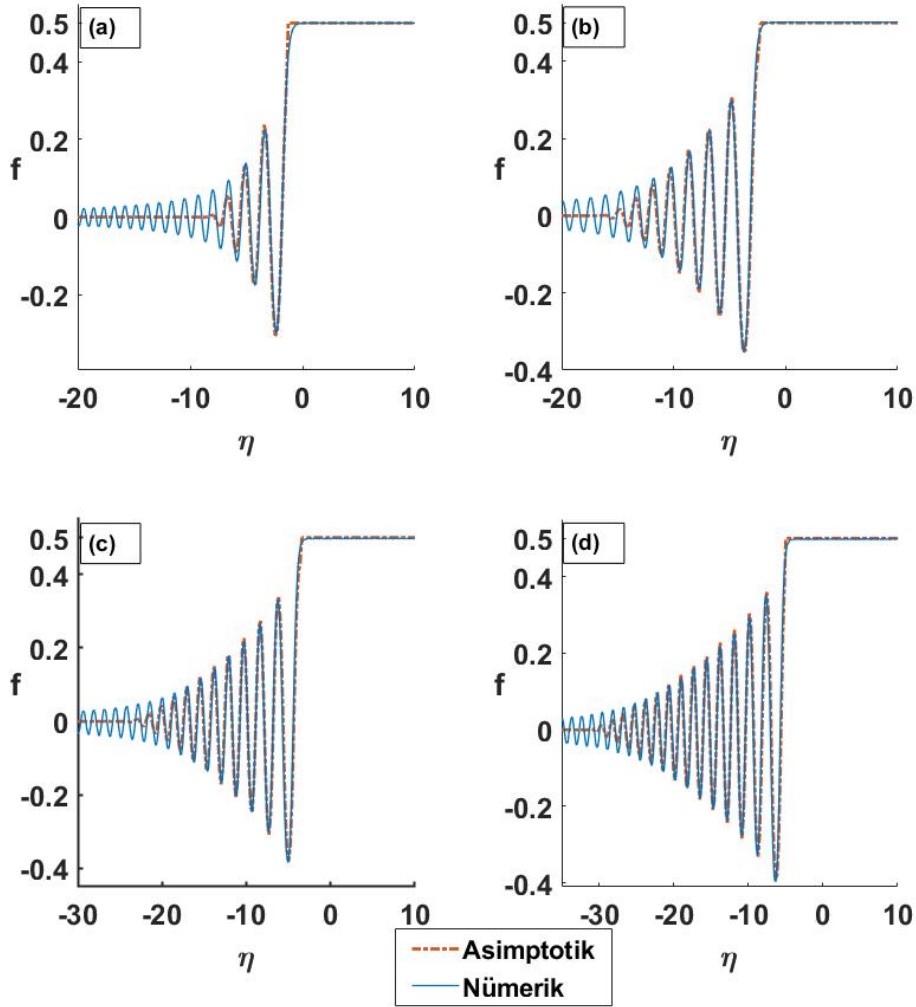


Şekil 4.10 : mKdV(d), cmKdV(d) ve smKdV(d) Whitham sistemlerinin asimptotik olarak çözülmesi sonucu elde edilen $t = 2.5, 5, 7.5, 10$ 'daki Riemann değişkenleri.

yandan, (4.46) smKdV(d)-Whitham sisteminin çözümünde ise, (4.59) başlangıç koşulları ve (4.65)-(4.66) sınır koşulları için sonuçlar elde edilmiştir. Ek olarak, klasik mKdV(d)-Whitham sistemi için de sayısal çözümlere yer verilmiştir. Bu sayısal çözümlerinin bulunmasında, Shampine [53] tarafından birinci mertebeli hiperbolik kısmi türevli denklemler için geliştirilmiş MATLAB tabanlı sayısal çözücü kullanılmıştır. Bu çözücünün kullanıldığı hesaplamalarda iki basamaklı Lax-Wendroff yönteminin farklı bir türü kullanılmıştır. Sayısal çözümde, η için $[-200, 200]$ tanım aralığında $N = 2^{11}$ nokta kullanılmıştır. Çözümlerin grafikleri $t = 2.5, 5, 7.5$ ve $t = 10$ değerleri için Şekil 4.10'da verilmiştir. Şekil 4.10 dikkatlice incelendiğinde zamana bağlı terim içeren cmKdV(d) ve smKdV(d) denklemlerinde, $r_1(\eta, t)$ ve $r_3(\eta, t)$ 'nin zamanla birbirine yaklaştığı görülür. Ayrıca, cmKdV(d) ve smKdV(d) denklemlerinde

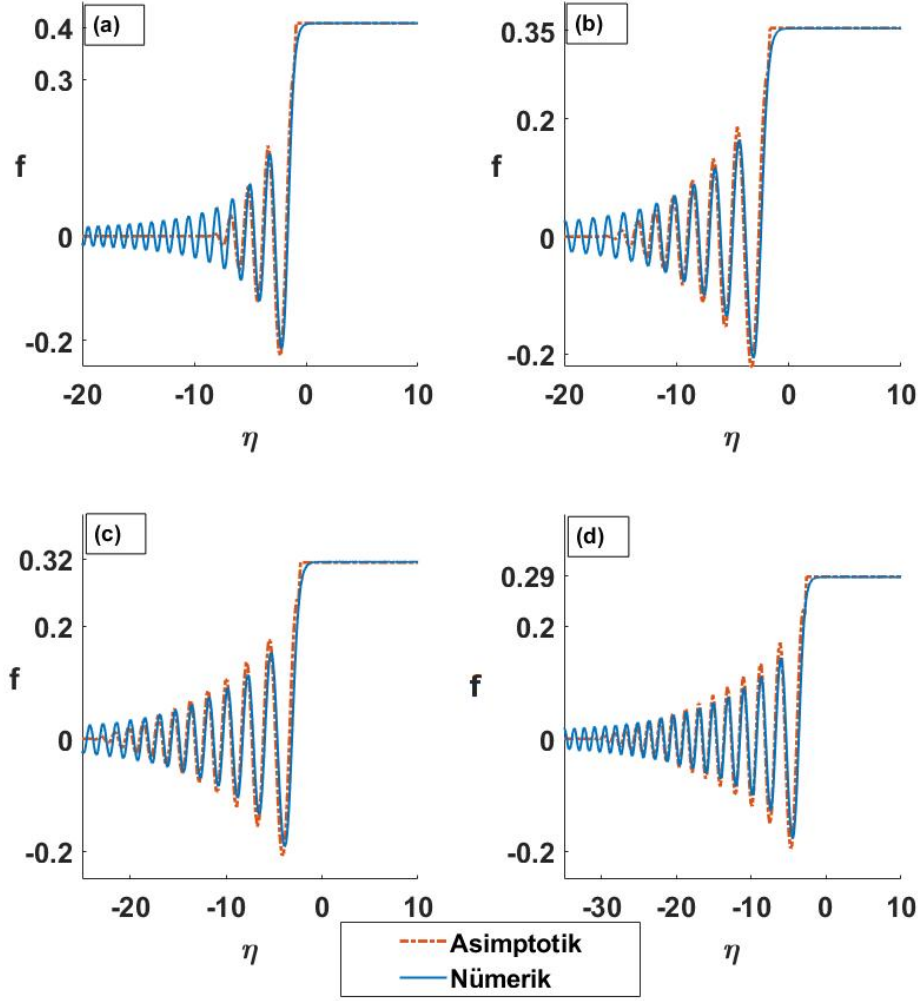
$r_3(\eta, t)$ seviyesinin düştüğü ve smKdV(d) denkleminde bu seviye değerinin daha fazla düştüğü görülmektedir.

Bu aşamadan sonra, elde edilen bu sonuçların uyumluluğunu göstermek için (4.27) ile verilen f_0 ve (4.25) hızlı değişken olan θ kullanılarak mKdV(d), cmKdV(d) ve smKdV(d) denklemlerinin DSW çözümleri sırasıyla, Şekil 4.11, Şekil 4.12 ve Şekil 4.13'de çizdirilmiştir. Buradan, mKdV(d), cmKdV(d) ve smKdV(d) denklemlerinde



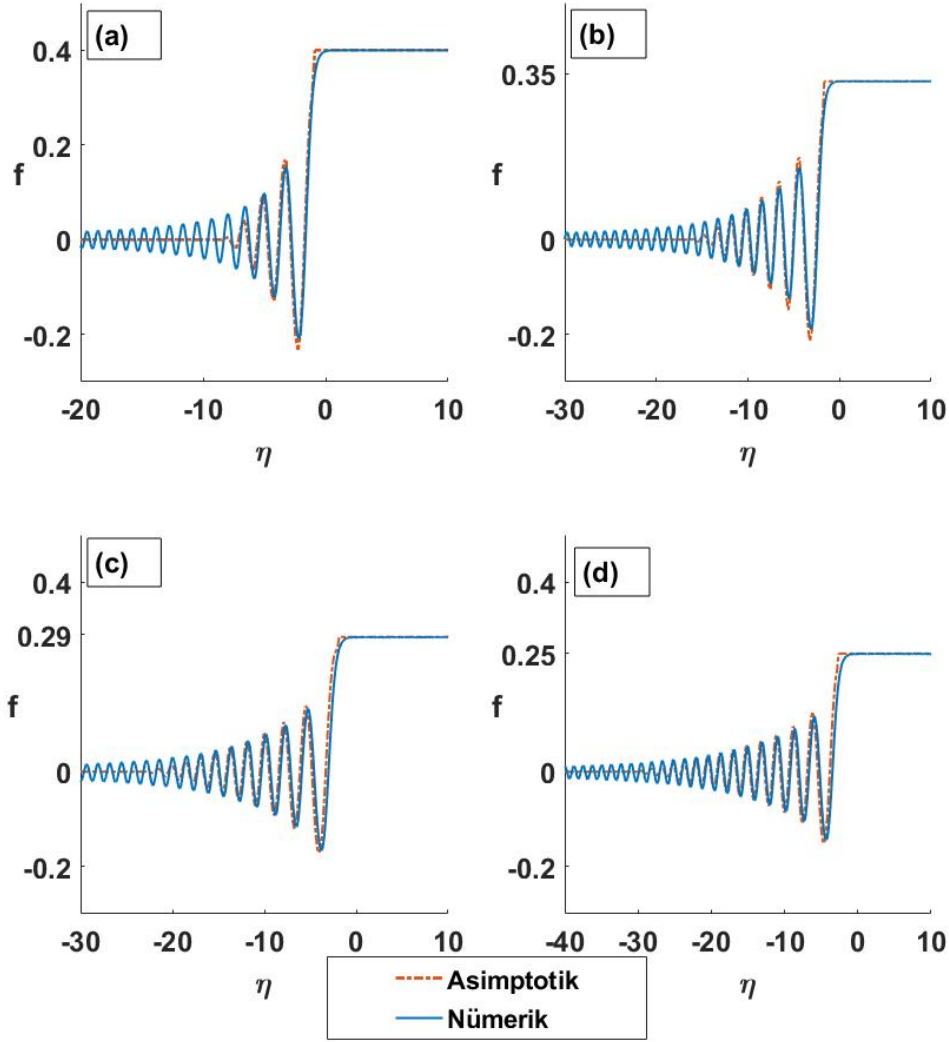
Şekil 4.11 : $\varepsilon^2 = 5.10^{-2}$ ve $t_0 = 10$ seçilerek farklı zaman değerlerinde $v_l = 0$ ve $v_r = 0.5$ adım tipi başlangıç değerleri için mKdV(d) denkleminin (a) $t = 2.5$, (b) $t = 5$, (c) $t = 7.5$ ve (d) $t = 10$ 'da doğrudan sayısal çözümünün ve asimptotik çözümünün (Whitham modülasyon teorisi çözümü) karşılaştırmaları.

görülen dispersif şok dalgalarının yapısıyla ilgili olarak arka kenar genliğinin ve



Şekil 4.12 : $\varepsilon^2 = 5 \cdot 10^{-2}$ ve $t_0 = 10$ seçilerek farklı zaman değerlerinde $v_l = 0$ ve $v_r = 0.5$ adım tipi başlangıç değerleri için cmKdV(d) denkleminin (a) $t = 2.5$, (b) $t = 5$, (c) $t = 7.5$ ve (d) $t = 10$ 'da doğrudan sayısal çözümünün ve asimptotik çözümünün (Whitham modülasyon teorisi çözümü) karşılaştırmaları.

salınımların dalga boyunun asimptotik yaklaşım ve sayısal çözümle uyumlu olduğu görülür. Ayrıca, (4.27) temel mertbe problemin çözümünde yer alan θ_0 'ı yaklaşık olarak belirlerken, Bölüm 2 ve Bölüm 3'tekine benzer bir analiz yapılmıştır. Bu bölümlerden hatırlanacağı gibi, asimptotik çözümler için gerekli olan θ_0 , doğrudan sayısal çözümlerden elde edilen sol taraftaki seviye değeriyle sağ taraftaki en büyük genliğe sahip dalga katarının ortalaması alınarak hesaplanmıştır ve bu ortalama genlik değeri " A_{avg} " ile gösterilmektedir. Ardından, asimptotik çözümde bu ortalama değere en yakın ortadaki dalga katarına göre θ_0 değeri bulunmuştur. Hesaplarda, asimptotik



Şekil 4.13 : $\varepsilon^2 = 5.10^{-2}$ ve $t_0 = 10$ seçilerek farklı zaman değerlerinde $v_l = 0$ ve $v_r = 0.5$ adım tipi başlangıç değerleri için smKdV(d) denkleminin (a) $t = 2.5$, (b) $t = 5$, (c) $t = 7.5$ ve (d) $t = 10$ 'da doğrudan sayısal çözümünün ve asimptotik çözümünün (Whitham modülasyon teorisi çözümü) karşılaştırmaları.

çözümdeki ortalama genlik değerine en yakın dalga katarının genliği ise " M_A " ile temsil edilecektir. mKdV(d), cmKdV(d) ve smKdV(d) denklemlerine ilişkin A_{avg} ve M_A değerleri, farklı zaman değerleri için sırasıyla Çizelge 4.1, Çizelge 4.2 ve Çizelge 4.3'de verilmektedir. Bu çizelgeler yardımı ile, denklemlerin doğrudan sayısal çözümleri ve Whitham modülasyon denklemlerinin çözümlerinin birbiri ile uyumlu olduğu görülür. Ayrıca, en büyük genliğe sahip dalga katarının ortalama hız değerleri (V_{avg}) farklı zaman değerleri için bu çizelgelere verilmiştir. Çizelgelerden görüldüğü

Çizelge 4.1 : $t = 2.5, 5, 7.5$ ve $t = 10$ zaman değerlerinde mKdV(d) denklemi için A_{avg} , M_A ve V_{avg} değerleri.

t (Zaman)	A_{avg} (Doğrudan çözüm)	M_A (Asimptotik çözüm)	V_{avg}
2.5	0.11145	0.1144	-0.2343
5	0.14605	0.1538	-0.3369
7.5	0.16532	0.1641	-0.3873
10	0.17457	0.1779	-0.4028

Çizelge 4.2 : $t = 2.5, 5, 7.5$ ve $t = 10$ zaman değerlerinde cmKdV(d) denklemi için A_{avg} , M_A ve V_{avg} değerleri.

t (Zaman)	A_{avg} (Doğrudan çözüm)	M_A (Asimptotik çözüm)	V_{avg}
2.5	0.08683	0.09278	-0.0634
5	0.08162	0.09565	-0.1440
7.5	0.08732	0.08539	-0.1660
10	0.07145	0.07828	-0.1831

üzere, smKdV(d) denkleminde ait ortalama hız değerleri mKdV(d) ve cmKdV(d) denklemlerine göre oldukça küçüktür. Bunun sebebi, genlik azaldıkça ortalama hız değerinin de azalmasıdır. Ayrıca, focusing denklemlerden (mKdV(f), cmKdV(f) ve smKdV(f)) farklı olarak DSW'sı sola doğru yayılmaktadır. Bunun nedeni defocusing denklemler için V_{avg} değerinin negatif olmasıdır.

4.3.3 ETRK4 yöntemi için hata analizi

Tez çalışmasının bu bölümünde, denklemleri doğrudan çözümünde kullanılan ETRK4 yöntemi için hata analizi yapılmıştır. Hesaplar yapılırken, $h = 0.0001$ zaman aralığı referans olarak alınmış ve zaman aralıkları değiştirilerek L_∞ normuna göre hata hesaplanmıştır. Bölüm 2 ve Bölüm 3'te; mKdV(f), cmKdV(f) ve smKdV(f) denklemleri için yapılan analizde $v_r = 0.5$ ve $v_l = 0$ Riemann tipi başlangıç koşulu alınarak hata analizi yapılmıştır. Hesaplamalarda, maddesel koordinat η 'nin tanım

Çizelge 4.3 : $t = 2.5, 5, 7.5$ ve $t = 10$ zaman değerlerinde smKdV(d) denklemi için A_{avg} , M_A ve V_{avg} değerleri.

t (Zaman)	A_{avg} (Doğrudan çözüm)	M_A (Asimptotik çözüm)	V_{avg}
2.5	0.0753	0.0756	-0.0537
5	0.0735	0.0751	-0.0952
7.5	0.0655	0.0649	-0.1139
10	0.0582	0.0538	-0.1306

Çizelge 4.4 : mKdV(d) denklemi için elde edilen hata analizi.

h (Zaman adımı)	$N = 2^{14}$	$N = 2^{15}$	$N = 2^{16}$
0.0005	1.1091e-04	1.1130e-04	1.1374e-04
0.001	3.2387e-04	3.2786e-04	3.3173e-04
0.005	0.0017	0.0017	0.0017
0.01	0.0029	0.0029	0.0030

Çizelge 4.5 : cmKdV(d) denklemi için elde edilen hata analizi.

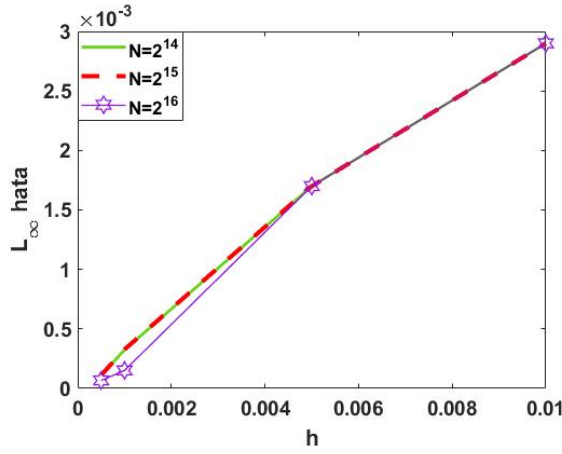
h (Zaman adımı)	$N = 2^{14}$	$N = 2^{15}$	$N = 2^{16}$
0.0005	6.7945e-05	6.9139e-05	6.9346e-05
0.001	2.2717e-04	2.3328e-04	2.3343e-04
0.005	8.9742e-04	9.0667e-04	9.1088e-04
0.01	0.0021	0.0021	0.0021

aralığı $[-200, 200]$ olarak alınmıştır. Ayrıca, zayıf dispersiyon etkisini belirleyen $\varepsilon = 0.05$, zamana bağlı terim içerisinde yer alan $t_0 = 10$ olarak kullanılmıştır ve $t = 10$ için sonuçlar elde edilmiştir. Hata analizi hesabı yapılırken, kullanılan parametrelerin, denklemleri doğrudan çözmek için ele alınan değerler olduğuna dikkat edilmelidir.

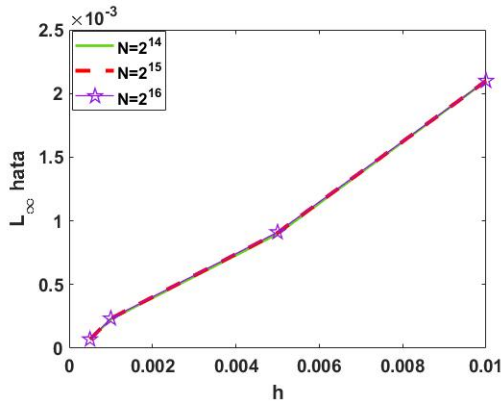
İlk olarak, klasik mKdV(d) denklemi için doğrudan çözümde kullanılan diğer parametreler sabit tutularak Fourier mod sayıları $N = 2^{14}$, $N = 2^{15}$, $N = 2^{16}$ alınarak, norm hata değerleri hesaplanmıştır. Bu değerler Çizelge 4.4'te verilmiştir. Bu çizelgeler yardımıyla, zaman aralığı arttıkça hata mertebesinin arttığı gözlemlenmiştir. Bu sonuçlar, Bölüm 2 ve Bölüm 3'te klasik focusing mKdV denklemi için yapılan hata analizi ile tutarlıdır. Ek olarak, Şekil 4.14'te $N = 2^{14}$, $N = 2^{15}$, $N = 2^{16}$ Fourier mod sayıları için hata analizi karşılaştırması yapılmış ve Fourier mod sayısı arttığında hata mertebesinde değişiklik olmadığı gözlemlenmiştir. Şekil 4.14'den de görüleceği gibi hata $h = 0.0005$ zaman aralığı için 10^{-4} iken, zaman aralığı arttıkça hata artmaktadır. Klasik mKdV(d) denklemi için yapılan analiz, cmKdV(d) ve smKdV(d) denklemleri için de yapılmış ve elde edilen sonuçlar sırasıyla Çizelge 4.5 ve Çizelge 4.6'da verilmiştir. Ayrıca, sayısal olarak hesaplanan bu hata değerleri Şekil 4.14'te verilmektedirler. Benzer biçimde, cmKdV(d) ve smKdV(d) denklemleri için de adım aralığı arttığında hata mertebesinin arttığı bu şekiller yardımıyla görülebilir. Bir diğer gözlem ise, zamana bağlı terim içeren cmKdV(d) ve smKdV(d) denklemlerinde hesaplanan hata değerlerinde önemli bir değişiklik olmamasıdır.

Çizelge 4.6 : smKdV(d) denklemi için elde edilen hata analizi.

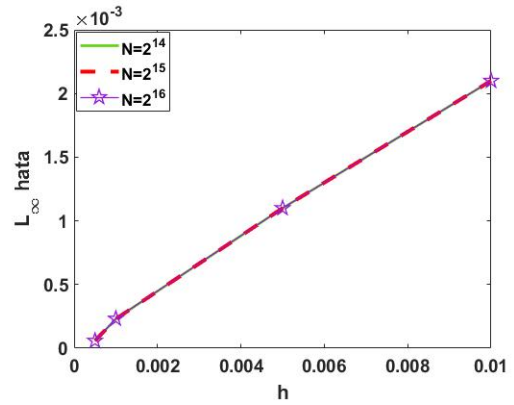
h (Zaman adımı)	$N = 2^{14}$	$N = 2^{15}$	$N = 2^{16}$
0.0005	5.6240e-05	5.8242e-05	5.8278e-05
0.001	2.3019e-04	2.3005e-04	2.3197e-04
0.005	0.0011	0.0011	0.0011
0.01	0.0021	0.0021	0.0021



(a) mKdV(d)



(b) cmKdV(d)



(c) smKdV(d)

Şekil 4.14 : (a) mKdV(d), (b) cmKdV(d) ve (c) smKdV(d) denkleminin $t = 10$ 'da farklı Fourier modları (N) için L_∞ normuna göre hataların karşılaştırılması. Burada, başlangıç seviyesi $(0.5, 0)$ ve $\varepsilon^2 = 0.05$ olarak seçilmiştir.

4.3.4 mKdV(d) tipindeki denklemlerin Riemann tipi başlangıç koşulu için sınıflandırılması

2005 yılında El, yaptığı çalışmada mKdV(d) denkleminde dispersif şok dalga yayılımının gözlemlenmesi için

$$|v_r| > |v_l|, \quad v_r v_l \geq 0 \quad (4.68)$$

şartının sağlanması gerektiğini göstermiştir [24]. Bu eşitsizliğin sağlanmadığı durumlarda seyreltme dalgası, kink ve bu dalgaların kombinasyonu olarak adlandırılan farklı tipte şok dalga tipleri oluşur. Ayrıca, literatür incelendiğinde daha önce silindirik ve küresel kısmı türevli denklemlere ait dalga formları için bir sınıflandırma yapılmadığı görülmektedir. Bu tez çalışması kapsamında, klasik mKdV(d) denklemi için yapılan sınıflandırma [24] göz önüne alınarak, cmKdV(d) ve smKdV(d) denklemleri için yapılabilecek sınıflandırma için sayısal sonuçlar ortaya konacaktır.

İlk olarak, $|v_r| > |v_l|$, $v_r v_l \geq 0$ şartlarının sağlanması durumunu inceleyerek analize başlayalım. Bu eşitsizliğin sağlandığı durumda DSW'sı oluşmaktadır. Şekil 4.15'te $v_r = 0.5$, $v_l = 0.1$ parametre seçimine bağlı olarak klasik mKdV(d), cmKdV(d) ve smKdV(d) denklemleri için oluşan DSW yayılımı gözlenmektedir. mKdV(d) denklemi için en büyük genliğe sahip dalga katarının arka kenarda $\eta = -7$ 'de oluştuğu görülür. Ayrıca, arka kenarda $2(v_r - v_l) = 0.8$ genlikli dark solitonlar mevcuttur. Ön kenarda $\eta = -34$ 'de ise en küçük genlikli dalgalar oluşmaktadır. cmKdV(d) ve smKdV(d) denklemlerin ise arka kenar pozisyonları sırasıyla $\eta = -3$ ve $\eta = -2$ 'dir. Her iki denklem için de zamana bağlı terimin etkisiyle arka kenarda oluşan en büyük genlikli dalga katarının genliği küçülmektedir. Bu denklemlerde klasik mKdV(d) denkleminde olduğu gibi en büyük genlikli dalga katarları arka kenarda mevcuttur. Ayrıca, en küçük genlikli dalga katarının oluştuğu ön kenar pozisyonları; cmKdV(d) ve smKdV(d) denklemleri için sırasıyla $\eta = -22$ ve $\eta = -19$ 'dur.

$|v_r| > |v_l|$ ve $v_r v_l < 0$ şartları sağlandığında ise, "DSW" ve "kink (K)" dalgaların kombinasyonu olarak adlandırılan, "DSW-K" dalga formu oluşmaktadır. Şekil 4.15'de $v_l = -0.5$ ve $v_r = 0.7$ parametre seçimine bağlı olarak oluşan "DSW-K" çözümleri görülmektedir.

$|v_r| < |v_l|$ ve $v_r v_l < 0$ koşulları altında, "K" ve seyreltme dalga (R) kombinasyonu oluşmaktadır. $v_r = 0.5$ ve $v_l = -1$ seçimiyle oluşan bu dalga formu yine Şekil 4.15'ten görülebilir.

$|v_r| < |v_l|$ ve $v_r v_l > 0$ eşitsizlikleri sağlandığında ise, ($v_l = -1$ ve $v_r = -0.5$) oluşan seyreltme dalgasının grafiği de Şekil 4.15'te verilmiştir.

Burada şu noktaya dikkat çekmek gerekir. Defocusing klasik mKdV denkleminde DSW çözümleri oluşabilmesi için $|v_r| > |v_l|$ (her ikisi de pozitif ya da her ikisi de negatif) şartının sağlanması gerekir. Fakat v_r ya da v_l 'den herhangi birisinin negatif olması durumunda defocusing mKdV ve focusing mKdV denklemlerin çözümleri sonucu oluşan şok dalgası oldukça farklıdır. Defocusing mKdV denkleminde $v_l \rightarrow -v_r$ iken baştaki soliter dalganın genliği azalmaktadır ve bu limit değerinde "bore" olmayan bir şok dalgası oluşmaktadır (kink wave). Focusing klasik mKdV denkleminde ise, $v_r \rightarrow -v_l$ iken baştaki soliter dalganın genliği artmakta ve bu limit değerinde sinus şeklinde bir "bore" oluşmaktadır (CDSW). Bu farklılığın nedeni şu şekilde açıklanabilir. (4.24) ile verilen defocusing mKdV denkleminin modülünün

$$m_{def} = \frac{(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_4)}{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}$$

olduğunu hatırlayalım. Buradan, $m \rightarrow 0$ olması için $\alpha_2 = \alpha_3$ ya da $\alpha_1 = \alpha_4$ olmalıdır. Ancak defocusing mKdV denkleminde kararlı ilerleyen dalga çözümleri elde etmek için kökler arasında $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4$ eşitsizliği geçerli olduğundan, $\alpha_1 = \alpha_4$ veya $\alpha_2 = \alpha_3$ durumları söz konusu olabilir.

Bölüm 2'den hatırlanacağı gibi focusing mKdV denkleminin (2.31) ile verilen modül

$$m_{foc} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_4)}{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}$$

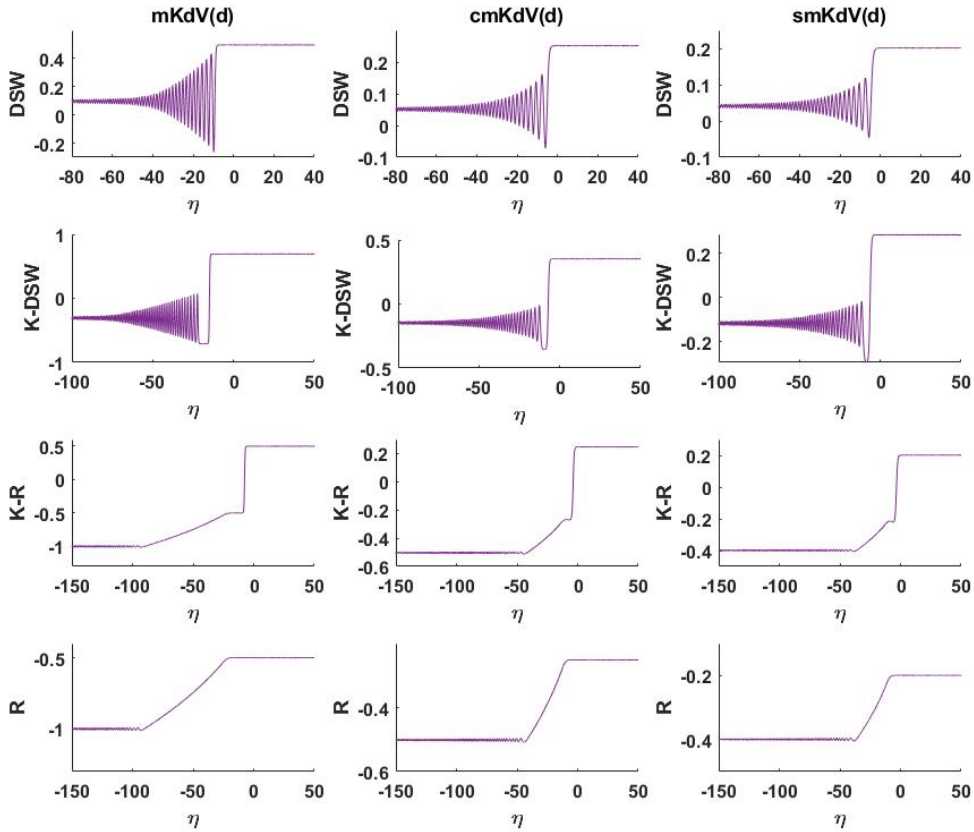
şeklinde ifade edildi. Bu modül değerinden, $m \rightarrow 0$ olması hali iki durumla açıklanabilir; yani $\alpha_1 = \alpha_2$ veya $\alpha_3 = \alpha_4$ durumlarından biri geçerli olabilir. $\alpha_1 = \alpha_2$ olması durumunda lineer dalgalar oluşurken, $\alpha_2 = \alpha_3$ iken sonlu genlikli harmonik dalgalar oluşur. Bunun nedeni açıklamak için focusing mKdV denkleminin (2.32) ile verilen ilerleyen dalga çözümünü göz önüne alalım:

$$f_0(\theta, \eta, t) = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + \frac{(2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3)}{(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3) + (\alpha_1 - \alpha_2)\text{sn}^2[U_1(\theta - \theta_0), m]}$$

Burada, $U_1 = \sqrt{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3)}/2k$ 'dir. Dikkat edilirse, özellikle $\alpha_3 = \alpha_4$ olduğunda $\text{sn}(z, m) \rightarrow \sin(z)$ olduğundan sonlu genlikli harmonik dalgalar oluşur. Öte yandan, defocusing mKdV denkleminin (4.23) ilerleyen dalga çözümü

$$f_0(\theta, \eta, t) = \alpha_1 - \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}{(\alpha_1 - \alpha_3) - (\alpha_2 - \alpha_3)\text{sn}^2[U_2(\theta - \theta_0), m]}$$

dir. Burada, $U_2 = \sqrt{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3)}/2k$ şeklinde tanımlanmaktadır. Defocusing durumda $m \rightarrow 0$ durumuna karşılık gelen $\alpha_1 = \alpha_4$ (ya da $\alpha_2 = \alpha_3$) olması halinde f_0 çözümünde yer alan U_2 'nin etkisinden dolayı lineer dalgalar gözlemlenir. Ayrıntılar için Şekil 3.13 ve Şekil 4.15'e bakılabilir.



Şekil 4.15 : mKdV(d), cmKdV(d) ve smKdV(d) denklemleri için $\varepsilon^2 = 0.05$ ve farklı v_r ve v_l seçimlerine karşı gelen farklı şok dalga tipleri. Tüm grafiklerde $t = 15$ için sonuçlar verilmiştir.

5. SONUÇLAR

Bu tez çalışması kapsamında (2+1) boyutlu focusing modifiye Kadomtsev-Petviashvili (mKP(f)), (3+1) boyutlu focusing modifiye Kadomtsev-Petviashvili (mKP(f)) denklemi ve bu denklemlerin defocusing halleri olan (2+1) boyutlu defocusing modifiye Kadomtsev-Petviashvili (mKP(d)), (3+1) boyutlu defocusing modifiye Kadomtsev-Petviashvili (mKP(d)) denklemi olmak üzere dört başlıca denklem ele alınarak, bu denklemlere karşı gelen DSW çözümleri ayrıntılı olarak incelenmiştir.

İlk olarak, parabolik bir dalga cephe boyunca uzanan basamak tipi başlangıç koşulu altında (2+1) boyutlu mKP(f) denkleminin DSW çözümleri incelenmiştir. Bunun için denkleme benzerlik dönüşümü uygulanarak orijinal mKP(f) denklemi, (1+1) boyutlu focusing silindirik modifiye Korteweg-de Vries (cmKdV(f)) denklemine indirgenmiştir. Elde edilen cmKdV(f) denkleminin, Whitham modülasyon denklemleri bir asimptotik yöntem olan çoklu ölçekler yöntemi kullanılarak türetilmiştir. Whitham modülasyon denklemleri elde edilirken dalgaların korunumu yasası ve sekürlerlik koşulları kullanılmıştır. Ardından, cmKdV(f) denkleminin Whitham modülasyon denklemleri sayısal olarak çözülmüştür. Ayrıca, cmKdV(f)-Whitham sisteminde silindirik terimin özdeş olarak sıfır olması durumunda klasik focusing modifiye Korteweg-de Vries (mKdV(f)) denkleminin Whitham sistemine indirgendiğinden sayısal çözümlerde zamana bağlı terimin etkisini gözlemlemek için mKdV(f)-Whitham sisteminin çözümleri de incelenmiştir. Daha sonra, mKdV(f) ve cmKdV(f) denklemlerinin asimptotik çözümleri ile ilgili denklemlerin doğrudan sayısal çözümleri karşılaştırılarak kullanılan yöntemin uygunluğu da gösterilmiştir. Denklemlere ait doğrudan sayısal çözümler “Exponential Time Differencing Runge Kutta-4” (ETDRK4) yönteminin modifiye hali kullanılmıştır. Bunlara ek olarak, mKdV(f) ve cmKdV(f) denklemlerini basamak tipi başlangıç koşuluyla birlikte doğrudan çözmek için kullanılan ETRK4 yöntemi için hata analizi yapılmıştır.

Diğer bir problem olarak, (3+1) boyutlu mKP(f) denklemi için paraboloid tipi bir dalga cephesi ve basamak tipi başlangıç koşulu ele alınmıştır. (3+1) boyutlu mKP(f) denklemi uygun bir çözüm formu kullanılarak (1+1) boyutlu focusing küresel modifiye Korteweg-de Vries (smKdV(f)) denklemine indirgenmiştir. Daha sonra, smKdV(f) denklemine ait Whitham modülasyon sistemi çoklu ölçekler yöntemi kullanılarak türetilmiştir. Ayrıca, smKdV(f)-Whitham sistemi, küresel terim özdeş olarak sıfır alındığında (yani $h_i = 0$) mKdV(f)-Whitham sistemine indirgenmektedir. Bu aşamadan sonra, mKdV(f) ve smKdV(f) denklemlerinin Whitham modülasyon denklemleri asimptotik olarak çözülmüştür. Daha sonra, mKdV(f) ve smKdV(f) denklemleri ETDRK4 metodunun modifiye hali kullanılarak doğrudan çözdürülmüştür. Ardından, asimptotik ve doğrudan çözümler karşılaştırılarak kullanılan asimptotik yöntemin doğruluğu test edilmiştir. Bu karşılaştırma ile, Whitham teorisinin ne kadar başarılı olduğu gözlemlenmiştir. Daha sonra, zamana bağlı terimin denklemler üzerindeki etkisini ortaya koymak için cmKdV(f) denklemi ve smKdV(f) denklemi için karşılaştırma yapılmıştır. Ayrıca, bu bölümde de ETRK4 yöntemi için hata analize yapılmıştır. Öte yandan, literatür incelendiğinde mKdV(f) denkleminde DSW yayılımı gözlemlenmesi için başlangıçta kullanılan basamak tipi başlangıç koşullarına bağlı olarak sağlaması gereken kriter $|v_l| > |v_r|$, $v_r v_l \geq 0$ olarak ifade edilmiştir. Bu kriterde yer alan v_l ve v_r basamak tipi başlangıç koşulunda kullanılan parametrelerdir. Bu eşitsizliğin sağlanmadığı durumlarda seyreltme dalgası, CDSW ve bu dalgaların kombinasyonu olarak adlandırılan farklı tipte şok dalga tipleri oluşur. Ayrıca, literatür incelendiğinde daha önce silindirik ve küresel kısmı türevli denklemlerine ait dalga formları için bir sınıflandırma yapılmadığı görülmektedir. Bu tez çalışması kapsamında, klasik mKdV(f) denklemi için yapılan sınıflandırma göz önüne alınarak cmKdV(f) ve smKdV(f) denklemleri için de yapılabilecek muhtemel bir sınıflandırma için sayısal sonuçlara yer verilmiştir.

Bu problemlerin yanında, (2+1) ve (3+1) boyutlu mKP(d) denklemleri için DSW çözümleri için analiz yapılmıştır. (2+1) boyutlu mKP(d) denklemi, parabolik dalga cephesi boyunca uzanan basamak tipi başlangıç koşuluyla birlikte ve uygun bir çözüm formu ile (1+1) boyutlu defocusing silindirik modifiye Korteweg-de Vries (cmKdV(d)) denklemine indirgenmiştir. (3+1) boyutlu mKP(d) denklemi için benzer

bir analiz kullanılarak, (1+1) boyutlu defocusing küresel modifiye Korteweg-de Vries (smKdV(d)) denklemi türetilmiştir. Daha sonra, her iki denklem için de çoklu ölçekler metodu yardımıyla Whitham sistemleri türetilmiştir. Elde edilen Whitham sistemleri sayısal olarak çözülmüştür. Ayrıca, bu tez çalışmasında focusing denklemlerde olduğu gibi zamana bağlı terimin etkisi gözlemlemek için klasik mKdV(d) denkleminin çözümlerine de yer verilmiştir. Ardından, denklemlerin doğrudan sayısal çözümleri ile asimptotik çözümleri karşılaştırılmıştır. İncelemenin devamında, mKdV(d), cmKdV(d) ve smKdV(d) denklemlerinin doğrudan sayısal çözümlerinde kullanılan ETRK4 yöntemi için hata analizi yapılmıştır. Bölümün sonunda, defocusing denklemler için yapılan sınıflandırmaya yer verilmiştir. Klasik mKdV(d) denklemi için yapılan sınıflandırma göz önünde bulundurularak cmKdV(d) ve smKdV(d) denklemleri için dalga formlarının muhtemel sınıflandırılmasına yardımcı olarak sayısal sonuçlara yer verilmiştir. Focusing denklemlerde görülen CDSW dalga formu yerine defocusing durumda "kink" dalgası formundaki çözüm mevcuttur.

Hem focusing hem de defocusing denklemlerde, t 'ye bağlı terim içeren cmKdV(f), smKdV(f), cmKdV(d) ve smKdV(d) denklemlerinin genlik seviyelerinde düşüş olduğu gözlemlenmiştir. Farklı t değerleri için sayısal çözümler yapılarak, DSW çözümlerine ait ön ve arka kenar seviyelerindeki değişim ortaya konmuştur. Klasik denklemler, yani mKdV(f) ve mKdV(d) denklemleri için yapılan analizde ise genliğin sabit kaldığı görülmüştür. Denklemlerin doğrudan sayısal çözümleriyle asimptotik çözümlerinin karşılaştırması olarak verilen grafikler yardımıyla salınımların ön kenar genliği ile dalga boyunun asimptotik yaklaşımda ve sayısal çözümde uyumlu olduğu görülmektedir. Bu karşılaştırma ile, cmKdV(f), smKdV(f), cmKdV(d) ve smKdV(d) denklemlerinin sınır koşulları zamana bağlı olarak değişmesine rağmen Whitham modülasyon teorisi doğru bir yaklaşım elde etmemizi sağlamıştır. Ayrıca, DSW'lere ait yayılma zarfı, yayılma hızı ve belirli bir andaki maksimum-minimum genlik büyüklükleri gibi bilgiler denklemlerin doğrudan sayısal çözümlerinden elde edilememektedir. DSW'lerin yayılımını modelleyen Whitham modülasyon denklemlerinin çözümleri bu bilgilerin bulunmasına olanak sağlamaktadır. Bu çalışmada, indirgenmiş denklemlere ait bu bilgiler elde edilmiştir.

Asimptotik çözümlerde yer alan θ_0 'ların belirlenmesi için denklemlerin doğrudan sayısal çözümlerinden yararlanılmıştır. Bunun için, ilk olarak doğrudan sayısal çözümlerden elde edilen sol taraftaki seviye değeri ile sağ taraftaki en büyük dalga katarının genlik değerinin ortalaması alınmıştır. Asimptotik çözümde bu ortalama değere en yakın genliğe sahip ortadaki dalga katarına göre θ_0 belirlenmiştir. Focusing ve defocusing denklemler için farklı t değerleri karşı gelen θ_0 değerleri hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar, doğrudan sayısal ve asimptotik çözümlerin tutarlı olduğunu göstermektedir. Ek olarak, hem klasik hem de zamana bağlı terim içeren denklemler için en büyük genliğe sahip dalga katarlarının ortalama hız değerleri hesaplanmıştır. Burada şu noktaya dikkat çekmek gerekir: $cmKdV(f)$ ve $smKdV(f)$ denkleminin ortalama hızı $mKdV(f)$ denklemine göre daha düşüktür. Bunun sebebi en büyük genliğe sahip dalga katarının genliğinin zamanla azalmasıdır. Ayrıca, $smKdV(f)$ denkleminin en büyük genliğinin ortalama hız değerinin focusing denklemler içinde en küçük olduğu görülür. Defocusing denklemler için de benzer analiz yapılarak, en büyük genliğe sahip dalga katarının ortalama hızının en büyük olduğu durum klasik $mKdV(d)$ denkleminde gözlemlenirken en küçük olduğu durum $smKdV(d)$ denkleminde olduğu sonucuna varılmıştır. Ayrıca, defocusing denklemlerde faz hızının negatif olmasından DSW yayılımı sola doğrudur. Bu nedenle, en büyük genliğe sahip dalga katarı arka kenarda oluşmaktadır. Buna göre, $cmKdV(f)$ ve $smKdV(f)$ denklemlerinin DSW'nun ön kenarı $mKdV(f)$ denklemlerine göre daha yavaş hareket etmektedir. Ek olarak, $cmKdV(d)$ ve $smKdV(d)$ denklemlerinin DSW'nun arka kenarı $mKdV(d)$ denklemine göre daha yavaş hareket etmektedir.

Hem focusing hem de defocusing silindirik ve küresel $mKdV$ denklemlerine ait uzay-zaman grafikleri incelendiğinde bu denklemlerin $mKdV$ denklemine göre daha yavaş olduğu görülmüştür. Ayrıca, $cmKdV(f)$, $smKdV(f)$, $cmKdV(d)$ ve $smKdV(d)$ denklemleri için dalga cephelerinin geometrik yayılma etkisinden dolayı kavisli olduğu sonucuna varılmıştır.

Bu tez çalışmasından elde edilen indirgenmiş denklemlerin DSW çözümlerine ait bilgiler, $(2+1)$ veya daha yüksek boyutlu denklemlere DSW çözümlerinin elde edilmesinde büyük öneme sahiptirler. $(2+1)$ ve daha yüksek boyutlu denklemler için bu tür bilgiler sayısal çözümler ile elde edilebilirler ve çok uzun hesaplama

süreleri gerektirmektedir. Fakat, benzerlik dönüşümü sonucu elde edilmiş indirgenmiş denklemlerin DSW çözümleri sayesinde bu hesaplama süreleri ciddi şekilde düşmektedir. (2+1) ve daha yüksek boyutlu sistemlere ait sayısal çözümlerin elde edilmesi gelecekteki başka bir çalışmasının konusu olarak ele alınabilir. Bu tür bir çalışma yapıldığında, sayısal çözümlerin doğruluğunun test edilebilmesi için bu tez çalışmasındaki sayısal sonuçların kullanılması önem arz edecektir.

Tez çalışmasının sonuçlarına bağlı olarak, ilgili (2+1) ve (3+1) boyutlu sistemlerin genelleştirmesi olan, (N+1) boyutlu daha yüksek boyutlu sistemlerin DSW çözümlerinin elde edilmesi problemi, gelecekte başka bir çalışmanın konusu olabilir.





KAYNAKLAR

- [1] **Ablowitz, M.J., Biondini, G. ve Rumanov, I.** (2018). Whitham modulation theory for $(2 + 1)$ -dimensional equations of Kadomtsev-Petviashvili type, *Journal of Physics. A. Mathematical and Theoretical*, 51(21), 215501, 28.
- [2] **Wan, W., Jia, S. ve Fleischer, J.W.** (2007). Dispersive superfluid-like shock waves in nonlinear optics, *Nature Physics*, 3(1), 46–51.
- [3] **Vargas-Magaña, R.M., Marchant, T. ve Smyth, N.F.** (2021). Numerical and analytical study of undular bores governed by the full water wave equations and bidirectional Whitham–Boussinesq equations, *Physics of Fluids*, 33(6), 067105.
- [4] **El, G.A. ve Hoefler, M.A.** (2016). Dispersive shock waves and modulation theory, *Physica D. Nonlinear Phenomena*, 333, 11–65.
- [5] **Benjamin, T.B. ve Lighthill, M.J.** (1954). On conoidal waves and bores, *Proceedings of the Royal Society. London. Series A. Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 224, 448–460.
- [6] **Sagdeev, R.** (1964). Cooperative phenomena and shock waves in collisionless plasmas, *Reviews of Plasma Physics*, 23(4).
- [7] **Ostrovskii, L.** (1968). Envelope shock waves, *Soviet Physics JETP*, 27(4), 660–664.
- [8] **Whitham, G.B.** (1965). Non-linear dispersive waves, *Proceedings of the Royal Society. London. Series A. Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 283, 238–261.
- [9] **Gurevich, A.V. ve Pitaevskii, L.** (1974). Nonstationary structure of a collisionless shock wave, *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 38, 291–297.
- [10] **Whitham, G.B.** (1965). A general approach to linear and non-linear dispersive waves using a Lagrangian, *Journal of Fluid Mechanics*, 22, 273–283.
- [11] **Luke, J.C.** (1966). A perturbation method for nonlinear dispersive wave problems, *Proceedings of the Royal Society. London. Series A. Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 292, 403–412.
- [12] **Matsutani, S. ve Tsuru, H.** (1991). Reflectionless Quantum Wire, *Journal of the Physical Society of Japan*, 60(11), 3640–3644.

- [13] **Ralph, E. ve Pratt, L.** (1994). Predicting eddy detachment for an equivalent barotropic thin jet, *Journal of Nonlinear Science*, 4, 355–374.
- [14] **Komatsu, T.S. ve Sasa, S.i.** (1995). Kink soliton characterizing traffic congestion, *Physical Review E*, 52(5), 5574.
- [15] **Schief, W.** (1995). An infinite hierarchy of symmetries associated with hyperbolic surfaces, *Nonlinearity*, 8(1), 1.
- [16] **Lonngren, K.E.** (1998). Ion acoustic soliton experiments in a plasma, *Optical and Quantum Electronics*, 30(7-10), 615–630.
- [17] **Khater, A.H., El-Kalaawy, O.H. ve Callebaut, D.K.** (1998). Bäcklund Transformations and Exact Solutions for Alfvén Solitons in a Relativistic Electron–Positron Plasma, *Physica Scripta*, 58(6), 545.
- [18] **Driscoll, C.F. ve O’Neil, T.M.** (1976). Modulational instability of cnoidal wave solutions of the modified Korteweg-de Vries equation, *Journal of Mathematical Physics*, 17(7), 1196–1200.
- [19] **Flaschka, H., Forest, M.G. ve McLaughlin, D.W.** (1980). Multiphase averaging and the inverse spectral solution of the Korteweg-de Vries equation, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 33(6), 739–784.
- [20] **Lax, P.D. ve Levermore, C.D.** (1983). The small dispersion limit of the Korteweg-de Vries equation. ii, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 36(5), 571–593.
- [21] **Deng, G., Biondini, G. ve Trillo, S.** (2016). Small dispersion limit of the Korteweg–de Vries equation with periodic initial conditions and analytical description of the Zabusky–Kruskal experiment, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 333, 137–147, dispersive Hydrodynamics.
- [22] **Levermore, C.D.** (1988). The hyperbolic nature of the zero dispersion Kdv limit, *Communications in Partial Differential Equations*, 13(4), 495–514.
- [23] **Kamchatnov, A.M., Spire, A. ve Konotop, V.V.** (2004). On dissipationless shock waves in a discrete nonlinear Schrödinger equation, *Journal of Physics. A. Mathematical and General*, 37(21), 5547–5568.
- [24] **El, G.A.** (2005). Resolution of a shock in hyperbolic systems modified by weak dispersion, *Chaos. An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 15(3), 037103, 21.
- [25] **Marchant, T.R.** (2008). Undular bores and the initial-boundary value problem for the modified Korteweg-de Vries equation, *Wave Motion*, 45(4), 540–555.
- [26] **El, G.A., Hofer, M.A. ve Shearer, M.** (2017). Dispersive and diffusive-dispersive shock waves for nonconvex conservation laws, *SIAM Review*, 59(1), 3–61.
- [27] **de Brito, L.C. ve Kamchatnov, A.** (2024). Undular bore theory for the modified Korteweg–de Vries–Burgers equation, *Physical Review E*, 109(1), 015102.

- [28] **Matsuno, Y.** (1998). The small dispersion limit of the Benjamin-Ono equation and the evolution of a step initial condition, *Journal of the Physical Society of Japan*, 67(6), 1814–1817.
- [29] **Matsuno, Y.** (1998). Nonlinear modulation of periodic waves in the small dispersion limit of the Benjamin-Ono equation, *Physical Review E. Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 58(6, part B), 7934–7940.
- [30] **Matsuno, Y., Shchesnovich, V.S., Kamchatnov, A.M. ve Kraenkel, R.A.** (2007). Whitham method for the Benjamin-Ono-Burgers equation and dispersive shocks, *Physical Review E. Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 75(1), 016307, 5.
- [31] **Kamchatnov, A.M., Kuo, Y.H., Lin, T.C., Horng, T.L., Gou, S.C., Clift, R., El, G.A. ve Grimshaw, R.H.J.** (2012). Undular bore theory for the Gardner equation, *Phys. Rev. E*, 86, 036605.
- [32] **Vassilev, V., Djondjorov, P., Hadzhilazova, M.T. ve Mladenov, I.** (2011). Traveling wave solutions of the Gardner equation and motion of plane curves governed by the mKdV flow, *AIP Conference Proceedings*, cilt1404, American Institute of Physics, s.86–93.
- [33] **Yan, F., Hua, C., Liu, H. ve Liu, Z.** (2012). The Exact Traveling Wave Solutions and Their Bifurcations in the Gardner and Gardner–KP Equations, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 22(05), 1250126.
- [34] **Miller, P.D.** (2016). On the generation of dispersive shock waves, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 333, 66–83, dispersive Hydrodynamics.
- [35] **Kamchatnov, A.** (2016). Whitham theory for perturbed Korteweg–de Vries equation, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 333, 99–106.
- [36] **Whitfield, A.J. ve Johnson, E.R.** (2017). Whitham modulation theory for the Ostrovsky equation, *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 473(2197), 20160709.
- [37] **Myint, S. ve Grimshaw, R.** (1995). The modulation of nonlinear periodic wavetrains by dissipative terms in the Korteweg–de Vries equation, *Wave Motion*, 22(2), 215–238.
- [38] **Seadawy, A.R. ve El-Rashidy, K.** (2018). Dispersive solitary wave solutions of Kadomtsev–Petviashvili and modified Kadomtsev–Petviashvili dynamical *Results in Physics*, 8, 1216–1222.
- [39] **Kadomtsev, B.B. ve Petviashvili, V.I.** (1970). On the stability of waves in weakly dispersive media, *Soviet Physics - Doklady*, 15, 539.
- [40] **Turitsyn, S. ve Fai'kovich, G.** (1985). Stability of magnetoelastic solitons and self-focusing of sound in antiferromagnets, *Zhurnal Eksperimental'noi i Teroreticheskoi Fiziki*, 89, 270.

- [41] **Ablowitz, M.J. ve Segur, H.** (1979). On the evolution of packets of water waves, *Journal of Fluid Mechanics*, 92(4), 691–715.
- [42] **Veerakumar, V. ve Daniel, M.**, (2003). Modified Kadomtsev-Petviashvili (MKP) equation and electromagnetic soliton, cilt 62, s.163–169, nonlinear waves: computation and theory, II (Athens, GA, 2001).
- [43] **Ablowitz, M.J., Demirci, A. ve Ma, Y.P.** (2016). Dispersive shock waves in the Kadomtsev-Petviashvili and two dimensional Benjamin-Ono equations, *Physica D. Nonlinear Phenomena*, 333, 84–98.
- [44] **Ablowitz, M.J., Biondini, G. ve Wang, Q.** (2017). Whitham modulation theory for the Kadomtsev-Petviashvili equation, *Proceedings A*, 473(2204), 20160695, 23.
- [45] **Ablowitz, M., Biondini, G. ve Wang, Q.** (2017). Whitham modulation theory for the two-dimensional Benjamin-Ono equation, *Physical Review E*, 96(3), 032225, 8.
- [46] **Demirci, A.** (2020). Dispersive shock waves in three dimensional Benjamin-Ono equation, *Wave Motion*, 94, 102502, 10.
- [47] **Aslanova, G., Demirci, A. ve Ahmetolan, S.** (2022). Modulated periodic wavetrains in the spherical Gardner equation, *Wave Motion*, 109, Paper No. 102844, 12.
- [48] **Abeya, A., Biondini, G. ve Hofer, M.A.** (2023). Whitham modulation theory for the defocusing nonlinear Schrödinger equation in two and three spatial dimensions, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 56(2), 025701.
- [49] **Johnson, R.S.** (1979). On the inverse scattering transform, the cylindrical Korteweg-de Vries equation and similarity solutions, *Physics Letters. A*, 72(3), 197–199.
- [50] **Byrd, P.F. ve Friedman, M.D.** (1971). *Handbook of elliptic integrals for engineers and scientists*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 67, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, second edition, revised.
- [51] **Cox, S.M. ve Matthews, P.C.** (2002). Exponential time differencing for stiff systems, *Journal of Computational Physics*, 176(2), 430–455.
- [52] **Kassam, A.K. ve Trefethen, L.N.** (2005). Fourth-order time-stepping for stiff PDEs, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 26(4), 1214–1233.
- [53] **Shampine, L.F.** (2005). Solving hyperbolic PDEs in MATLAB, *ANACM. Applied Numerical Analysis and Computational Mathematics*, 2(3), 346–358.
- [54] **Drazin, P.G.** (1983). *Solitons*, cilt 85 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*, Cambridge University Press, Cambridge.

- [55] **Ablowitz, M.J.** (2011). *Nonlinear dispersive waves*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, New York, asymptotic analysis and solitons.
- [56] **Smyth, N.F. ve Worthy, A.L.** (1995). Solitary wave evolution for mKdV equations, *Wave Motion*, 21(3), 263–275.
- [57] **Ablowitz, M.J. ve Baldwin, D.E.** (2013). Dispersive shock wave interactions and asymptotics, *Physical Review E*, 87(2), 022906.
- [58] **Sahu, B. ve Roychoudhury, R.** (2003). Exact solutions of cylindrical and spherical dust ion acoustic waves, *Physics of Plasmas*, 10(10), 4162–4165.
- [59] **Biswas, A.** (2009). Solitary wave solution for KdV equation with power-law nonlinearity and time-dependent coefficients, *Nonlinear Dynamics. An International Journal of Nonlinear Dynamics and Chaos in Engineering Systems*, 58(1-2), 345–348.
- [60] **Liu, H., Bai, C.L., Xin, X. ve Zhang, L.** (2019). A novel Lie group classification method for generalized cylindrical KdV type of equation: exact solutions and conservation laws, *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, 21(4), Paper No. 55, 7.
- [61] **Liu, H., Bai, C.L., Xin, X. ve Li, X.** (2020). Equivalent transformations and exact solutions to the generalized cylindrical KdV type of equation, *Nuclear Physics. B. Theoretical, Phenomenological, and Experimental High Energy Physics. Quantum Field Theory and Statistical Systems*, 952, 114924, 9.
- [62] **Abdelsalam, U., Zobaer, M., Akther, H., Ghazal, M. ve Fares, M.** (2020). Nonlinear Wave Solutions of Cylindrical KdV-Burgers Equation in Nonextensive Plasmas for Astrophysical Objects., *Acta Physica Polonica, A.*, 137(6).
- [63] **Ablowitz, M.J., Cole, J.T. ve Rumanov, I.** (2020). Whitham equations and phase shifts for the Korteweg–de Vries equation, *Proceedings A*, 476(2240), 20200300, 21.
- [64] **Johnson, M.A. ve Zumbrun, K.** (2010). Rigorous justification of the Whitham modulation equations for the generalized Korteweg-de Vries equation, *Studies in Applied Mathematics*, 125(1), 69–89.
- [65] (2021). *Dispersive shock waves in the modified KdV and cylindrical modified KdV Equations*, youtu.be/hUIKZ-MVrwo.
- [66] **Das, G. ve Sarma, J.** (1998). Evolution of solitary waves in multicomponent plasmas, *Chaos, Solitons & Fractals*, 9(6), 901–911.



EKLER

EK A: Eliptik İntegral ve Eliptik Fonksiyonlar

EK B: Modülasyon Denklemlerindeki Katsayı Matrisleri **A** ve **B**'nin ve **C** Vektörünün Bileşenleri

EK C: ETDRK4 Yöntemi





EK A: Eliptik İntegraller ve Fonksiyonlar

Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists kitabından ([50]) kullanılan formüller aşağıda verilmektedir. Hesaplarda bu kitapta kullanılan denklem numaraları referans alınarak hesaplar yapılmıştır.

Tanımlar

Bu bölüme, tez çalışmasında kullanılan eliptik integraller ve eliptik fonksiyonların tanımlarını vererek başlayalım. Bu kısım, yardımcı kaynak [50]'deki denklem numaraları ve semboller kullanılarak oluşturulmuştur. Aşağıdaki formüllerde yer alan k modülü temsil etmektedir. Ayrıca, "complementary modulus" olarak tanımlanan tamamlayıcı modülün açık ifadesi

$$k' = \sqrt{1 - k^2} \quad (\text{A.1})$$

şeklindedir. Burada, şu noktaya dikkat edilmelidir. Tez kapsamında çalışılan problemlerde, dalga sayısı ile modülün ifadesinin karışmaması adına modül için m sembolü kullanılmıştır. Yani, bu kısımda verilen formüllerde yer alan k^2 ifadesi tez çalışmasında kullanılan m 'yi ifade etmektedir.

Öte yandan, hesaplarda karşılaşılan Legendre eliptik integrallerinin farklı türleri mevcuttur. Bunlardan, ilki Birinci tip tam olmayan eliptik integral olarak isimlendirilen $F(\varphi, k)$ 'dir ve aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$110.02 \left\{ \begin{aligned} \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} &= \int_0^\varphi \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta}} \\ &= \int_0^{u_1} du = u_1 \equiv \text{sn}^{-1}(y, k) \equiv F(\varphi, k) \\ &[y = \sin \varphi; \varphi = \text{am}u_1]. \end{aligned} \right. \quad (\text{A.2})$$

Burada, özel olarak $\varphi = \frac{\pi}{2}$ olması durumunda, Birinci tipten tam eliptik integral olarak adlandırılan $K(k)$ elde edilir:

$$110.06 \int_0^{\pi/2} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta}} = \int_0^K du = F(\pi/2, k) \equiv K(k) \equiv K. \quad (\text{A.3})$$

İkinci tipten tam olmayan eliptik integralin genel ifadesi

$$110.03 \left\{ \begin{aligned} \int_0^y \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}} dt &= \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta} d\vartheta = \int_0^{u_1} \text{dn}^2 u du \\ &= E(u_1) \equiv E(\text{am}u_1, k) \equiv E(\varphi, k). \end{aligned} \right. \quad (\text{A.4})$$

şeklindedir. Bu formülde, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ olması halinde, İkinci tipten tam eliptik integral olarak adlandırılan $E(k)$ elde edilir:

$$110.07 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta} d\vartheta = \int_0^K \text{dn}^2 u du = E(\pi/2, k) \equiv E(k) \equiv E. \quad (\text{A.5})$$

Üçüncü tipten tam olmayan eliptik integralin açık ifadesi ise,

$$110.04 \left\{ \begin{aligned} \int_0^y \frac{dt}{(1-\alpha^2 t^2) \sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} &= \int_0^\varphi \frac{d\vartheta}{(1-\alpha^2 \sin^2 \vartheta) \sqrt{1-k^2 \sin^2 \vartheta}} \\ &= \int_0^{u_1} \frac{du}{1-\alpha^2 \operatorname{sn}^2 u} = \Pi(u_1, \alpha^2) \equiv \Pi(\operatorname{am} u_1, \alpha^2, k) \equiv \Pi(\varphi, \alpha^2, k) \end{aligned} \right. \quad [-\infty < \alpha^2 < \infty]. \quad (\text{A.6})$$

şeklindedir. Burada, kullanılan α^2 parametresi tez çalışmasında n ile temsil edilmektedir. Yukarıda verilen formülde $\varphi = \frac{\pi}{2}$ olması halinde, Üçüncü tipten tam eliptik integral olarak adlandırılan $\Pi(\alpha^2, k)$

$$110.08 \left\{ \begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{d\vartheta}{(1-\alpha^2 \sin^2 \vartheta) \sqrt{1-k^2 \sin^2 \vartheta}} &= \int_0^K \frac{du}{1-\alpha^2 \sin^2 u} \\ &= \Pi(\pi/2, \alpha^2, k) \equiv \Pi(\alpha^2, k), \quad [\alpha^2 \neq 1] \end{aligned} \right. \quad (\text{A.7})$$

olarak ifade edilmektedir.

Şimdi, Jacobi eliptik fonksiyonlarının üç standart formunu tanımlayarak devam edelim. Sırasıyla sinüs, kosinüs ve delta genlik eliptik fonksiyonları olarak adlandırılan $\operatorname{sn}(u, k)$, $\operatorname{cn}(u, k)$ ve $\operatorname{dn}(u, k)$ olarak temsil edilmektedir. Bu fonksiyonların tanımları aşağıda verilmektedir:

$$u = F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\vartheta}{\sqrt{(1-k^2 \sin^2 \vartheta)}}, \quad 0 \leq k^2 < 1, \quad 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2} \quad (\text{A.8})$$

Burada,

$$\varphi = F^{-1}(u, m) = \operatorname{am}(u, m)$$

şeklinde tanımlanırsa

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \sin(\operatorname{am}(u, k)) = \operatorname{sn}(u, k), \\ \cos \varphi &= \cos(\operatorname{am}(u, k)) = \operatorname{cn}(u, k), \\ \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} &= \sqrt{1-k^2 \sin^2(\operatorname{am}(u, k))} = \operatorname{dn}(u, k) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

olur. Aşağıdaki formüllerden de görüleceği gibi modülün özel değerleri dışında $\operatorname{sn}u$, $\operatorname{cn}u$ ve $\operatorname{dn}u$ gösterimi mevcuttur.

Eliptik İntegrallerin Özel Değerleri

$$111.00 \left\{ \begin{aligned} E(0, k) &= 0 \\ F(0, k) &= 0 \\ \Pi(0, \alpha^2, k) &= 0 \end{aligned} \right. \quad (\text{A.10})$$

$$111.01 \left\{ \begin{array}{l} E(\varphi, 0) = \varphi, \\ F(\varphi, 0) = \varphi, \\ \Pi(\varphi, \alpha^2, 0) = \varphi, \alpha^2 = 0 \text{ ise;} \\ = \frac{\tan^{-1}(\sqrt{1-\alpha^2} \tan \varphi)}{\sqrt{1-\alpha^2}}, \quad \alpha^2 < 1 \text{ ise} \\ = \frac{\tanh^{-1}(\sqrt{\alpha^2-1} \tan \varphi)}{\sqrt{\alpha^2-1}}, \quad \alpha^2 > 1 \text{ ise.} \end{array} \right. \quad (\text{A.11})$$

$$111.02 \left\{ \begin{array}{l} K(0) = K'(1) = \pi/2 \\ E(0) = E'(1) = \pi/2 \end{array} \right. \quad (\text{A.12})$$

$$111.05 \left\{ \begin{array}{l} E(\pi/2, 1) = E(1) = E'(0) = 1, \\ F(\pi/2, 1) = K(1) = K'(0) = \infty, \\ \Pi(\pi/2, \alpha^2, 1) = \Pi(\alpha^2, 1) = \infty. \end{array} \right. \quad (\text{A.13})$$

Eliptik Fonksiyonlara ait Temel İlişkiler

$$121.00 \left\{ \begin{array}{l} \text{sn}^2 u + \text{cn}^2 u = 1 \\ k^2 \text{sn}^2 u + \text{dn}^2 u = 1 \\ \text{dn}^2 u - k^2 \text{cn}^2 u = k'^2 \\ k'^2 \text{sn}^2 u + \text{cn}^2 u = \text{dn}^2 u \end{array} \right. \quad (\text{A.14})$$

Eliptik Fonksiyonların Özel Değerleri

$$122.00 \left\{ \begin{array}{l} \text{am}(-u) = -\text{amu} \\ \text{sn}(-u) = -\text{snu} \\ \text{cn}(-u) = \text{cnu} \\ \text{dn}(-u) = \text{dnu} \end{array} \right. \quad 122.01 \left\{ \begin{array}{l} \text{am}0 = 0 \\ \text{sn}0 = 0 \\ \text{cn}0 = 1 \\ \text{dn}0 = 1 \end{array} \right. \quad (\text{A.15})$$

$$122.04 \left\{ \begin{array}{l} \text{am}(u + 2K) = \pi + \text{amu}, \\ \text{sn}(u + 2K) = -\text{snu}, \\ \text{cn}(u + 2K) = -\text{cnu}, \\ \text{dn}(u + 2K) = \text{dnu}. \end{array} \right. \quad (\text{A.16})$$

Bölüm 2 ve Bölüm 3'te ε^{-1} Mertebeli Problemin İlerleyen Dalga Çözümünde Kullanılan Formüller

Bu kısımda, Bölüm ve Bölüm 3'te yer alan ε^{-1} mertebeli problemdeki çözümünde yer alan formüller yer almaktadır.

$\sqrt{a-t}$, $\sqrt{t-b}$, $\sqrt{t-c}$ ve $\sqrt{t-d}$ ifadelerini içeren integrand için formüller:

$$\operatorname{sn}^2 u = \frac{(b-d)(a-t)}{(a-b)(t-d)}, \quad k^2 = \frac{(a-b)(c-d)}{(a-c)(b-d)}, \quad g = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}},$$

$$\alpha^2 = \frac{b-a}{b-d} < 0, \quad \varphi = \operatorname{am} u_1 = \sin^{-1} \sqrt{\frac{(b-d)(a-y)}{(a-b)(y-d)}}, \quad \operatorname{snu}_1 = \sin \varphi.$$

Burada, $a > y \geq b > c > d$ eşitsizliği geçerlidir.

$$257.00 \left\{ \int_y^a \frac{dt}{\sqrt{(a-t)(t-b)(t-c)(t-d)}} = g \int_0^{u_1} du = gu_1 = g \operatorname{sn}^{-1}(\sin \varphi, k) \right.$$

$$\left. = gF(\varphi, k), \right. \quad (\text{A.17})$$

Bölüm 4'te ε^{-1} Mertebeli Problemin İlerleyen Dalga Çözümünde Kullanılan Formüller

Bu kısımda ise, Bölüm 4'te yer alan ε^{-1} mertebeli problemdeki çözümünde yer alan formüller yer almaktadır.

$a > b > y \geq c > d$ olmak üzere $\sqrt{a-t}, \sqrt{b-t}, \sqrt{t-c}$ ve $\sqrt{t-d}$ ifadelerini içeren integrand için formüller:

$$\operatorname{sn}^2 u = \frac{(a-c)(b-t)}{(b-c)(a-t)}, \quad k^2 = \frac{(b-c)(a-d)}{(a-c)(b-d)}, \quad g = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}}$$

$$0 < \alpha^2 = \frac{b-c}{a-c} < k^2, \quad \varphi = \operatorname{am} u_1 = \sin^{-1} \sqrt{\frac{(a-c)(b-y)}{(b-c)(a-y)}}, \quad \operatorname{snu}_1 = \sin \varphi$$

$$255.00 \left\{ \int_y^b \frac{dt}{\sqrt{(a-t)(b-t)(t-c)(t-d)}} = g \int_0^{u_1} du = gu_1 = g \operatorname{sn}^{-1}(\sin \varphi, k) \right.$$

$$\left. = gF(\varphi, k) \right. \quad (\text{A.18})$$

Yineleme Bağlıları

$$336.00 \quad V_0 = \int du = u = F(\varphi, k), \quad (\text{A.19})$$

$$336.01 \quad V_1 = \int \frac{du}{1 - \alpha^2 \operatorname{sn}^2 u} = \Pi(\varphi, \alpha^2, k), \quad (\text{A.20})$$

$$336.02 \left\{ V_2 = \int \frac{du}{(1 - \alpha^2 \operatorname{sn}^2 u)^2} = \frac{1}{2(\alpha^2 - 1)(k^2 - \alpha^2)} [\alpha^2 E(u) + (k^2 - \alpha^2) u + \right.$$

$$\left. + (2\alpha^2 k^2 + 2\alpha^2 - \alpha^4 - 3k^2) \Pi(\varphi, \alpha^2, k) - \frac{\alpha^4 \operatorname{snu} \operatorname{cnu} \operatorname{dnu}}{1 - \alpha^2 \operatorname{sn}^2 u} \right], \quad (\text{A.21})$$

$$336.03 \left\{ \begin{aligned} V_{m+3} &= \frac{1}{2(m+2)(1-\alpha^2)(k^2-\alpha^2)} [(2m+1)k^2V_m + \\ &+ 2(m+1)(\alpha^2k^2 + \alpha^2 - 3k^2)V_{m+1} + \\ &+ (2m+3)(\alpha^4 - 2\alpha^2k^2 - 2\alpha^2 + 3k^2)V_{m+2} + \frac{\alpha^4 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{(1-\alpha^2 \operatorname{sn}^2 u)^{m+2}} \end{aligned} \right\}. \quad (\text{A.22})$$

$$338.00 \quad X_0 = \int du = u = F(\varphi, k), \quad [\varphi = \operatorname{am} u] \quad (\text{A.23})$$

$$338.01 \quad X_1 = \int \frac{\operatorname{cn}^2 u du}{1-\alpha^2 \operatorname{sn}^2 u} = \frac{1}{\alpha^2} [u + (\alpha^2 - 1)\Pi(\varphi, \alpha^2, k)], \quad (\text{A.24})$$

$$338.02 \quad X_2 = \int \frac{\operatorname{cn}^4 u du}{(1-\alpha^2 \operatorname{sn}^2 u)^2} = \frac{1}{\alpha^4} [u + 2(\alpha^2 - 1)V_1 + (\alpha^2 - 1)^2 V_2], \quad (\text{A.25})$$

$$338.03 \left\{ \begin{aligned} X_3 &= \int \frac{\operatorname{cn}^6 u du}{(1-\alpha^2 \operatorname{sn}^2 u)^3} = \frac{1}{\alpha^6} [(\alpha^2 - 1)^3 V_3 + \\ &+ 3(\alpha^2 - 1)^2 V_2 + \\ &+ 3(\alpha^2 - 1)V_1 + u], \end{aligned} \right. \quad (\text{A.26})$$

$$338.04 \quad X_m = \int \frac{\operatorname{cn}^{2m} u du}{(1-\alpha^2 \operatorname{sn}^2 u)^m} = \frac{1}{\alpha^{2m}} \sum_{j=0}^m (\alpha^2 - 1)^j \frac{m!}{j!(m-j)!} V_j \quad (\text{A.27})$$

$$362.25 \left\{ \begin{aligned} \int \frac{\operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn}^2 u \operatorname{dn}^2 u}{(1-\alpha^2 \operatorname{sn}^2 u)^4} du &= \frac{1}{\alpha^6} [-k^2 \Pi(u, \alpha^2) + (3k^2 - \alpha^2 k^2 - \alpha^2) V_2 + \\ &+ (2\alpha^2 k^2 + 2\alpha^2 - 3k^2 - \alpha^4) V_3 + (\alpha^2 - 1)(\alpha^2 - k^2) V_4] \\ &\quad [336 \text{ yardımıyla.}] \end{aligned} \right.$$

$$400.01^* \left\{ \begin{aligned} \Pi(\varphi, \alpha^2, k) &\equiv \int_0^y \frac{dt}{(1-\alpha^2 t^2) \sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} \\ &= \int_0^\varphi \frac{d\vartheta}{(1-\alpha^2 \sin^2 \vartheta) \sqrt{1-k^2 \sin^2 \vartheta}} \\ &= \int_0^{u_1} \frac{du}{1-\alpha^2 \operatorname{sn}^2 u} \equiv \Pi(u_1, \alpha^2), \\ [y = \sin \varphi = \operatorname{sn} u_1, \quad t = \sin \vartheta = \operatorname{sn} u; \quad \alpha^2 \neq 1 \text{ veya } k^2 \neq 1] \end{aligned} \right. \quad (\text{A.28})$$

$$731.01 \quad \frac{\partial}{\partial u}(\operatorname{sn} u) = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u. \quad (\text{A.29})$$

Eliptik İntegrallerin Türev Formülleri

$$710.00 \quad \frac{dK}{dk} = \frac{E - k'^2 K}{kk'^2} \quad (\text{A.30})$$

$$710.02 \quad \frac{dE}{dk} = \frac{E - K}{k} \quad (\text{A.31})$$

$$710.12 \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial k} \Pi(\varphi, \alpha^2, k) \\ = \frac{k}{k'^2(k^2 - \alpha^2)} \left[E(\varphi, k) - k'^2 \Pi(\varphi, \alpha^2, k) - \frac{k^2 \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \right]. \end{array} \right. \quad (\text{A.32})$$

$$733.00 \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial n} \Pi(u, \alpha^2, k) = \frac{\partial V_1}{\partial n} = \frac{V_2 - V_1}{\alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2(1 - \alpha^2)(\alpha^2 - k^2)} \times \\ \times \left[\alpha^2 E(u) + (k^2 - \alpha^2)u + (\alpha^4 - k^2) \Pi(u, \alpha^2, k) - \frac{\alpha^4 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - \alpha^2 \operatorname{sn}^2 u} \right], \\ [\alpha^2 = n]. \end{array} \right. \quad (\text{A.33})$$

EK B : Modülasyon Denklemlerindeki Katsayı Matrisleri A ve B'nin ve C Vektörünün Bileşenleri

(2.64) denklemindeki katsayı matrisleri A, B'nin ve C vektörünün bileşenleri açık ifadeleri aşağıda verilmektedir ve katsayılarda yer alan K , E ve Π sırasıyla $K(m)$, $E(m)$ ve $\Pi(n, m)$ eliptik integrallerini temsil etmektedir:

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \frac{(K-E)r_1\sqrt{-r_1^2+r_3^2}}{2K^2(r_1^2-r_2^2)}, \\
 A_{12} &= -\frac{r_2(-r_1^2+r_3^2)^{3/2}\left(E-\frac{K(-r_2^2+r_3^2)}{-r_1^2+r_3^2}\right)}{2K^2(-r_1^2+r_2^2)(-r_2^2+r_3^2)}, \\
 A_{13} &= \frac{Er_3\sqrt{-r_1^2+r_3^2}}{2K^2(-r_2^2+r_3^2)}, \\
 A_{21} &= -\frac{(K-E)(Kr_1^2+Kr_2r_3+(K-2\Pi)r_1(r_2+r_3))}{K^2(r_1^2-r_2^2)}, \\
 A_{22} &= \frac{(Kr_1+(K-2\Pi)r_2)(-Er_1^2+Kr_2^2+(-K+E)r_3^2)}{K^2(r_1-r_2)(r_1+r_2)(r_2-r_3)}, \\
 A_{23} &= \frac{E(Kr_1+(K-2\Pi)r_3)}{K^2(r_2-r_3)}, \\
 A_{31} &= \frac{2(K-E)^2r_1(r_1^2-r_3^2)}{K^2(r_1^2-r_2^2)}, \\
 A_{32} &= -\frac{2r_2(-Er_1^2+Kr_2^2+(-K+E)r_3^2)^2}{K^2(r_1^2-r_2^2)(r_2^2-r_3^2)}, \\
 A_{33} &= \frac{2E^2r_3(-r_1^2+r_3^2)}{K^2(-r_2^2+r_3^2)}.
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

$$\begin{aligned}
B_{11} &= \frac{r_1 \sqrt{-r_1^2 + r_3^2} ((3K - E)r_1^2 - (K + E)r_2^2 + (K - E)r_3^2)}{K^2(r_1^2 - r_2^2)}, \\
B_{12} &= \frac{r_2 \sqrt{-r_1^2 + r_3^2} (2K + \frac{(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)(Er_1^2 - Kr_2^2 + (K - E)r_3^2)}{(r_1^2 - r_2^2)(r_2^2 - r_3^2)})}{K^2}, \\
B_{13} &= \frac{r_3 \sqrt{-r_1^2 + r_3^2} (Er_1^2 + (-2K + E)r_2^2 + (2K + E)r_3^2)}{K^2(-r_2^2 + r_3^2)}, \\
B_{21} &= -\frac{2((3K - E)r_1^2 - (K + E)r_2^2 + (K - E)r_3^2)(Kr_1^2 + Kr_2r_3 + (K - 2\Pi)r_1(r_2 + r_3))}{K^2(r_1^2 - r_2^2)}, \\
B_{22} &= -\frac{2(Kr_1 + (K - 2\Pi)r_2)(Er_1^4 - 3Kr_2^4)}{K^2(r_1 - r_2)(r_1 + r_2)(r_2 - r_3)} \\
&\quad - \frac{2(Kr_1 + (K - 2\Pi)r_2)((2K - E)r_2^2r_3^2 + (K - E)r_3^4 + r_1^2((K + E)r_2^2 - Kr_3^2))}{K^2(r_1 - r_2)(r_1 + r_2)(r_2 - r_3)}, \\
B_{23} &= \frac{2(Kr_1 + (K - 2\Pi)r_3)(Er_1^2 + (-2K + E)r_2^2 + (2K + E)r_3^2)}{K^2(r_2 - r_3)}, \\
B_{31} &= \frac{4r_1(r_1^2 - r_3^2)((3K^2 - 4KE + E^2)r_1^2 + (-K^2 + E^2)r_2^2 + (K - E)^2r_3^2)}{K^2(r_1^2 - r_2^2)}, \\
B_{32} &= -\frac{4r_2}{K^2(r_1^2 - r_2^2)(r_2^2 - r_3^2)}(E^2r_1^6 + 3K^2r_2^6 + K(-5K + 4E)r_2^4r_3^2 \\
&\quad + (K - E)^2r_2^2r_3^4 + (K - E)^2r_3^6 + E^2r_1^4(r_2^2 - r_3^2) - r_1^2(K(K + 4E)r_2^4 \\
&\quad - 2(K^2 + KE - E^2)r_2^2r_3^2 + (K - E)^2r_3^4)), \\
B_{33} &= \frac{4Er_3(r_1^2 - r_3^2)(Er_1^2 + (-2K + E)r_2^2 + (2K + E)r_3^2)}{K^2(r_2^2 - r_3^2)}.
\end{aligned} \tag{B.2}$$

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{2\Pi(r_2 + r_3) - K(r_1 + r_2 + r_3)}{K(2t + t_0)}, \\
C_2 &= \frac{2(r_1^2 + r_2^2 - r_3^2 - \frac{2E(r_1^2 - r_3^2)}{K})}{2t + t_0}.
\end{aligned} \tag{B.3}$$

EK C : ETDRK4 Yöntemi

Denklemleri doğrudan sayısal çözümlerini elde etmek için kullanılan ETRK4 yöntemi için formüller verilecektir. Model olarak,

$$\dot{u} = cu(t) + F(u(t), t) \quad (C.1)$$

denklemini göz önüne alınsın. Burada, c sabit ve F nonlineer terimi göstermektedir. ETD yöntemini türetmek için denkleminin her iki yanını e^{-ct} integrasyon çarpanıyla çarpılır ve daha sonra $t = t_n$ zaman adımından $t = t_{n+1} = t_n + h$ zaman adımına denklemini integre edilir ve $\tau = t - t_n$ yeni değişkeninin tanımlanmasıyla

$$u(t_{n+1}) = u(t_n)e^{ch} + e^{ch} \int_0^h e^{-c\tau} F(u(t_n + \tau), t_n + \tau) d\tau \quad (C.2)$$

olur. ETD yönteminin farklı türleri (ETD1, ETD2,...) elde etmek için yukarıdaki integral içerisinde yer alan F için farklı yaklaşımlar sonucu elde edilmiştir. Ayrıca, işlem sadeliği için bundan sonraki formülasyonda, $u(t_n)$ yerine u_n ve $F(u_n, t_n)$ yerine de F_n kullanılacaktır.

ETD yönteminin farklı türlerini elde etmek için F için en basit yaklaşım olarak, integralinde F sabit olarak $F = F_n + \mathcal{O}(h)$ biçiminde alınarak

$$u_{n+1} = u_n e^{ch} + \frac{F_n(e^{ch} - 1)}{c} \quad (C.3)$$

ETD1 sayısal şeması elde edilir.

Diğer bir yaklaşım olarak, $t_n \leq t \leq t_{n+1}$ olmak üzere, $F = F_n + \frac{\tau(F_n - F_{n-1})}{h} + \mathcal{O}(h^2)$ olarak kabul edilirse ETD2 sayısal şemasına ulaşılır:

$$u_{n+1} = u_n e^{ch} + \frac{F_n((hc + 1)e^{ch} - 1 - 2hc)}{hc^2} + \frac{F_{n-1}(-e^{ch} + 1 + hc)}{hc^2} \quad (C.4)$$

Benzer biçimde analize devam edilerek herhangi bir mertebedeki ETD sayısal şeması türetilebilir:

$$u_{n+1} = u_n e^{ch} + h \sum_{m=0}^{s-1} g_m \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} F_{n-k} \quad (C.5)$$

Burada, s şemanın mertebesini göstermektedir. C.5'te yer alan g_m 'ler aşağıdaki rekürans bağıntısıyla verilmektedir:

$$\begin{aligned} chg_0 &= e^{ch} - 1, \\ chg_{m+1} + 1 &= g_m + \frac{1}{2}g_{m-1} + \frac{1}{3}g_{m-2} + \cdots + \frac{1}{m+1}g_0, \quad m \geq 0. \end{aligned} \quad (C.6)$$

Cox and Matthews zaman adımı için Runge Kutta metodu kullanarak ETDRK olarak adlandırılan yöntemi geliştirmiştir [51]. Bu zaman adımı için Runge Kutta

metodu kullanılarak ETDRK olarak gösterilen yöntem geliştirilmiştir. Bu çalışmada, dördüncü merteye şema kullanılarak türetilen ETDRK4 yöntemi kullanılmıştır. Cox ve Matthews'in türettikleri ETDRK4 sayısal şeması aşağıdaki gibidir:

$$a_n = u_n e^{ch/2} + (e^{ch/2} - 1) F(u_n, t_n)/c, \quad (C.7)$$

$$b_n = u_n e^{ch/2} + (e^{ch/2} - 1) F(a_n, t_n + h/2)/c, \quad (C.8)$$

$$c_n = u_n e^{ch/2} + (e^{ch/2} - 1) (2F(b_n, t_n + h/2) - F(u_n, t_n))/c, \quad (C.9)$$

$$\begin{aligned} u_{n+1} = & u_n e^{ch} + \{ F(u_n, t_n) [-4 - hc + e^{hc} (4 - 3hc + h^2 c^2)] \\ & + 2(F(a_n, t_n + h/2) + F(b_n, t_n + h/2)) [2 + hc + e^{hc} (-2 + hc)] \\ & + F(c_n, t_n + h) [-4 - 3hc - h^2 c^2 + e^{hc} (4 - hc)] \} / h^2 c^3. \end{aligned} \quad (C.10)$$

Bu tez çalışmasında kullanılan ETRK4 yönteminin modifiye halidir [52]:

$$Q = L^{-1} (e^{Lh/2} - 1), \quad (C.11)$$

$$f_1 = h^{-2} L^{-3} [-4 - Lh + e^{Lh} (4 - 3Lh + (Lh)^2)], \quad (C.12)$$

$$f_2 = h^{-2} L^{-3} [4 + 2Lh + e^{Lh} (-4 + 2Lh)], \quad (C.13)$$

$$f_3 = h^{-2} L^{-3} [-4 - 3Lh - (Lh)^2 + e^{Lh} (4 - Lh)]. \quad (C.14)$$

Burada, L köşgensel matrisi göstermektedir.

ÖZGEÇMİŞ

Adı SOYADI: Neşe ÖZDEMİR

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:** 2012, Marmara Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü
- **Y. Lisans:** 2015, İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

MESLEKİ DENEYİMLER VE ÖDÜLLER:

- 2015-2024 : TÜBİTAK-BİDEB-2211 Yurt İçi Genel Doktora Bursu.
- 2018-2022: Işık Üniversitesi, Araştırma Görevlisi
- 2023- : Işık Üniversitesi, Yarı-zamanlı Öğretim Görevlisi.

DOKTORA TEZİNDEN TÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER:

- **Ozdemir N.**, Demirci A., Ahmetolan S. : Undular bores in the (3+1) dimensional mKP equation, Physics Letters A, 483, 129051, <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960123004310>. 110.
- Demirci A, **Ozdemir, N.**, Ahmetolan, S. (2018). Dispersive shock waves in the cylindrical modified Korteweg-de Vries equation, International Conference on Applied Mathematics, Modeling and Life Sciences (ICAMLS 2018), İstanbul, 3-5 Ekim 2018.
- Demirci, A., Ahmetolan, S., **Ozdemir, N.** (2018). Silindirik Modifiye Korteweg de Vries Denklemlerinin Dispersif Şok Dalga Çözümleri, Ulusal Matematik Sempozyumu (UMS 2018), 31. Ulusal Matematik Sempozyumu, Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi, 12-15 Eylül 2018.
- **Ozdemir, N.**, Ahmetolan, S., Demirci A. (2020). (3+1) Boyutlu Modifiye Kadomtsev-Petviashvili Denklemi İçin Whitham Modülasyon Teorisi, “22. Ulusal Mekanik Kongresi, Çukurova Üniversitesi, 06-10 Eylül 2020.
- **Ozdemir, N.**, Ahmetolan, S., Demirci A. (2023). Evolution of nonlinear periodic waves in the focusing cylindrical modified Korteweg-de Vries equation (submitted).

PROJE BİLGİSİ:

- İTÜ Bilimsel Araştırma Projesi Proje Başlığı: Bazı Silindirik Nonlineer Dispersif Denklemlerin Dispersif Şok Dalga Çözümleri
Proje Türü: Genel Araştırma Projesi
Proje Tarihi: 19.06.2018-19.12.2019

